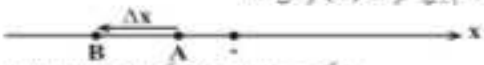
پاسخنامه
فیزیک
فصل ۱
دوازدهم

www.mapedu.ir

کانون
فرهنگی
آموزش
قلم‌چی

۱ – گزینهٔ «۴» (امیر پوریوسف)

چون متحرک دو بار از مبدأ مکان عبور کرده است، بنابراین جهت بردار مکان ۲ بار تغییر کرده است. از طرف دیگر بنابر تعریف، جابه‌جایی برداری است که نقطهٔ شروع حرکت (A) را به نقطهٔ پایان حرکت (B) وصل کند.



(حرکت بر خط راست) (فیزیک ۳، صفحه‌های ۲ تا ۱۰)

۲ – گزینهٔ «۳» (امیر پوریوسف)

با توجه به نمودار در بازهٔ زمانی $t_1 = 8s$ تا $t_2 = 20s$ که نمودار زیر محور t است در واقع $x < 0$ است و بردار مکان درخلاف جهت محور xها است.

$$S_{av} = \frac{\ell}{\Delta t} = \frac{6+6}{20-8} = \frac{12}{12} = 1\frac{m}{s}$$

در بازهٔ زمانی $t'_1 = 4s$ تا $t'_2 = 13s$ که شیب خط مماس بر نمودار منفی است، سرعت نیز منفی است و متحرک درخلاف جهت محور xها درحال حرکت است. بنابراین بزرگی سرعت متوسط در این بازهٔ زمانی برابر است با:

$$v_{av} = \frac{\Delta x}{\Delta t} = \frac{-6-(+6)}{13-4} = \frac{-12}{9}\frac{m}{s} \rightarrow |v_{av}| = \frac{4}{3}\frac{m}{s}$$

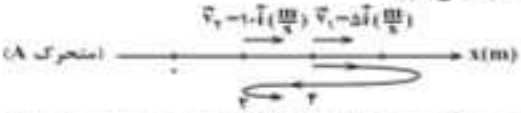
$$\frac{S_{av}}{v_{av}} = \frac{1}{\frac{4}{3}} = \frac{3}{4}$$

(حرکت بر خط راست) (فیزیک ۳، صفحه‌های ۲ تا ۱۰)

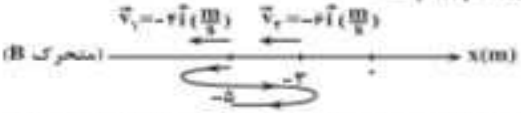
۳ – گزینهٔ «۳» (امیرحسین برادران)

می‌دانیم در بازهٔ زمانی که جهت حرکت متحرک تغییر می‌کند تندی متوسط بزرگتر از بزرگی سرعت متوسط است.

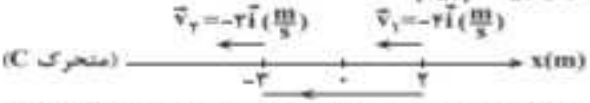
بنابراین، ابتدا بر روی محور xها مکان هر یک از متحرک‌ها و جهت حرکت آنها را در لحظه‌های 1s و 4s مشخص می‌کنیم و سپس تندی متوسط و بزرگی سرعت متوسط را با هم مقایسه می‌کنیم:



مطابق نمودار بالا متحرک در بازهٔ زمانی 1s تا 4s حداقل دو بار تغییر جهت داده است بنابراین $|v_{av}| \neq S_{av}$ است.



مطابق نمودار بالا متحرک در بازهٔ زمانی 1s تا 4s حداقل دو بار تغییر جهت داده است بنابراین $|v_{av}| \neq S_{av}$ است.



مطابق نمودار بالا حرکت متحرک می‌تواند بدون تغییر جهت از مکان $x_1 = 2m$ تا مکان $x_2 = -3m$ باشد. بنابراین در این صورت داریم: $|v_{av}| = S_{av}$

(حرکت بر خط راست) (فیزیک ۳، صفحه‌های ۲ تا ۱۰)

۴ – گزینهٔ «۴» (مصطفی کیانی)

می‌دانیم جهت بردار مکان متحرک زمانی که $x < 0$ باشد، در خلاف جهت محور x است و زمانی که $x > 0$ در جهت مثبت محور x است. بنابراین، ابتدا وضعیت بردار مکان و بردار سرعت را در بازه‌های زمانی مختلف بررسی می‌کنیم

$$0 \le t \le 1s \begin{cases} x > 0 \\ v < 0 \end{cases}, 1s < t \le 2s \Rightarrow \begin{cases} x < 0 \\ v < 0 \end{cases}, 2s < t \le 3s \Rightarrow \begin{cases} x < 0 \\ v > 0 \end{cases}$$

$$3s < t \le 5s \begin{cases} x > 0 \\ v > 0 \end{cases}, 5s < t \le 7s \Rightarrow \begin{cases} x > 0 \\ v < 0 \end{cases}$$

می‌بینیم در بازه‌های زمانی $1s < t \le 2s$ و $3s < t \le 5s$ بردار مکان و بردار سرعت هم جهت هستند.

$$l^{\text{ف}} = (2-1) + (5-3) = 3s$$

همچنین در بازه‌های زمانی 0s تا 2s و 5s تا 7s بردار سرعت متحرک در خلاف جهت محور xها و اندازهٔ آن در بازهٔ زمانی صفر تا 2s در حال کاهش است.

$$l^{\text{م}} = (2-0) = 2s$$

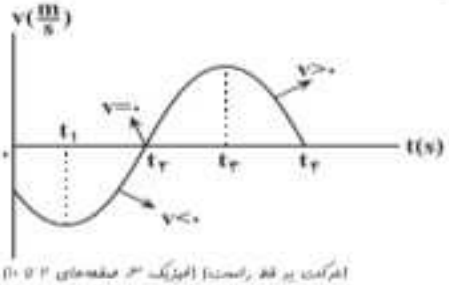
$$\frac{l^{\text{ف}}}{l^{\text{م}}} = \frac{3}{2}$$

(حرکت بر خط راست) (فیزیک ۳، صفحه‌های ۲ تا ۱۰)

۵ – گزینهٔ «۴» (امیرحسین برادران)

در نمودار سرعت- زمان در لحظه‌ای که نمودار محور زمان را قطع می‌کند و علامت سرعت عوض می‌شود، جهت حرکت متحرک تغییر می‌کند. بنابراین در بازهٔ زمانی که لحظهٔ t_0 در آن بازه قرار داشته باشد، چون جهت حرکت متحرک تغییر کرده است، مسافت طی شده و بزرگی جابه‌جایی با یکدیگر برابر نیستند.

در بازهٔ زمانی t_2 تا t_3، $v > 0$ است و متحرک در جهت محور xها در حال حرکت است بنابراین در این بازهٔ زمانی جهت حرکت متحرک ثابت است و مسافت و بزرگی جابه‌جایی با هم برابر است.



(حرکت بر خط راست) (فیزیک ۳، صفحه‌های ۲ تا ۱۰)

۶ – گزینهٔ «۱» (امیرحسین برادران)

با توجه به رابطهٔ تندی متوسط و سرعت متوسط داریم:

$$\left.\begin{aligned} v_{av} &= \frac{x_1 - x_0}{3-0} = \frac{x_1 - x_0}{3} \\ v'_{av} &= \frac{x_3 - 2x_0}{12-6} = \frac{x_3 - 2x_0}{6} \end{aligned}\right\} \xrightarrow{v_{av} = s_{av} = 2\frac{m}{s}} v'_{av} = s'_{av} = 13\frac{m}{s}$$

$$v'_{av} - v_{av} = \frac{(x_3 - 2x_0) - 2(x_1 - x_0)}{6}$$

$$\Rightarrow 13 - 2 = \frac{x_3 - 2x_1}{6} \Rightarrow x_3 - 2x_1 = 52m$$

$$v'_{av} = \frac{x_3 - 2x_1}{12-11} = 52\frac{m}{s}$$

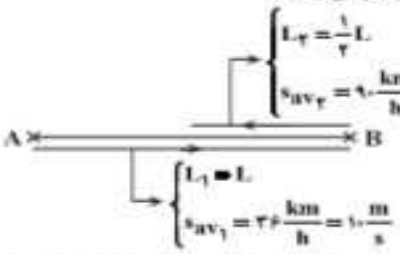
(حرکت بر خط راست) (فیزیک ۳، صفحه‌های ۲ تا ۱۰)

www.mapedu.ir

۷ – گزینهٔ «۳»

(احسان مغلی)

با توجه به شکل زیر داده‌های سؤال را می‌نویسیم:



اکنون با استفاده از رابطهٔ تندی متوسط و با توجه به این‌که زمان رفت ۴ دقیقه بیش‌تر از زمان برگشت است، داریم:

$$s_{av} = \frac{L}{\Delta t} \Rightarrow \Delta t = \frac{L}{s_{av}} \Rightarrow \frac{t_1}{t_2} = \frac{\frac{L_1}{s_{av,1}}}{\frac{L_2}{s_{av,2}}} \xrightarrow[s_{av,1}=10\frac{m}{s},\ s_{av,2}=25\frac{m}{s}]{L_2=\frac{L_1}{2}}$$

$$\frac{t_1}{t_2} = \frac{2\times 25}{10} = 5 \Rightarrow t_1 = 5t_2$$

$$t_1 - t_2 = 4\,min$$

$$\Rightarrow \begin{cases} t_1 = 5\,min \\ t_2 = 1\,min \end{cases} \Rightarrow t_1 + t_2 = 6\,min$$

(هرکت بر فط راست) (فیزیک ۳، صفحه‌های ۲ تا ۴)

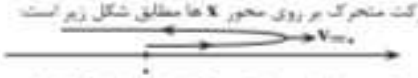
---

۸ – گزینهٔ «۱»

(امیرحسین برادران)

در نمودار سرعت- مکان، اگر $V > 0$ باشد، $\Delta x > 0$ است و بالعکس. با استفاده از این نکته به بررسی نمودارها می‌پردازیم:

الف) درست است. در این نمودار متحرک ابتدا در جهت مثبت محور x ها در حال حرکت است. پس از مدتی تندی آن صفر می‌شود و در خلاف جهت محور x ها حرکت خود را ادامه می‌دهد. مسیر حرکت متحرک بر روی محور x ها مطابق شکل زیر است.



ب) نادرست است. در این نمودار در ابتدای حرکت $V > 0$ است اما $x < 0$ است. بنابراین نمودار نمی‌تواند صحیح باشد.

پ) نادرست است. در این نمودار در لحظه‌ای که برای اولین بار پس از مبدأ زمان تندی متحرک صفر شده و جهت حرکت آن تغییر کرده است، باید متحرک در خلاف جهت محور x ها ادامه مسیر دهد و متحرک به مبدأ مکان نزدیک شود، در صورتی‌که از مبدأ مکان دور می‌شود.

ت) نادرست است. در مبدأ زمان سرعت متحرک منفی و در جهت محور x ها در حال افزایش است در صورتی‌که بایستی $x < 0$ باشد.

(هرکت بر فط راست) (فیزیک ۳، صفحه‌های ۲ تا ۱۰)

---

۹ – گزینهٔ «۲»

(عرفان اصغری)

شیب خط مماس بر نمودار مکان- زمان برابر سرعت لحظه‌ای است. با استفاده از رابطهٔ سرعت لحظه‌ای که در این‌جا برابر شیب خط مماس بر نمودار در لحظهٔ $t = 20s$ است، مکان متحرک در لحظهٔ $t = 20s$ را به دست می‌آوریم:

$$v_{t=20s} = \frac{x_{t=20s} - 0}{20 - 15} \xrightarrow{v_{t=20s} = 2/2\frac{m}{s}} x_{t=20s} = 12m$$

اکنون تندی متوسط متحرک را در ۲۰s اول حرکت به دست می‌آوریم:

$$S_{av} = \frac{\ell}{\Delta t} = \frac{5-(-3)+12-(-3)}{20} = 1/15\frac{m}{s}$$

(هرکت بر فط راست) (فیزیک ۳، صفحه‌های ۲ تا ۱۰)

---

۱۰ – گزینهٔ «۳»

(امیرحسین برادران)

اگر تندی متوسط متحرک در ثانیه‌های اول، دوم و سوم را به‌ترتیب با S_{av}، S'_{av} و S''_{av} نشان دهیم می‌توان نوشت:

$$S'_{av} = S_{av} + 0/2S_{av} = 1/2S_{av}$$

$$S''_{av} = S'_{av} + \frac{1}{3}S'_{av} = \frac{5}{3}S'_{av} = \frac{5}{3}\times 1/2\times S_{av} = 1/5S_{av}$$

با استفاده از رابطهٔ تندی متوسط داریم:

$$\text{تندی متوسط} = \frac{\text{مسافت طی‌شده در دو ثانیه اول}}{\text{مدت زمان}}$$

$$\Rightarrow 22/2 = \frac{S_{av}\times\Delta t_1 + S'_{av}\times\Delta t_2}{\Delta t} \xrightarrow[\Delta t = 2s,\ S'_{av} = 1/2S_{av}]{\Delta t_1 = \Delta t_2 = 1s}$$

$$22/2 = \frac{S_{av}(1+1/2)}{2} \Rightarrow S_{av} = \frac{22/2}{1/1} = 22\frac{m}{s}$$

اکنون فاصلهٔ A تا B را به دست می‌آوریم:

$$\overline{AB} = S_{av}\times\Delta t + S'_{av}\times\Delta t' + S''_{av}\times\Delta t''$$

$$\xrightarrow[S'_{av} = 1/2S_{av},\ S''_{av} = 1/5S_{av}]{\Delta t = \Delta t' = \Delta t'' = 1s} \overline{AB} = S_{av}(1+1/2+1/5)$$

$$= 3/7S_{av} = 3/7\times 22 = 81/4m$$

(هرکت بر فط راست) (فیزیک ۳، صفحه‌های ۲ تا ۴)

www.mapedu.ir

۱۱ - گزینهٔ «۳»

(مریم رشتیان)

می‌دانیم در حرکت روی خط راست، اگر جهت حرکت عوض شود، در یک بازهٔ زمانی معین، مسافت طی شده از بزرگی جابه‌جایی در آن بازه بیشتر است؛ درنتیجه، تندی متوسط نیز از بزرگی سرعت متوسط در آن بازه بیشتر خواهد شد و دیگر این دو مقدار با هم برابر نخواهند بود. طبق نمودار داده شده، می‌توان دریافت که در لحظات $t=2s$ و $t=6s$ جهت حرکت متحرک عوض شده است؛ بنابراین، در بین بازه‌های زمانی داده شده، چون در بازهٔ زمانی $2s \le t \le 4s$ جهت حرکت متحرک تغییر کرده است، بزرگی سرعت متوسط نمی‌تواند با تندی متوسط برابر باشد.

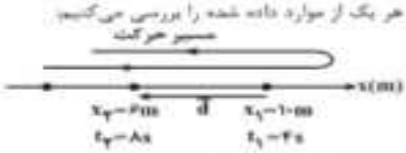
(حرکت بر خط راست) (فیزیک ۳، صفحه‌های ۲ تا ۵)

---

۱۲ - گزینهٔ «۲»

(امیرعلی قائم‌قانی)

با توجه به شکل هر یک از موارد داده شده را بررسی می‌کنیم:



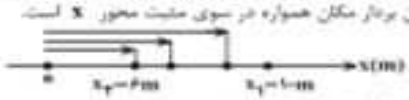
با توجه به شکل فوق، چون متحرک در لحظهٔ $t_1=4s$ در مکان $x_1=10m$ است و فقط یک‌بار تغییر جهت داده است، قطعاً در مکان‌های $x>10m$ یا $x=10m$ این تغییر جهت رخ داده است؛ زیرا اگر در مکان‌های $6m<x<10m$ تغییر جهت رخ دهد، دیگر نمی‌تواند در لحظهٔ $t=8s$ به مکان $x_2=6m$ برگردد. با توجه به این توضیحات:

الف) نادرست است. در صورتی‌که متحرک در لحظهٔ $t_1=4s$ تغییر جهت دهد، در بازهٔ زمانی $4s$ تا $8s$ (چهار ثانیهٔ دوم) طول بردار مکان همواره کاهش می‌یابد.

ب) درست است. با توجه به شکل جهت بردار جابه‌جایی $(\vec{d})$ در خلاف جهت محور x است.

پ) نادرست. اگر بردار سرعت متحرک در لحظهٔ $t_1=4s$ در جهت منفی محور xها باشد، در این صورت قبل از لحظهٔ $t=4s$ جهت حرکت متحرک تغییر کرده است.

ت) درست است؛ چون در بازهٔ زمانی $4s \le t \le 8s$ مکان متحرک در xهای مثبت قرار دارد؛ بنابراین بردار مکان همواره در سوی مثبت محور x است.



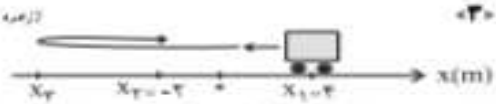
بنابراین، ۲ عبارت از عبارت‌های داده شده درست است.

(حرکت بر خط راست) (فیزیک ۳، صفحه‌های ۲ تا ۵)

---

۱۳ - گزینهٔ «۳»

(زهره آقامحمدی)



چون مسافت طی شده توسط متحرک از بزرگی جابه‌جایی بیشتر است، متحرک حداقل یک بار تغییر جهت داده است؛ بنابراین برای محاسبهٔ حداکثر فاصلهٔ متحرک از نقطهٔ شروع حرکت، فرض می‌کنیم که متحرک یک بار در مکان x_2 تغییر جهت می‌دهد. لذا با توجه به شکل مسیر حرکت داریم:

$$\frac{\text{مسافت}}{\text{اندازهٔ جابه‌جایی}}=\frac{\ell}{|\Delta x|}=\frac{4+|x_2|+|x_2-2|}{|x_2-x_1|}=\frac{2+2|x_2|}{|-2-4|}$$

$$=\frac{2(1+|x_2|)}{6}=\frac{|x_2|+1}{3}$$

$$\frac{1}{|\Delta x|}=\frac{11}{3}\Rightarrow\frac{|x_2|+1}{3}=\frac{11}{3}\Rightarrow|x_2|=10m\xrightarrow{x_2<0}x_2=-10m$$

در نهایت فاصلهٔ نقطهٔ x_2 از x_1 را می‌یابیم:

$$x_2-x_1=-10-4=-14m$$

بنابراین، حداکثر فاصلهٔ متحرک از نقطهٔ شروع حرکت $14m$ است.

(حرکت بر خط راست) (فیزیک ۳، صفحه‌های ۲ تا ۵)

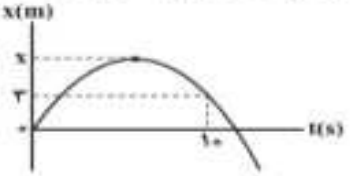
---

۱۴ - گزینهٔ «۲»

(مهمور منصوری)

اگر بیشترین فاصلهٔ متحرک تا مبدأ مکان را x در نظر بگیریم، با توجه به نمودار، خواهیم داشت: $\ell=x+(x-3)=2x-3$ مسافت طی شده در 10 ثانیهٔ اول

اندازهٔ جابه‌جایی در 10 ثانیهٔ اول $|x_2-x_1|=|3-0|\Rightarrow|\Delta x|=3m$



از طرف دیگر، با توجه به تعریف سرعت متوسط و تندی متوسط داریم:

$$S_{av}=2|v_{av}|\Rightarrow\frac{\ell}{\Delta t}=2\frac{|\Delta x|}{\Delta t}$$

$$\Rightarrow 2x-3=2\times3\Rightarrow 2x=15\Rightarrow x=7/5m$$

(حرکت بر خط راست) (فیزیک ۳، صفحه‌های ۲ تا ۵)

---

۱۵ - گزینهٔ «۴»

(محمدکاظم منظری)

با توجه به این‌که حرکت دو متحرک یکنواخت با تندی یکسان است، معادلهٔ حرکت دو متحرک را می‌نویسیم و اختلاف فاصلهٔ دو متحرک را در مبدأ زمان حساب می‌کنیم:

$$\text{معادلهٔ حرکت}:\begin{cases}x_A=-3t+x_{0A}\Rightarrow x_A=0\Rightarrow t_A=\frac{x_{0A}}{3}\\ x_B=-3t+x_{0B}\Rightarrow x_B=0\Rightarrow -3t+x_{0B}=0\Rightarrow t_B=\frac{x_{0B}}{3}\end{cases}$$

$$\Rightarrow t_B-t_A=90s\Rightarrow+\frac{x_{0B}}{3}-\frac{x_{0A}}{3}=90\Rightarrow x_{0B}-x_{0A}=270m$$

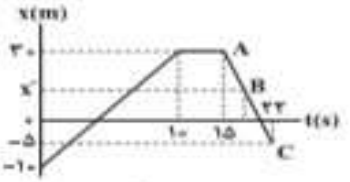
(حرکت بر خط راست) (فیزیک ۳، صفحه‌های ۳ تا ۵)

---

۱۶ - گزینهٔ «۱»

(مریم رشتیان)

بزرگی سرعت متوسط در هر بازه را به‌طور جداگانه به‌دست می‌آوریم:



$$\text{طبق نمودار}\Rightarrow\begin{cases}t_1=0\Rightarrow x_1=-10m\\ t_2=15s\Rightarrow x_2=30m\end{cases}$$

$$\Rightarrow v_{av[0,15]}=\frac{\Delta x}{\Delta t}=\frac{30-(-10)}{15-0}=\frac{8}{3}\frac{m}{s}\ (*)$$

برای یافتن مکان در لحظهٔ $t=20s$ از یکسان بودن شیب خط یک بار با در نظر گرفتن دو نقطهٔ A و C و بار دیگر با در نظر گرفتن دو نقطهٔ A و B استفاده می‌کنیم:

$$\text{شیب خط}=\frac{x_C-x_A}{t_C-t_A}=\frac{-5-30}{22-15}=-5$$

$$\text{شیب خط}=\frac{x_B-x_A}{t_B-t_A}=\frac{x'-30}{20-15}=\frac{x'-30}{5}\Rightarrow\frac{x'-30}{5}=-5$$

$$\Rightarrow x'=5m$$

www.mapedu.ir

بنابراین اندازهٔ سرعت متوسط در ۱۰ ثانیهٔ دوم برابر است با

$$\begin{cases} t_1 = 10s \Rightarrow x_1 = 30m \\ t_2 = 20s \Rightarrow x_2 = 5m \end{cases} \Rightarrow |v_{av[10,20]}| = \frac{|\Delta x|}{\Delta t} = \frac{|5-30|}{20-10} = \frac{5\,m}{2\,s} \quad (**)$$

$$\xrightarrow{(*),(**)} \frac{V_{av[0,15]}}{V_{av[10,20]}} = \frac{\frac{A}{3}}{\frac{5}{2}} = \frac{16}{15}$$

(حرکت بر خط راست) (فیزیک ۳، صفحه‌های ۲ تا ۵)

---

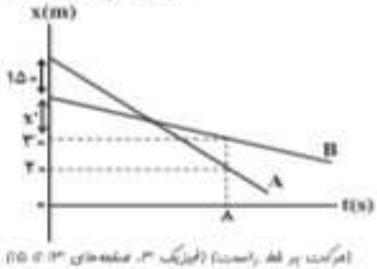
۱۷ - گزینهٔ «۳» (خلاصه‌ها مفید)

چون نمودار مکان – زمان متحرک‌ها به‌صورت خط راست می‌باشد، هر دو متحرک با سرعت ثابت حرکت می‌کنند. بنابراین، مسافت طی شده توسط هریک در تاریخه‌های مختلف با تندی آن‌ها برابر است. با توجه به این که در حرکت با سرعت ثابت، مسافت طی‌شده در تاریخه‌های مختلف یکسان است، کافی است، تفاضل تندی متوسط دو متحرک را بیابیم. با توجه به نمودار مکان – زمان، در مدت $\Delta t = 8s$، متحرک A مسافت $l_A = 150 + x' + 10$ و متحرک B مسافت $l_B = x'$ را می‌پیماید. بنابراین می‌توان نوشت:

$$s_{(av)A} - s_{(av)B} = \frac{l_A}{\Delta t_A} - \frac{l_B}{\Delta t_B}$$

$$\xrightarrow{\Delta t_A = \Delta t_B = 8s} s_A - s_B = \frac{150 + x' + 10}{8} - \frac{x'}{8} = 20\frac{m}{s}$$

$$\Rightarrow l_A - l_B = 20m$$



(حرکت بر خط راست) (فیزیک ۳، صفحه‌های ۳ تا ۵)

---

۱۸ - گزینهٔ «۲» (امیرحسین برادران)

اگر طول پل را برابر با L و طول قطار را برابر با L' در نظر بگیریم، در حالتی که تمام طول قطار روی پل قرار دارد، مسافتی که طی می‌کند برابر است با

$$d_1 = L - L'$$

و مسافت طی شده توسط قطار زمانی که وارد پل می‌شود تا زمانی که به‌طور کامل از پل خارج شود برابر است با

$$d_2 = L + L'$$

با توجه به این که تندی قطار ثابت است، داریم:

$$v = 108\frac{km}{h} = \frac{108\,m}{3/6\,s} = 30\frac{m}{s}$$

$$\Delta x = v\Delta t \Rightarrow d_2 - d_1 = v(t_2 - t_1)$$

$$\xrightarrow{t_2 - t_1 = 15s} (L + L') - (L - L') = 30 \times 15$$

$$\Rightarrow 2L' = 30 \times 15 \Rightarrow L' = 225m$$

(حرکت بر خط راست) (فیزیک ۳، صفحه‌های ۳ تا ۵)

---

۱۹ - گزینهٔ «۴» (مصطفی کیانی)

آن‌طور که نمودار نشان می‌دهد متحرک A از مکان $x_{0A} = 0$ و متحرک B از مکان $x_{0B} = 5m$ شروع به حرکت نموده‌اند و در لحظهٔ $t = 10s$ به هم رسیده‌اند. بنابراین کافی است مکان متحرک B را در لحظهٔ $t = 10s$ بیابیم و جابه‌جایی آن را حساب کنیم. چون در لحظهٔ $t = 10s$ مکان هر دو متحرک یکسان است، به همین منظور با استفاده از معادلهٔ حرکت با سرعت ثابت و داشتن $v_A = 2\frac{m}{s}$، مکان متحرک A را پیدا می‌کنیم.

$$x_A = v_A t + x_{0A} \xrightarrow[t=10s]{x_{0A}=0,\ v_A=2\frac{m}{s}} x_A = 2 \times 10 + 0$$

$$\Rightarrow x_A = 20m$$

جابه‌جایی متحرک B در بازهٔ زمانی صفر تا ۱۰ ثانیه برابر است با:

$$\Delta x_B = x_B - x_{0B} = 20 - 5 \Rightarrow \Delta x_B = 15m$$

(حرکت بر خط راست) (فیزیک ۳، صفحه‌های ۳ تا ۵)

---

۲۰ - گزینهٔ «۴» (امیرحسین برادران)

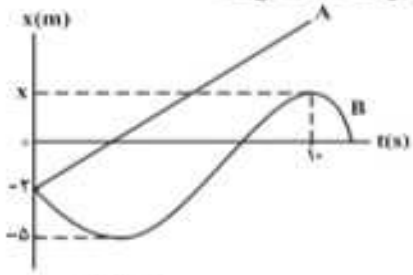
ابتدا با استفاده از رابطهٔ تندی متوسط، مکان متحرک B را در لحظهٔ $t = 10s$ به‌دست می‌آوریم:

$$S_{av} = \frac{\ell}{\Delta t} \xrightarrow{\Delta t = 10s,\ S_{av} = 1/5\frac{m}{s}} 1/5 = \frac{\ell}{10} \Rightarrow \ell = 15m$$

مسافت طی‌شده برابر $15m$ است که با توجه به نمودار می‌توان نوشت:

$$15 = |-5 - (-2)| + |0 - (-5)| + |x_{t=10s} - 0| \Rightarrow x_{t=10s} = 7m$$

اکنون با استفاده از رابطهٔ شتاب متوسط، سرعت متحرک B را در مبدأ زمان به‌دست می‌آوریم. دقت کنید، در لحظهٔ $t = 10s$، چون شیب خط مماس بر نمودار برابر صفر است، در این لحظه $v = 0$ می‌باشد.



$$a_{av} = \frac{\Delta v}{\Delta t} \xrightarrow[\Delta t = 10s,\ v_{t=10s} = 0]{a_{av} = 0/25\frac{m}{s^2},\ \Delta v = v_{t=10s} - v_0} 0/25 = \frac{0 - v_0}{10}$$

$$\Rightarrow v_0 = -2/5\frac{m}{s}$$

چون تندی دو متحرک در مبدأ زمان یکسان است، بنابراین با استفاده از معادلهٔ حرکت با سرعت ثابت، مکان متحرک A را در لحظهٔ $t = 10s$ به‌دست می‌آوریم:

$$x_A = v_A t + x_{0A} \xrightarrow[t=10s]{x_{0A} = -2m \text{ و } v_A = 2/5\frac{m}{s}}$$

$$x_A = 2/5 \times 10 - 2 \Rightarrow x_A = 23m$$

درنهایت فاصلهٔ دو متحرک برابر است با: $x_A - x_B = 23 - 7 = 16m$

(حرکت بر خط راست) (فیزیک ۳، صفحه‌های ۶ تا ۱۵)

۲۱ - گزینهٔ «۳»

(عباس اعظمی)

روش اول:

با توجه به نمودار، چون تغییر نمودار رو به پایین است، شتاب حرکت منفی است. بنابراین گزینه‌های «۲» و «۴» حذف می‌شوند. از طرف دیگر، چون در لحظهٔ $t=0$، شیب نمودار مکان – زمان منفی است، لذا سرعت اولیه نیز منفی می‌باشد. بنابراین این نمودار مربوط به متحرکی است که با شتاب منفی در خلاف جهت محور x در حرکت است. یعنی گزینهٔ «۳» صحیح است.

روش دوم: چون در لحظهٔ $t=0$، شیب خط مماس بر نمودار منفی است، سرعت اولیهٔ متحرک منفی می‌باشد، لذا متحرک در خلاف جهت محور xها درحال حرکت است. بنابراین گزینه‌های «۱» و «۲» حذف می‌شود.

از طرف دیگر، چون بزرگی شیب خط مماس بر نمودار (سرعت) در حال افزایش است، یعنی تندی متحرک نیز در حال افزایش می‌باشد. لذا حرکت شتاب‌دار تندشونده است. بنابراین، چون در حرکت شتاب‌دار تندشونده، شتاب و سرعت، هم‌علامت‌اند، در این صورت باید جهت بردار شتاب نیز در خلاف جهت محور x باشد. یعنی گزینهٔ «۳» صحیح است.

(فیزیک ۱ و ۲، راهنما) (فیزیک ۳، صفحه‌های ۱۵ تا ۲۶)

---

۲۲ - گزینهٔ «۳»

(احمد علی حیدری)

در بازهٔ زمانی صفر تا t_1 و t_2 تا t_3 شتاب متحرک صفر است. لذا باید سرعت متحرک در این دو بازهٔ زمانی ثابت باشد که در هر سه نمودار، سرعت ثابت می‌باشد. از طرف دیگر، در بازهٔ زمانی t_1 تا t_2 شتاب ثابت و مثبت است. یعنی باید در این بازهٔ زمانی نمودار $v-t$ به‌صورت خط راستی با شیب مثبت رسم شود، که می‌بینیم در هر سه نمودار شیب خط $v-t$ در این بازهٔ زمانی، ثابت و مثبت است. بنابراین چون در سؤال، سرعت اولیهٔ متحرک مشخص نشده است، لذا نمودار شتاب – زمان داده شده می‌تواند مربوط به هر سه نمودار سرعت – زمان باشد.

(فیزیک ۱ و ۲، راهنما) (فیزیک ۳، صفحه‌های ۱۵ تا ۲۶)

---

۲۳ - گزینهٔ «۳»

(رامین زرافشانی اعظمی)

ابتدا با توجه به معادلهٔ مکان – زمان در حرکت با شتاب ثابت، معادلهٔ مکان متحرک را به‌دست می‌آوریم:

$$x=\frac{1}{2}at^2+v_0t+x_0 \xrightarrow[v_0=-1\frac{m}{s},\ x_0=-6m]{a=2\frac{m}{s^2}} x=t^2-t-6$$

اکنون برای محاسبهٔ لحظهٔ تغییر جهت بردار مکان باید در معادلهٔ مکان – زمان مقدار x را برابر صفر قرار دهیم؛ زیرا برای $x>0$، جهت بردار مکان تغییر می‌کند.

$$t^2-t-6=0 \Rightarrow (t+2)(t-3)=0 \begin{cases} t=-2s & \text{غ ق ق} \\ t=3s & \checkmark \end{cases}$$

و در آخر برای تعیین لحظهٔ تغییر جهت بردار سرعت، معادلهٔ سرعت – زمان متحرک را که با شتاب ثابت حرکت می‌کند به‌دست می‌آوریم و v را مساوی صفر قرار می‌دهیم:

$$v=at+v_0 \xrightarrow[v_0=-1\frac{m}{s}]{a=2\frac{m}{s^2}} v=2t-1 \xrightarrow{v=0} t=\frac{1}{2}s$$

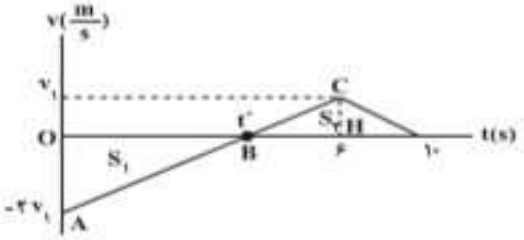
(فیزیک ۱ و ۲، راهنما) (فیزیک ۳، صفحه‌های ۸ تا ۱۳)

۲۴ - گزینهٔ «۴»

(مریم رنجبارزاده)

ابتدا با استفاده از رابطهٔ تندی متوسط مسافت طی شده در بازهٔ زمانی صفر تا $10s$ را می‌یابیم:

$$s_{av}=\frac{\ell}{\Delta t} \Rightarrow 2/5=\frac{\ell}{10} \Rightarrow \ell_{(0\to10)}=25m \ (1)$$



با توجه به نمودار $v-t$، بیشینهٔ تندی متحرک برابر $2v_1$ است. برای یافتن آن باید از سطح زیر نمودار استفاده کنیم. برای یافتن سطح زیر نمودار، به عدد لحظهٔ t' نیاز داریم که با استفاده از تشابه دو مثلث OAB و BHC به‌دست می‌آید:

$$\frac{AO}{HC}=\frac{OB}{HB} \Rightarrow \frac{2v_1}{v_1}=\frac{t'}{6-t'} \Rightarrow \frac{t'}{6-t'}=2 \Rightarrow 12-2t'=t'$$

$$\Rightarrow t'=4s$$

با داشتن t' به‌صورت زیر، v_1 و به دنبال آن $2v_1$ را پیدا می‌کنیم:

$$\ell_{(0\to10)}=\left|\Delta x_{(0\to4)}\right|+\left|\Delta x_{(10\to4)}\right|=S_1+S_2$$

$$\Rightarrow 25=\frac{2v_1\times4}{2}+\frac{v_1\times6}{2} \Rightarrow 7v_1=25 \Rightarrow v_1=5\frac{m}{s}$$

بنابراین بیشینهٔ تندی متحرک در ۱۰ ثانیهٔ اول حرکت، در مبدأ زمان و برابر $2v_1=10\frac{m}{s}$ است.

(فیزیک ۱ و ۲، راهنما) (فیزیک ۳، صفحه‌های ۱۵ تا ۲۱)

---

۲۵ - گزینهٔ «۳»

(عباس اعظمی)

به کمک سطح محصور بین نمودار شتاب – زمان و محور زمان که برابر Δv است، می‌توان سرعت متحرک را در لحظه‌های مختلف محاسبه نمود و سپس نمودار $v-t$ آن را رسم و مدت زمانی که متحرک در جهت منفی محور xها حرکت نموده است را به دست آورد. بنابراین با توجه به این‌که $v_0=-5\frac{m}{s}$ است، داریم:

$$\Delta v_1=2\times5=10\frac{m}{s},\ \Delta v_2=-2\times10=-20\frac{m}{s}$$

Δv_1 تغییر سرعت در بازهٔ زمانی صفر تا $5s$ و Δv_2 تغییر سرعت در بازهٔ زمانی $15s$ تا $25s$ است.

$$v_{5s}=v_{0s}+\Delta v_1 \Rightarrow v_{5s}=-5+10=5\frac{m}{s}$$

$$v_{15s}=v_{5s}=5\frac{m}{s} \quad , \quad v_{25s}=v_{15s}+\Delta v_2$$

$$v_{25s}=5+(-20)=-15\frac{m}{s}$$

اکنون نمودار سرعت – زمان متحرک را رسم می‌کنیم. می‌دانیم در لحظاتی که علامت سرعت متحرک منفی است، متحرک در خلاف جهت محور حرکت کرده است. بنابراین لازم است لحظه‌های t_1 و t_2 را پیدا کنیم. با استفاده از تشابه مثلث‌های ۱ و ۲ داریم:

$$\frac{5}{5}=\frac{t_1}{5-t_1} \Rightarrow t_1=2/5s$$

www.mapedu.ir

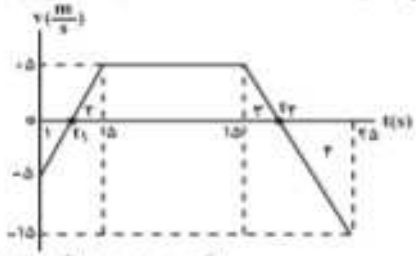
با استفاده از تشابه مثلث‌های ۳ و ۴ داریم:

$$\frac{5}{15}=\frac{t_2-15}{25-t_2}\Rightarrow\frac{1}{3}=\frac{t_2-15}{25-t_2}\Rightarrow 3t_2-45=25-t_2$$

$$\Rightarrow 4t_2=70\Rightarrow t_2=17/5s$$

می‌بینیم متحرک در بازهٔ زمانی صفر تا $2/5s$ و $17/5s$ تا $25s$ در خلاف جهت محور جابه‌جا شده است. بنابراین کل زمانی که متحرک در خلاف جهت محور حرکت کرده است برابر است با:

$$\Delta t=2/5+(25-17/5)=10s$$



(حرکت بر خط راست) (الیمپیک ۳ صفحه‌های ۱۵ تا ۲۴)

---

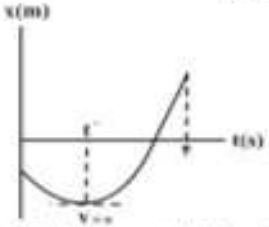
۲۶ - گزینهٔ «۳»

(علیرضا حیدری)

با توجه به نمودار، در ابتدا حرکت کندشونده است، زیرا بزرگی شیب خط مماس بر نمودار (سرعت) در حال کاهش است. بنابراین، ابتدا لحظه‌ای که سرعت متحرک صفر می‌شود را می‌یابیم. چون در لحظهٔ شروع حرکت سرعت منفی و در لحظهٔ $t=4s$ مثبت است، در این‌صورت برای محاسبهٔ شتاب حرکت می‌توان نوشت:

$$\Rightarrow v=at+v_0$$

$$\xrightarrow{v=2|v_0|}2|v_0|=a\times 4+(-|v_0|)\Rightarrow a=\frac{3}{4}|v_0|$$



مدت زمان حرکت کندشونده از لحظهٔ شروع حرکت $(t=0)$ تا لحظهٔ t' است. چون در لحظهٔ t' که متحرک تغییر جهت می‌دهد، $v=0$ است، داریم:

$$v=at'+v_0\Rightarrow 0=\frac{3}{4}|v_0|t'-|v_0|\Rightarrow|v_0|=\frac{3}{4}|v_0|t'$$

$$\Rightarrow t'=\frac{4}{3}s$$

بنابراین، در بازهٔ زمانی صفر تا $\frac{4}{3}s$ که متحرک تغییر جهت می‌دهد، حرکت متحرک به‌صورت کندشونده است.

(حرکت بر خط راست) (الیمپیک ۳ صفحه‌های ۱۴ تا ۱۷)

---

۲۷ - گزینهٔ «۲»

(سید علی میرنوری)

رابطهٔ سرعت - جابه‌جایی را یکبار برای مسیر AB و بار دیگر برای مسیر BC می‌نویسیم و به‌صورت زیر v را می‌یابیم:

$$\begin{cases} AB\Rightarrow v_B^2-v_A^2=2a\overline{AB}\xrightarrow[v_A=6\frac{m}{s}]{v_B=v} v^2-36=2a\overline{AB} \\ BC\Rightarrow v_C^2-v_B^2=2a\overline{BC}\xrightarrow[\overline{BC}=\frac{5}{4}\overline{AB}]{v_C=0,\ v_B=v} 0-v^2=2a\times\frac{5}{4}\overline{AB} \end{cases}$$

$$\Rightarrow\frac{v^2-36}{-v^2}=\frac{2a\overline{AB}}{2a\times\frac{5}{4}\overline{AB}}\Rightarrow\frac{v^2-36}{-v^2}=\frac{4}{5}$$

$$\Rightarrow 5v^2-5\times 36=-4v^2\Rightarrow 9v^2=5\times 36$$

$$\Rightarrow v^2=5\times 4\Rightarrow v=2\sqrt{5}\frac{m}{s}$$

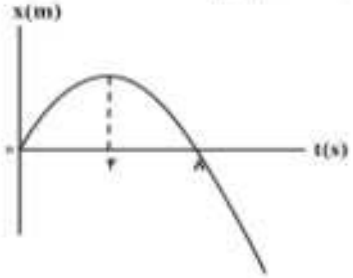
(حرکت بر خط راست) (الیمپیک ۳ صفحه‌های ۱۶ تا ۲۹)

---

۲۸ - گزینهٔ «۱»

(امیرحسین بهادران)

نمودار مکان - زمان و سرعت - زمان متحرک را رسم می‌کنیم. از آن‌جا که بزرگی سرعت متوسط متحرک در ۸ ثانیهٔ اول حرکت برابر صفر است، بنابراین، جابه‌جایی متحرک در این بازهٔ زمانی صفر می‌باشد. به عبارت دیگر، چون متحرک در لحظهٔ $t=0$ در مبدأ مکان بوده است، در لحظهٔ $t=8s$ از مبدأ مکان عبور می‌کند. بنابراین با توجه به نمودار مکان - زمان که به‌صورت سهمی است، جهت حرکت متحرک در لحظهٔ $t=4s$ تغییر می‌کند.



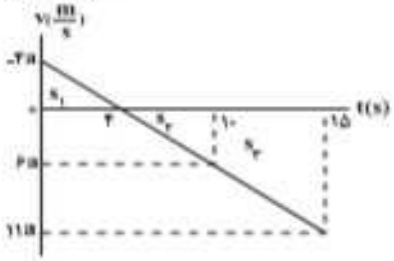
$$v_{av}=\frac{\Delta x}{\Delta t}\xrightarrow[\Delta t=8s]{v_{av}=0}v_{av}=\frac{0}{8}\Rightarrow\Delta x=0$$

$$\Rightarrow\Delta x=x_{t=8s}-x_0\xrightarrow{x_0=0}x_{t=8s}=0$$

اکنون با توجه به رابطهٔ سرعت - زمان در حرکت با شتاب ثابت، از روی نمودار سرعت - زمان، سرعت متحرک را در لحظات $t_1=10s$ و $t_2=15s$، به‌دست می‌آوریم:

$$v=at+v_0\xrightarrow[v=0]{t=4s}v_0=-4a\Rightarrow v=at-4a$$

$$\xrightarrow[t_2=15s]{t_1=10s}\begin{cases}v_1=6a\\ v_2=11a\end{cases}$$



اکنون با توجه به رابطهٔ تندی متوسط داریم:

$$s_{av}=\frac{\ell}{\Delta t}$$

$$\xrightarrow[s_1=|\frac{-4a\times 4}{2}|=8|a|,\ s_2=|\frac{6a\times 6}{2}|=18|a|]{\ell=s_1+s_2,\ \Delta t_1=10s}s_{av}=\frac{26|a|}{10}=\frac{13}{5}|a|\ (s)$$

www.mapedu.ir

$$s'_{av} = \frac{l'}{\Delta t'} = \frac{l'=s_2 \ , \ \Delta t'=5s}{s_2=\left|\frac{(11a+6a)}{2}\times 5\right|} \rightarrow s'_{av} = \frac{\left|\frac{17}{2}a\right|\times 5}{5} = \frac{17}{2}|a| \ (**)$$

$$(*),(**) \Rightarrow \frac{s_{av}}{s'_{av}} = \frac{\frac{13}{5}|a|}{\frac{17}{2}|a|} = \frac{26}{85}$$

(حرکت بر خط راست) (فیزیک ۳، صفحه‌های ۱۴ تا ۲۶)

---

۲۹ - گزینهٔ «۲» (امیرحسین مظفری)

ابتدا با استفاده از معادلهٔ مستقل از شتاب، سرعت اولیه را می‌یابیم:

$$\frac{\Delta x}{\Delta t} = \frac{v_2+v_0}{2} \xrightarrow[\Delta t=3-0=3s]{\Delta x=-9-0=-9m \ , \ v_2=0} \frac{-9}{3} = \frac{0+v_0}{2}$$

$$\Rightarrow v_0 = -6\frac{m}{s}$$

اکنون شتاب متحرک را پیدا می‌کنیم:

$$v = at + v_0 \Rightarrow 0 = a\times 3 + (-6) \Rightarrow a = 2\frac{m}{s^2}$$

بنابراین معادلهٔ سرعت – زمان متحرک برابر است با:

$$v = at + v_0 \Rightarrow v = 2t - 6$$

(حرکت بر خط راست) (فیزیک ۳، صفحه‌های ۱۵ تا ۲۱)

---

۳۰ - گزینهٔ «۴» (احمد اردم)

می‌دانیم در حرکت با شتاب ثابت و بدون سرعت اولیه، جابه‌جایی متحرک در زمان‌های مساوی و متوالی متناسب با اعداد فرد متوالی است. بنابراین ابتدا شتاب متحرک را می‌یابیم:

۵ ثانیهٔ اول	۵ ثانیهٔ دوم	۵ ثانیهٔ سوم
Δx_1	$\Delta x_2 = 3\Delta x_1$	$\Delta x_3 = 5\Delta x_1$

$$\Delta x_3 = 5\Delta x_1 \xrightarrow{\Delta x_3=75m} \Delta x_1 = 15m$$

طبق رابطه:

$$\Delta x_1 = \frac{1}{2}at^2 + v_0 t \xrightarrow[\Delta x_1=15m]{v_0=0}$$

$$15 = \frac{1}{2}\times a\times 5^2 + 0 \Rightarrow a = \frac{30}{25} = \frac{6}{5}\frac{m}{s^2}$$

اکنون سرعت در لحظهٔ $t_1 = 18s$ و $t_2 = 22s$ (همان بازهٔ زمانی ۴ ثانیهٔ چهارم) را حساب می‌کنیم و با توجه به رابطهٔ $v_{av} = \frac{v_1+v_2}{2}$ در حرکت با شتاب ثابت سرعت متوسط در ۴ ثانیهٔ چهارم را به‌دست می‌آوریم:

$$v = at + v_0 \Rightarrow \begin{cases} v_{18} = \frac{6}{5}\times 18 + 0 = 21/6\frac{m}{s} \\ v_{22} = \frac{6}{5}\times 22 + 0 = 28/8\frac{m}{s} \end{cases}$$

$$v_{av} = \frac{v_{18}+v_{22}}{2} \Rightarrow v_{av} = \frac{21/6+28/8}{2} = 25/2\frac{m}{s}$$

(حرکت بر خط راست) (فیزیک ۳، صفحه‌های ۱۵ تا ۲۱)

---

۳۱ - گزینهٔ «۳» (امیرحسین بدرالدین)

با توجه به رابطهٔ سرعت متوسط، ابتدا سرعت در لحظهٔ $t = 8s$ را می‌نماییم و سپس شتاب حرکت آن را به‌دست می‌آوریم:

$$v_{av} = \frac{v_1+v_2}{2} \xrightarrow[v_{av}=1\frac{m}{s}]{v_1=-1\frac{m}{s}} 1 = \frac{-1+v_2}{2} \Rightarrow v_2 = 3\frac{m}{s}$$

$$v_2 = at + v_1 \xrightarrow[t_2=8s]{v_2=3\frac{m}{s} \ , \ v_1=-1\frac{m}{s}} 3 = a\times 8 - 1 \Rightarrow a = \frac{1}{2}\frac{m}{s^2}$$

اکنون با استفاده از رابطهٔ مستقل از زمان در حرکت با شتاب ثابت، داریم:

$$v^2 - v_0^2 = 2a\Delta x \xrightarrow[v_0=-1\frac{m}{s} \ , \ a=\frac{1}{2}\frac{m}{s^2}]{\Delta x=7-(-8)=15m}$$

$$v^2 - (-1)^2 = 2\times\frac{1}{2}\times 15 \Rightarrow v^2 = 16 \Rightarrow v = 4\frac{m}{s}$$

(حرکت بر خط راست) (فیزیک ۳، صفحه‌های ۱۵ تا ۲۱)

---

۳۲ - گزینهٔ «۱» (سیدرادمان فاطمی)

ابتدا با مقایسهٔ معادلهٔ مکان – زمان داده شده با معادلهٔ مکان – زمان در حرکت با شتاب ثابت در مسیری مستقیم، معادلهٔ سرعت – زمان حرکت متحرک را می‌نویسیم و سرعت در لحظه‌های $t = 3s$ و $t = 7s$ را می‌یابیم:

$$\begin{cases} x = \frac{1}{2}at^2 + v_0 t + x_0 \\ x = t^2 - 3t + 4 \end{cases} \Rightarrow a = 2\frac{m}{s^2} \ , \ v_0 = -3\frac{m}{s} \ , \ x_0 = 4m$$

$$\Rightarrow v = at + v_0 \Rightarrow v = 2t - 3 \Rightarrow \begin{cases} t = 3s \Rightarrow v_3 = 2\times 3 - 3 = 3\frac{m}{s} \\ t = 7s \Rightarrow v_7 = 2\times 7 - 3 = 11\frac{m}{s} \end{cases}$$

با استفاده از تعریف سرعت متوسط در حرکت با شتاب ثابت بر مسیر مستقیم، برای بازهٔ زمانی $t = 3s$ تا $t = 7s$، داریم:

$$v_{av} = \frac{v_3+v_7}{2} = \frac{3+11}{2} = 7\frac{m}{s}$$

$$v = v_{av} \Rightarrow 2t - 3 = 7 \Rightarrow t = 5s$$

(حرکت بر خط راست) (فیزیک ۳، صفحه‌های ۱۵ تا ۲۱)

---

۳۳ - گزینهٔ «۱» (سید علی میرنوری)

در ابتدا، با توجه به اینکه در همهٔ نمودارها، جابه‌جایی در مدت ۲ ثانیه برابر ۱۰ متر است، v_0 را می‌یابیم:

برای نمودارهای «۱» و «۲» که شتابشان منفی است، داریم:

$$\Delta x = \frac{1}{2}at^2 + v_0 t \Rightarrow 10 = \frac{1}{2}(-1)(2)^2 + v_0(2) \Rightarrow v_0 = 6\frac{m}{s}$$

$$v = at + v_0 \Rightarrow v = (-1)(2) + 6 \Rightarrow v = +4\frac{m}{s}$$

تا اینجا فقط گزینهٔ «۱» درست است، زیرا در شکل گزینهٔ «۲» $v_2 < 0$ است. اکنون برای نمودارهای گزینهٔ «۳» و گزینهٔ «۴» که شتابشان مثبت است، داریم:

$$\Delta x = \frac{1}{2}at^2 + v_0 t \Rightarrow 10 = \frac{1}{2}(1)(2)^2 + 2v_0 \Rightarrow v_0 = 4\frac{m}{s}$$

$$v = at + v_0 \Rightarrow v_2 = (1)(2) + 2 = 4\frac{m}{s} \neq 2\frac{m}{s}$$

برای شکل‌های گزینهٔ «۳» و گزینهٔ «۴» که $a > 0$ است، $v_{2s} = 4\frac{m}{s}$ می‌شود.

(مرکات بر خط راست) (فیزیک ۳، صفحه‌های ۱۵ تا ۲۱)

---

۳۴ - گزینهٔ «۱»

(امیرحسین دانم‌فاری)

گزینهٔ «۱»: نادرست؛ برای تغییر جهت بردار مکان بایستی ریشهٔ ساده معادلهٔ مکان را محاسبه کنیم. اگر برای t دو عدد مثبت به دست آید، یعنی دو بار تغییر جهت می‌دهد و اگر یک عدد مثبت به‌دست آید، یعنی یک بار تغییر جهت می‌دهد و اگر هر دو جواب منفی باشند، تغییر جهت نمی‌دهد.

$$x = 0 \Rightarrow 2t^2 - At - 25 = 0 \Rightarrow t = \frac{A \pm \sqrt{264}}{2} \begin{cases} \frac{2+\sqrt{66}}{2}\,s & \text{ق.ق} \\ \frac{2-\sqrt{66}}{2}\,s & \text{غ.ق.ق} \end{cases}$$

چون یک جواب مثبت به‌دست آمده است، متحرک یک‌بار تغییر جهت می‌دهد.

گزینهٔ «۲»: درست؛ چون $a > 0$ و $v_0 < 0$ است، در ابتدا حرکت کندشونده و سپس، از لحظهٔ تغییر جهت $(t = 2s)$ حرکت تندشونده است. بنابراین متحرک ابتدا کندشونده و سپس تندشونده حرکت کرده است.

گزینهٔ «۳»: درست؛ در لحظهٔ تغییر جهت حرکت باید سرعت برابر صفر باشد و ریشهٔ آن مضاعف نباشد.

$$v = 0 \xrightarrow{v = 4t - A} t = 2s$$

گزینهٔ «۴»: درست؛ ابتدا متحرک به سمت $2s$ در سوی مخالف محور x حرکت می‌کند، سپس در لحظهٔ $t = 2s$ تغییر جهت می‌دهد و در سوی مثبت محور x ادامه مسیر می‌دهد. بنابراین برای لحظه‌های $t > 2s$ از جمله $t_1 = 2s$ تا $t_2 = 7s$ در سوی مثبت محور حرکت می‌کند.

(مرکات بر خط راست) (فیزیک ۳، صفحه‌های ۱۵ تا ۲۱)

---

۳۵ - گزینهٔ «۴»

(حامی صفری)

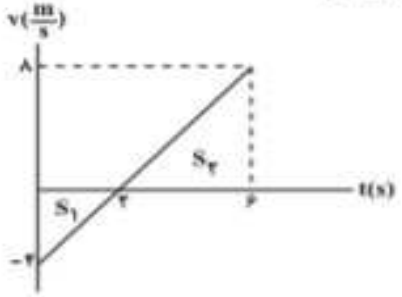
با توجه به معادلهٔ مکان، شتاب حرکت و سرعت اولیه آن مشخص است. بنابراین، ابتدا معادلهٔ سرعت را به‌دست می‌آوریم و نمودار سرعت – زمان آن را رسم می‌کنیم.

$$\begin{matrix} x = t^2 - 4t + 10 \\ x = \frac{1}{2}at^2 + v_0 t + x_0 \end{matrix} \Rightarrow \begin{cases} \frac{1}{2}a = 1 \Rightarrow a = 2\frac{m}{s^2} \\ v_0 = -4\frac{m}{s} \end{cases}$$

حال معادلهٔ سرعت – زمان متحرک را می‌نویسیم.

$$v = at + v_0 \Rightarrow v = 2t - 4$$

اکنون، به کمک سطح محصور بین نمودار سرعت – زمان و محور زمان، جابه‌جایی و مسافت متحرک را می‌یابیم.



بنابراین داریم:

$$\Delta x = S_1 + S_2 = \left(\frac{-4 \times 2}{2}\right) + \left(\frac{4 \times 8}{2}\right)$$

$$\Rightarrow \Delta x = -4 + 16 = 12m$$

$$\ell = |S_1| + |S_2| = |-4| + 16 = 20m$$

$$\frac{\ell}{\Delta x} = \frac{20}{12} = \frac{5}{3}$$

(مرکات بر خط راست) (فیزیک ۳، صفحه‌های ۱۵ تا ۲۲)

---

۳۶ - گزینهٔ «۲»

(امیرعلی دانم‌فاری)

چون حرکت با شتاب ثابت است، نمودار سهمی است و معادلهٔ حرکت با شتاب ثابت به‌صورت مقابل است:

$$x = \frac{1}{2}at^2 + v_0 t + x_0$$

در لحظهٔ $t = 0$ متحرک در $x = 27m$ قرار دارد، لذا $x_0 = 27m$ است. از طرف دیگر، در لحظهٔ $t = 4s$ شیب خط مماس بر نمودار برابر صفر است، بنابراین سرعت متحرک در این لحظه برابر صفر است. در این صورت داریم:

$$v = at + v_0 \Rightarrow 4a + v_0 = 0 \Rightarrow v_0 = -4a \quad (1)$$

مکان متحرک در لحظهٔ $t = 4s$ برابر $x = 75m$ است، بنابراین، داریم:

$$75 = \frac{1}{2}a \times 16 + v_0 \times 4 + 27 \Rightarrow 75 = 8a + 4v_0 + 27 \Rightarrow 2a + v_0 = 12 \quad (2)$$

با حل دو معادله و دو مجهول (۱) و (۲) داریم:

$$a = -6\frac{m}{s^2},\ v_0 = 24\frac{m}{s} \Rightarrow x = -3t^2 + 24t + 27$$

برای محاسبهٔ تندی متوسط در ۳ ثانیهٔ دوم (بین $3s$ تا $6s$) بایستی مسافت طی شده را محاسبه کنیم و با توجه به این‌که $t = 4s$ لحظهٔ تغییر جهت است، داریم:

$$\begin{cases} t = 3s \Rightarrow x_3 = -3 \times 9 + 24 \times 3 + 27 = 72m \\ t = 4s \Rightarrow x_4 = -3 \times 16 + 24 \times 4 + 27 = 75m \\ t = 6s \Rightarrow x_6 = -3 \times 36 + 24 \times 6 + 27 = 63m \end{cases}$$

$$\Rightarrow \ell = |\Delta x_1| + |\Delta x_2| = 15m$$

$$s_{av} = \frac{\ell}{\Delta t} = \frac{15}{3} = 5\frac{m}{s}$$

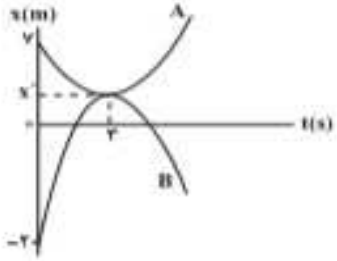
(مرکات بر خط راست) (فیزیک ۳، صفحه‌های ۱۵ تا ۲۲)

---

۳۷ - گزینهٔ «۳»

(امیرحسین برادران)

چون دو متحرک در لحظهٔ $t = 3s$ تغییر جهت می‌دهند، حرکت هر دو از ابتدا تا لحظهٔ $t = 3s$ کندشونده است. بنابراین شتاب متحرک A مثبت و شتاب متحرک B منفی و نمودار مکان – زمان دو متحرک مطابق شکل زیر است. بنابراین، برای سهولت در حل مسئله فرض می‌کنیم، $t = 3s$ مبدأ زمان باشد و در این لحظه $v_0 = 0$ است. در این صورت با استفاده از رابطهٔ مکان – زمان در حرکت با شتاب ثابت داریم:



$$\Delta x = \frac{1}{2}at^2 + v_0 t \xrightarrow[v_0=0,\ t=2s]{a_B=-a_A} \begin{cases} 7 - x' = \frac{1}{2}a_A \times 3^2 \\ -20 - x' = -\frac{1}{2}a_A \times 3^2 \end{cases}$$

$$\Rightarrow 27 = a_A \times 9 \Rightarrow a_A = 3\frac{m}{s^2} \Rightarrow a_B = -3\frac{m}{s^2}$$

اکنون فاصلهٔ دو متحرک را در لحظهٔ $t = 5s$ (دو ثانیه پس از رسیدن دو متحرک به یکدیگر) به‌دست می‌آوریم:

$$x'_A - x' = \frac{1}{2} \times 3 \times 5^2$$
$$x'_B - x' = -\frac{1}{2} \times 3 \times 5^2 \Rightarrow x'_A - x'_B = 3 \times 5^2 = 75m$$

(حرکت بر خط راست) (فیزیک ۳، صفحه‌های ۱۵ تا ۲۱)

---

۳۸ - گزینهٔ «۱» (سید ابوالفضل علائی)

حرکت متحرک را به‌صورت معکوس در نظر می‌گیریم. یعنی فرض می‌کنیم متحرک از حال سکون حرکت نموده و در ثانیهٔ اول حرکت Δx_1 و در دو ثانیهٔ آخر Δx_2 جابه‌جا شده است. بنابراین داریم:

ابتدا شتاب را می‌یابیم:

$$\Delta x_2 = 20\Delta x_1 \xrightarrow[\Delta x_1 = \frac{1}{2}at^2]{\Delta x_2 = \frac{v_1+v_2}{2} \times \Delta t_2} \frac{v' + 30}{2}(2) = 20 \times \frac{1}{2}a(1)^2$$

$$\Rightarrow v' + 30 = 10a \quad (1)$$
$$30 = a(2) + v' \Rightarrow v' = 30 - 2a \quad (2)$$

$$(1),(2) \quad 30 - 2a + 30 = 10a \Rightarrow 12a = 60 \Rightarrow a = 5\frac{m}{s^2}$$

اکنون جابه‌جایی را می‌یابیم:

$$v^2 - v_0^2 = 2a\Delta x \Rightarrow 30^2 - 0 = 2(5)(\Delta x) \Rightarrow \Delta x = 90m$$
$$\ell = \Delta x = 90m$$

چون متحرک تغییر جهت نمی‌دهد، مسافت طی‌شده برابر بزرگی جابه‌جایی است.

(حرکت بر خط راست) (فیزیک ۳، صفحه‌های ۱۵ تا ۲۱)

---

۳۹ - گزینهٔ «۱» (امیرحسین بابائی)

ابتدا شتاب متحرک را بعد از لحظهٔ t' به‌دست می‌آوریم:

$$a = \frac{\Delta v}{\Delta t} \xrightarrow[\Delta t = 32 - 12 = 4s]{\Delta v = 5 - 0} a = \frac{5}{4}\frac{m}{s^2}$$

اکنون شتاب متحرک را در t' ثانیهٔ اول حرکت به‌دست می‌آوریم:

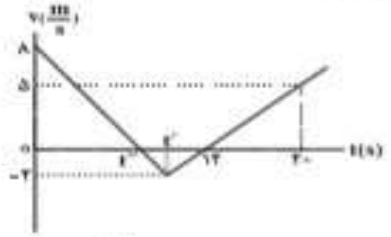
$$|a'| = 2|a| \xrightarrow[\Delta v' = 2 - 8 = -10\frac{m}{s}]{a' < 0,\ a' = \frac{\Delta v'}{\Delta t'},\ \Delta t' = t' - 0 = t'} \frac{-10}{t'} = 2 \times \left(\frac{-5}{4}\right)$$

$$\Rightarrow t' = 4s$$

اکنون لحظه‌ای را که تندی متحرک قبل از لحظهٔ t'' صفر می‌شود، به‌دست می‌آوریم. به همین منظور از تشابه دو مثلث استفاده می‌کنیم:

$$\frac{2}{t' - t''} = \frac{4}{t''} \xrightarrow{t' = 4s} t'' = \frac{32}{5}s$$

متحرک در بازهٔ زمانی $\frac{32}{5}s$ تا $12s$ در خلاف جهت محور xها در حال حرکت است. با توجه به اینکه مساحت سطح محصور بین نمودار سرعت - زمان و محور زمان برابر جابه‌جایی است، داریم:



$$\ell = |\Delta x| = s = \frac{2 \times (12 - \frac{32}{5})}{2} = \frac{28}{5}m$$

دقت کنید چون در بازهٔ زمانی $\frac{32}{5}s$ تا $12s$، تغییر جهت وجود ندارد، مسافت با بزرگی جابه‌جایی برابر است.

(حرکت بر خط راست) (فیزیک ۳، صفحه‌های ۱۵ تا ۲۱)

---

۴۰ - گزینهٔ «۴» (امیرحسین بابائی)

با استفاده از رابطهٔ سرعت متوسط در حرکت با شتاب ثابت، جابه‌جایی متحرک را در بازه‌های زمانی یکسان و متوالی (T) به‌دست می‌آوریم:

$$\frac{v_2 + v_3}{2} = \frac{\Delta x'}{T} \xrightarrow{v_2 = v_1 + aT,\ v_3 = v_2 + aT} \frac{(v_1 + aT) + (v_2 + aT)}{2} = \frac{\Delta x'}{T}$$

$$\Rightarrow \left(\frac{v_1 + v_2}{2}\right)T + aT^2 = \Delta x'$$

$$\xrightarrow{\left(\frac{v_1+v_2}{2}\right)T = \Delta x} \Delta x' = \Delta x + aT^2 \Rightarrow \Delta x_n = \Delta x + naT^2$$

در این سؤال $T = 2s$ و $n = \frac{20}{2} = 5$، بنابراین داریم:

$$52 = 12 + 5aT^2 \Rightarrow aT^2 = 8m$$

$$\overline{AB} = \Delta x + (\Delta x + aT^2) + (\Delta x + 2aT^2) + \dots + (\Delta x + 5aT^2)$$

$$= 6\Delta x + aT^2(1 + 2 + \dots + 5) \xrightarrow[aT^2 = 8m]{\Delta x = 12m} \overline{AB} = 6 \times 12 + 8 \times 15$$

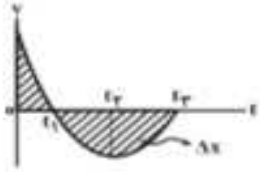
$$= 192m$$

(حرکت بر خط راست) (فیزیک ۳، صفحه‌های ۱۵ تا ۲۱)

www.mapedu.ir

۴۱ – گزینهٔ «۳» (رضا آقامحمدی)

بررسی موارد:



الف) می‌دانیم در نمودار سرعت – زمان، شیب خط مماس بر نمودار برابر شتاب متحرک در آن لحظه است. با توجه به این نکته، در بازه t_1 تا t_2 شتاب منفی و در بازه t_2 تا t_3 شتاب مثبت است. (نادرست)

ب) در بازهٔ صفر تا t_1 تندی (بزرگی سرعت) در حال کاهش و در بازه t_1 تا t_2 تندی در حال افزایش است. (نادرست)

پ) می‌دانیم در نمودار سرعت زمان شیب خط واصل بین دو نقطه از نمودار برابر شتاب متوسط است. در این‌جا با توجه به تقارن سهمی، بزرگی شتاب متوسط در بازه زمانی t_1 تا t_2 برابر با بزرگی شتاب متوسط در بازه زمانی t_2 تا t_3 است. ولی با توجه به تفاوت علامت شیب خط واصل، علامت شتاب متوسط در بازهٔ زمانی t_1 تا t_2 منفی و در بازه زمانی t_2 تا t_3 مثبت است. بنابراین، با توجه به این‌که شتاب متوسط کمیت برداری است، این دو بردار با هم مساوی نیستند. (نادرست)

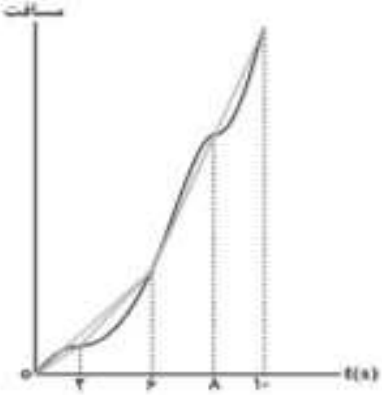
ت) در نمودار سرعت – زمان، مساحت زیر نمودار برابر جابه‌جایی است. چون در بازهٔ زمانی t_1 تا t_2 مساحت زیرنمودار منفی است $(\Delta x < 0)$، بنابراین، طبق رابطهٔ $v_{av} = \frac{\Delta x}{\Delta t}$، سرعت متوسط متحرک منفی می‌باشد. (درست)

(مکث بر نقطه راست) (فیزیک ۳، صفحه‌های ۳۰ و ۳۱)

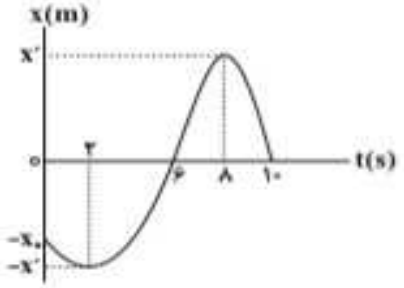
---

۴۲ – گزینهٔ «۳» (امیرحسین باران)

راه حل اول: شیب خط در نمودار مسافت – زمان برابر با تندی متوسط است. با توجه به نمودار مکان – زمان، بخش‌هایی از نمودار که متحرک در خلاف جهت محور x ها حرکت می‌کند را نسبت به محور افقی قرینه می‌کنیم تا یک نمودار صعودی به‌دست آید (ویژگی نمودار مسافت – زمان). سپس با توجه به نمودار زیر و مقایسهٔ شیب خط در بازه‌های زمانی مختلف، در می‌یابیم شیب خط در بازهٔ زمانی ۶ ثانیه تا ۱۰ ثانیه بزرگ‌تر از گزینه‌های دیگر است.



راه حل دوم: به روش جبری نیز می‌توانید تندی متوسط متحرک را در بازه‌های زمانی مختلف مقایسه کنید.



گزینهٔ «۱»: $s_{av} = \frac{x'}{2}$ ۲s تا ۶s

گزینهٔ «۲»: $s_{av} = \frac{x' - x_0}{2}$ صفر تا ۲s

گزینهٔ «۳»: $s_{av} = \frac{x'}{2}$ ۶s تا ۱۰s

گزینهٔ «۴»: $s_{av} = \frac{2x' - x_0}{6}$ صفر تا ۶s

با توجه به گزینه‌ها، تندی متوسط متحرک در بازهٔ ۶s تا ۱۰s از بقیه بزرگ‌تر است.

(مکث بر نقطه راست) (فیزیک ۳، صفحه‌های ۳۰ و ۳۱)

---

۴۳ – گزینهٔ «۲» (علامرضا نمی)

حل: ابتدا به کمک رابطهٔ مربوط به محاسبهٔ شتاب متوسط $\vec{v}_{20} - \vec{v}_{10}$ را می‌یابیم:

$$\vec{a}_{av} = \frac{\Delta \vec{v}}{\Delta t} \xrightarrow[t_1 = 0,\ t_2 = 10]{\vec{a}_{av} = -10\vec{i}\,\frac{m}{s^2}} -10\vec{i} = \frac{\vec{v}_{10} - \vec{v}_0}{10 - 0}$$

$$\vec{v}_{10} - \vec{v}_0 = -100\vec{i}\,(\frac{m}{s})\ (1)$$

$$\vec{a}_{av} = \frac{\Delta \vec{v}}{\Delta t} \xrightarrow[t_1 = 0,\ t_2 = 20]{\vec{a}_{av} = -4\vec{i}\,\frac{m}{s^2}} -4\vec{i} = \frac{\vec{v}_{20} - \vec{v}_0}{20 - 0}$$

$$\Rightarrow \vec{v}_{20} - \vec{v}_0 = -80\vec{i}\,(\frac{m}{s})\ (2)$$

از تفریق رابطه‌های (۱) و (۲) داریم:

$$\vec{v}_{20} - \vec{v}_{10} = -80\vec{i} - (-100\vec{i}) = 20\vec{i}\,(\frac{m}{s})$$

بنابراین، شتاب متوسط در ۱۰ ثانیهٔ دوم برابر است با:

$$\vec{a}_{av} = \frac{\vec{v}_{20} - \vec{v}_{10}}{20 - 10} = \frac{20\vec{i}}{10} = 2\vec{i}\,(\frac{m}{s^2}) \Rightarrow |\vec{a}_{av}| = 2\frac{m}{s^2}$$

(مکث بر نقطه راست) (فیزیک ۳، صفحه‌های ۳۰ و ۳۱)

---

۴۴ – گزینهٔ «۱» (علی ایرانشاهی)

چون متحرک A نسبت به متحرک B، در مدت زمان یکسان مسافت بیشتری طی کرده است تا به نقطهٔ O برسد، اندازهٔ سرعت آن بیشتر است و متحرک سریع‌تر محسوب می‌شود.

بنابراین با استفاده از رابطهٔ جابه‌جایی در حرکت با سرعت ثابت، ابتدا مدت زمانی که متحرک A (تندتر) از نقطهٔ A به O می‌رسد را می‌یابیم:

www.mapedu.ir

$$\Delta x = v\Delta t \Rightarrow \left.\begin{matrix} 0/2AB = v_A \times 3 \\ 0/8AB = v_A \times t_1 \end{matrix}\right\} \Rightarrow \frac{0/2AB}{0/8AB} = \frac{v_A \times 3}{v_A \times t} \Rightarrow t = 12s$$

این ۱۲ ثانیه مدت زمان حرکت متحرک تندتر (A) از A تا O است.

از آنجایی‌که هر دو متحرک همزمان شروع به حرکت کرده‌اند و در نقطهٔ O به‌هم رسیده‌اند، لذا، متحرک کندتر (B) در همان مدت ۱۲ ثانیه از نقطهٔ B تا نقطهٔ O را طی می‌کند. پس:

$$\begin{cases} 0/2AB = v_B \times 12 \\ 0/8AB = v_B \times t_2 \end{cases} \Rightarrow \frac{0/2AB}{0/8AB} = \frac{v_B \times 12s}{v_B \times t_2} \Rightarrow t = 48s$$

بنابراین ۴۸ ثانیه طول می‌کشد تا متحرک B از نقطهٔ O به نقطهٔ A برسد.

(مکث بر ۵۵ راست) (فیزیک ۳، صفحه‌های ۳۳ تا ۵۵)

---

۴۵ – گزینهٔ «۳» (امیر اعزی)

ابتدا با توجه به نمودار مکان – زمان‌های داده شده، معادلهٔ مکان – زمان هر کدام را می‌نویسیم. چون نمودارها به‌صورت خط راست است، هر دو متحرک با سرعت ثابت حرکت می‌کنند. بنابراین داریم:

$$v_B = \frac{\Delta x_B}{\Delta t} \xrightarrow[\Delta x_B = -25 - 25m]{\Delta t = 15s} v_B = \frac{-50}{15} = -3\frac{m}{s}$$

$$x_B = v_B t + x_{0B} \xrightarrow{x_{0B} = 25m} x_B = -3t + 25$$

از طرف دیگر، چون دو متحرک در مکان $x = 15$ به هم رسیده‌اند، زمان این لحظه را می‌یابیم:

$$x_B = -3t + 25 \Rightarrow 15 = -3t + 25 \Rightarrow t = 10s$$

بنابراین مطابق نمودار، در لحظهٔ $t = 10s$، متحرک A در مکان $x = 15m$ است. پس، سرعت متحرک A و به دنبال آن، معادلهٔ حرکتش را پیدا می‌کنیم:

$$x_A = v_A t + x_{0A} \xrightarrow[x_{0A} = -25m]{x_A = 15m,\ t = 10s} 15 = v_A \times 10 - 25$$

$$\Rightarrow v_A = 4\frac{m}{s}$$

$$\Rightarrow x_A = 4t - 25$$

با توجه به این‌که باید فاصلهٔ دو متحرک کمتر از $20m$ باشد، می‌توان نوشت:

$$|x_B - x_A| \le 20m \Rightarrow \begin{cases} -3t + 25 - 4t + 25 \le 20 \\ 4t - 25 + 3t - 25 \le 20 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} -7t + 70 \le 20 \\ 7t - 70 \le 20 \end{cases}$$

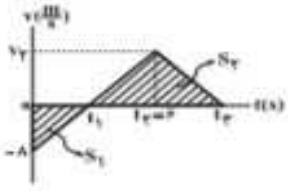
$$\Rightarrow \begin{cases} 50 \le 7t \\ 90 \ge 7t \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} t \ge \frac{50}{7}s \\ t \le \frac{90}{7}s \end{cases} \Rightarrow \frac{50}{7}s \le t \le \frac{90}{7}s$$

می‌بینیم در بازهٔ زمانی $\frac{50}{7}s$ تا $\frac{90}{7}s$، یعنی به‌مدت $\frac{40}{7}s$ در فاصلهٔ کمتر از $20m$ نسبت به هم قرار دارند.

(مکث بر ۵۵ راست) (فیزیک ۳، صفحه‌های ۳۳ تا ۵۵)

---

۴۶ – گزینهٔ «۱» (زهره آقامحمدی)



می‌دانیم در نمودار سرعت زمان مساحت محصور بین نمودار و محور زمان برابر جابه‌جایی است. بنابراین، با استفاده از جابه‌جایی در بازهٔ زمانی $t = 0$ تا t_1 لحظهٔ t_1 را می‌یابیم:

$$|\Delta x| = S_1 \Rightarrow 9/6 = \frac{8 \times t_1}{2} \Rightarrow t_1 = 2/4s$$

از طرفی با توجه به ثابت بودن شیب نمودار از لحظهٔ صفر تا t_2، که معرف شتاب متحرک است، شتاب متحرک در این بازه ثابت است. بنابراین، با استفاده از رابطهٔ حرکت با شتاب ثابت، v_2 را می‌یابیم:

$$a = \frac{\Delta v}{\Delta t} \Rightarrow \frac{v_1 - v_0}{t_1 - 0} = \frac{v_2 - v_1}{t_2 - t_1} \xrightarrow[t_1 = 2/4s,\ t_2 = 6s]{v_0 = -8\frac{m}{s},\ v_1 =}$$

$$\frac{0 + 8}{2/4} = \frac{v_2 - 0}{6 - 2/4} \Rightarrow v_2 = 12\frac{m}{s}$$

اکنون با توجه به تعریف سرعت متوسط، برای بازهٔ زمانی t_1 تا t_3 داریم:

$$v_{av(t_2 - t_1)} = \frac{\Delta x}{\Delta t} = \frac{x_2}{t_2 - t_1} \Rightarrow v_{av} = \frac{\frac{v_2}{2}(t_2 - t_1)}{t_2 - t_1} = \frac{12}{2} = 6\frac{m}{s}$$

(مکث بر ۵۵ راست) (فیزیک ۳، صفحه‌های ۵۱ تا ۶۱)

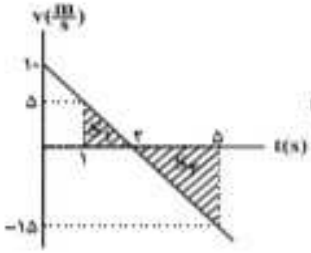
---

۴۷ – گزینهٔ «۳» (حسامین اعظری)

ابتدا شتاب حرکت این متحرک را محاسبه می‌کنیم. سرعت در لحظهٔ $t_0 = 0$ برابر $10\frac{m}{s}$ و در لحظهٔ $t = 2s$ که شیب خط مماس بر نمودار، صفر می‌باشد برابر صفر است. بنابراین داریم:

$$v = at + v_0 \Rightarrow 0 = 2a + 10 \Rightarrow a = -5\frac{m}{s^2}$$

اکنون معادلهٔ سرعت زمان را می‌نویسیم و با استفاده از آن سرعت متحرک را در لحظات $t_1 = 1s$ و $t_2 = 5s$ محاسبه نموده و سپس نمودار $v - t$ را رسم می‌کنیم و جابه‌جایی متحرک را که برابر اندازهٔ مساحت سطح محصور بین نمودار $v - t$ و محور زمان است، به‌دست می‌آوریم:



$$t_1 = 1s \Rightarrow v_1 = -5 + 10 = 5\frac{m}{s}$$

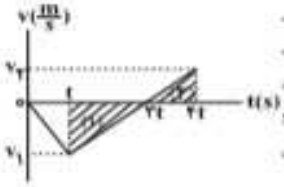
$$t_2 = 5s \Rightarrow v_2 = -25 + 10 = -15\frac{m}{s}$$

$$\text{مسافت} = \ell = |S_1| + |S_2| \Rightarrow \left|\frac{1}{2} \times 1 \times 5\right| + \left|\frac{1}{2} \times 3 \times (-15)\right| \Rightarrow \ell = 25m$$

(مکث بر ۵۵ راست) (فیزیک ۳، صفحه‌های ۵۱ تا ۶۱)

---

۴۸ – گزینهٔ «۲» (مهدی بدالی)



در بازهٔ زمانی صفر تا $3t$، مساحت زیر نمودار سرعت – زمان برابر با جابه‌جایی متحرک در این بازهٔ زمانی است. با توجه به اینکه مساحت پایین محور زمان می‌باشد، بنابراین، مقدار جابه‌جایی و همچنین سرعت متوسط در این بازهٔ زمانی، منفی خواهد بود. در این حالت داریم:

$$S_{(-3t)} = \frac{v_1 \times 3t}{2} \Rightarrow \Delta x_{(-3t)} = \frac{3tv_1}{2}$$

$$v_{av(0-3t)} = \frac{\Delta x_{(-3t)}}{\Delta t} = \frac{\frac{3tv_1}{2}}{3t - 0} = \frac{v_1}{2}$$

www.mapedu.ir

$$v_{av}=-5\frac{m}{s} \longrightarrow -5=\frac{v_1}{2} \Rightarrow v_1=-10\frac{m}{s}$$

اکنون با استفاده از تشابه مثلث‌های (۱) و (۲) سرعت در لحظه $3t$ را می‌یابیم:

$$\frac{v_2}{|v_1|}=\frac{3t-3t}{3t-t} \Rightarrow \frac{v_2}{10}=\frac{1}{2} \Rightarrow v_2=5\frac{m}{s}$$

(حرکت بر خط راست) (فیزیک ۳، صفحه‌های ۱۰ تا ۱۲)

---

۴۹ – گزینه «۲» (امیرحسین برادران)

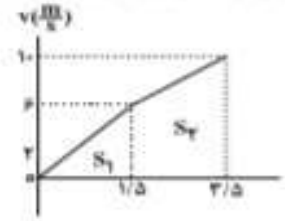
حرکت شامل دو بخش با شتاب ثابت است. از روی نمودار شتاب – سرعت، نمودار سرعت – زمان متحرک را رسم می‌کنیم. بنابراین، ابتدا لحظه‌هایی که سرعت متحرک $6\frac{m}{s}$ و $10\frac{m}{s}$ است را می‌یابیم:

$$v_1=a_1t_1+v_0 \xrightarrow[v_0=0,\ v_1=6\frac{m}{s}]{a_1=2\frac{m}{s^2}} 6=2t_1+0 \Rightarrow t_1=\frac{6}{2}=1/5s$$

$$v_2=a_2t+v_1 \xrightarrow[v_1=6\frac{m}{s},\ v_2=10\frac{m}{s}]{a_2=2\frac{m}{s^2}} 10=2t+6 \Rightarrow t=\frac{4}{2}=2s$$

$$\Rightarrow t_2=1/5+2=3/5s$$

مساحت محصور بین نمودار سرعت – زمان و محور زمان برابر جابه‌جایی است.



$$\Delta x=x_1+x_2=\frac{6\times1/5}{2}+\frac{(6+10)\times2}{2}$$

$$=4/5+16=20/5m$$

$$s_{av}=\frac{\ell}{\Delta t}=\frac{20/5}{3/5}=\frac{41}{7}\frac{m}{s}$$

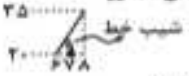
(حرکت بر خط راست) (فیزیک ۳، صفحه‌های ۱۰ تا ۱۲)

---

۵۰ – گزینه «۳» (امیرعلی جوادی)

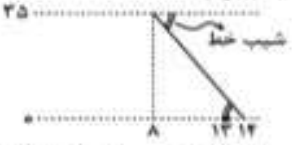
با توجه به این‌که نمودار $v-t$ بین دو لحظه $t=6s$ و $t=8s$، یک خط با شیب ثابت است، شتاب متحرک در تمام لحظه‌های منطبق به این بازهٔ زمانی، با شیب این خط برابر است، یعنی:

$$\text{شیب خط}=\frac{\text{ضلع مقابل}}{\text{ضلع مجاور}}=\frac{35-20}{8-6}=\frac{15}{2}\frac{m}{s^2}$$



چون لحظهٔ $t_1=7s$ مربوط به این بازهٔ زمانی است، لذا $a_{t=7s}=\frac{15}{2}\frac{m}{s^2}$ می‌باشد.

به همین ترتیب، برای تعیین بزرگی شتاب در لحظهٔ $t_2=13s$ که بین بازهٔ زمانی $t=8s$ تا $t=14s$ است، داریم:



$$\text{شیب خط}=\frac{0-35}{13-8}=\frac{-35}{5}\frac{m}{s^2} \Rightarrow |a_{t=13s}|=\frac{35}{5}\frac{m}{s^2}$$

در نهایت داریم:

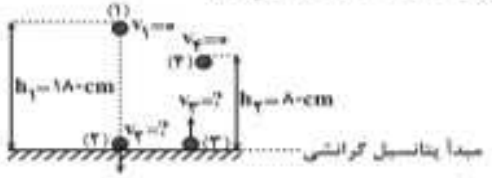
$$\frac{|a_{t=7s}|}{|a_{t=13s}|}=\frac{\frac{15}{2}}{\frac{35}{5}}=\frac{9}{7}$$

(حرکت بر خط راست) (فیزیک ۳، صفحه‌های ۰ تا ۱۰، ۱۲ و ۱۷)

---

۵۱ – گزینه «۲» (مرتضی رمضان‌زاده)

ابتدا با استفاده از رابطهٔ پایستگی انرژی مکانیکی سرعت توپ در لحظهٔ برخورد به سطح زمین و در هنگام جدا شدن از سطح زمین را به‌دست می‌آوریم. برای نقطه‌های (۱) و (۲) داریم (جهت مثبت را به‌سمت بالا فرض می‌کنیم):



$$E_1=E_2 \xrightarrow{E=K+U} K_1+U_1=K_2+U_2 \Rightarrow mgh_1=\frac{1}{2}mv_2^2$$

$$\xrightarrow{h_1=180cm=1/8m} 10\times1/8=\frac{1}{2}\times v_2^2 \Rightarrow v_2^2=36 \Rightarrow v_2=6\frac{m}{s}$$

چون جهت v_2 به سمت پایین است، علامت آن منفی می‌شود، یعنی $v_2=-6\frac{m}{s}$ می‌باشد.

اکنون پایستگی انرژی را برای نقاط ۳ و ۴ می‌نویسیم:

$$E_3=E_4 \Rightarrow K_3+U_3=K_4+U_4 \Rightarrow \frac{1}{2}mv_3^2=mgh_4$$

$$\xrightarrow{h_4=80cm=0/8m} \frac{1}{2}\times v_3^2=10\times0/8 \Rightarrow v_3^2=16 \Rightarrow v_3=4\frac{m}{s}$$

چون جهت v_3 به‌طرف بالا است، علامت آن مثبت می‌باشد. اکنون می‌توان اندازهٔ شتاب متوسط را به‌صورت زیر به‌دست آورد:

$$a_{av}=\frac{v_3-v_2}{\Delta t} \xrightarrow[v_2=-6\frac{m}{s},\ v_3=4\frac{m}{s}]{\Delta t=20ms=20\times10^{-3}s} a_{av}=\frac{4-(-6)}{20\times10^{-3}}$$

$$\Rightarrow a_{av} = \frac{10}{2\times10^{-2}} = 500\frac{m}{s^2}$$

(فیزیک بر خط راست) (فیزیک ۳، صفحه‌های ۱۰ تا ۱۴)

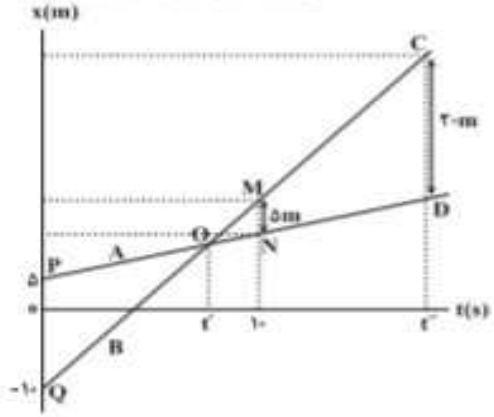
---

۵۲ – گزینهٔ «۴» (امیرحسین برادران)

روش اول: ابتدا، مطابق شکل زیر، نمودار مکان – زمان دو متحرک را در یک دستگاه مختصات رسم می‌کنیم و سپس با توجه به تشابه مثلث‌های MNO و OPQ، لحظهٔ t' که متحرک B از کنار متحرک A می‌گذرد را می‌یابیم:

$$\frac{\overline{PQ}}{MN} = \frac{t'}{10-t'} \xrightarrow[MN=5m]{\overline{PQ}=15m} \frac{15}{5} = \frac{t'}{10-t'} \Rightarrow 3 = \frac{t'}{10-t'}$$

$$\Rightarrow 30-3t' = t' \Rightarrow 30 = 4t' \Rightarrow t' = 7/5s$$



اکنون، با استفاده از تشابه مثلث‌های CDO و OPQ، لحظهٔ t'' را که فاصلهٔ دو متحرک از یکدیگر برابر 20m است، می‌یابیم:

$$\frac{\overline{PQ}}{\overline{CD}} = \frac{t''}{t''-t'} \Rightarrow \frac{15}{20} = \frac{7/5}{t''-7/5} \Rightarrow \frac{3}{20} = \frac{1}{t''-7/5}$$

$$\Rightarrow \frac{1}{10} = \frac{1}{t''-7/5} \Rightarrow t''-7/5 = 10 \Rightarrow t'' = 17/5s$$

روش دوم: با نوشتن معادلهٔ مکان – زمان برای دو متحرک داریم:

$$\begin{cases} x_A = v_A t + 5 \\ x_B = v_B t - 10 \end{cases} \Rightarrow x_B - x_A = (v_B - v_A)t - 15$$

$$\xrightarrow[t=10s]{x_B - x_A = 5m} 5 = (v_B - v_A)\times10 - 15 \Rightarrow v_B - v_A = 2\frac{m}{s}$$

$$x_B - x_A = (v_B - v_A)t - 15 \xrightarrow[v_B - v_A = 2\frac{m}{s}]{x_B - x_A = 20m} t = \frac{35}{2} = 17/5s$$

(حرکت بر خط راست) (فیزیک ۳، صفحه‌های ۱۳ تا ۱۵)

---

۵۳ – گزینهٔ «۱» (مهتم رشتی)

با داشتن a، v_0 و v، از معادلهٔ سرعت – جابه‌جایی (مستقل از زمان) استفاده می‌کنیم:

$$v^2 - v_0^2 = 2a\Delta x \xrightarrow[a=2\frac{m}{s^2}]{v_0=0,\ v=16\frac{m}{s}} 16^2 - 0 = 2\times2\times\Delta x \Rightarrow \Delta x = 32m$$

$$\xrightarrow{x_0=0} x = 32m$$

(حرکت بر خط راست) (فیزیک ۳، صفحه‌های ۱۵ تا ۱۷)

---

۵۴ – گزینهٔ «۴» (علیرضا گودرز)

گزینهٔ «۱»: نادرست است. تندی متحرک در بازهٔ زمانی صفر تا t_1 درحال افزایش و از لحظهٔ t_1 تا لحظهٔ t_2 در حال کاهش است.

گزینهٔ «۲»: نادرست است. متحرک در لحظه‌ای تغییر جهت می‌دهد که سرعت آن صفر شده و علامت سرعت تغییر کند. می‌بینیم در لحظهٔ t_1، علامت سرعت تغییر نکرده (از صفر تا t_2 سرعت منفی است.) و اندازهٔ آن نیز صفر نشده است.

گزینهٔ «۳»: نادرست است. در بازهٔ زمانی صفر تا t_1، اندازهٔ سرعت در جهت منفی درحال افزایش است. بنابراین، حرکت تندشونده می‌باشد. در بازهٔ زمانی t_1 تا t_2، اندازهٔ سرعت در جهت منفی درحال کاهش است، لذا حرکت کندشونده است؛ درنتیجه، در مجموع، حرکت، ابتدا تندشونده و سپس کندشونده است.

گزینهٔ «۴»: درست است. با توجه به رابطهٔ $a_{av} = \frac{\Delta v}{\Delta t}$ و $v_{av} = \frac{\Delta x}{\Delta t}$، چون در بازهٔ زمانی صفر تا t_1، $\Delta v < 0$ و همچنین $\Delta x < 0$ است، لذا $a_{av} < 0$ و $v_{av} < 0$ هستند. یعنی بردار شتاب متوسط و بردار سرعت متوسط، هم‌جهت‌اند.

(حرکت بر خط راست) (فیزیک ۳، صفحه‌های ۱۳ تا ۱۴)

---

۵۵ – گزینهٔ «۲» (بهزاد کاوه‌ای)

می‌دانیم، در نمودار مکان – زمان، هنگامی که نمودار به محور افق نزدیک می‌شود، یعنی متحرک به مبدأ مکان (یا به $x=0$) نزدیک شده و هنگامی که از این محور دور می‌شود، متحرک از مبدأ مکان دور خواهد شد. از طرف دیگر، شیب خط مماس بر نمودار مکان – زمان در هر لحظه، سرعت در آن لحظه را نشان می‌دهد.

بنابراین، اگر در لحظه یا بازه‌ای، شیب خط مماس بر نمودار مکان – زمان، مثبت (یا منفی) باشد، سرعت نیز مثبت (یا منفی) است.

با توجه به نکات فوق در می‌یابیم، متحرک در بازه‌های زمانی $(t=0s$ تا $t_0=1s)$ و $(t=5s$ تا $t=7s)$ به مدت ۲ ثانیه در حالی که $v<0$ است به مبدأ مکان نزدیک می‌شود. همچنین، در بازهٔ زمانی $(t=7s$ تا $t=8s)$، متحرک به مدت ۱ ثانیه درحالی‌که $v>0$ است، از مبدأ مکان دور خواهد شد. بنابراین، نسبت مدت زمانی که متحرک با سرعت منفی به مبدأ مکان نزدیک می‌شود به مدت زمانی که با سرعت مثبت از مبدأ مکان دور می‌شود برابر $\frac{2}{1}=2$ است.

(حرکت بر خط راست) (فیزیک ۳، صفحه‌های ۱۲ تا ۱۰)

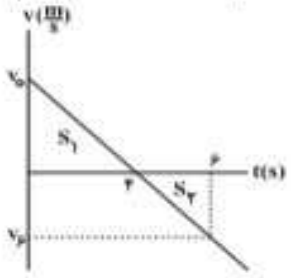
---

۵۶ – گزینهٔ «۳» (بهزاد نادی‌نسب)

روش اول:

چون شتاب ثابت و تقعر نمودار به‌طرف پایین است، شتاب منفی است. بنابراین نمودار سرعت – زمان آن به‌صورت یک خط راست با شیب منفی به‌صورت زیر رسم می‌شود. با توجه به این که جابه‌جایی متحرک در بازهٔ زمانی صفر تا 4s، برابر $\Delta x = 36-18 = 8m$ است، داریم:

$$S_1 = \Delta x = 8m \Rightarrow \frac{1}{2}\times4\times v_0 = 8 \Rightarrow v_0 = 4\frac{m}{s}$$



از طرف دیگر، بنا به تشابه دو مثلث داریم:

$$\frac{|v_0|}{2}=\frac{|v_6|}{2}\Rightarrow\frac{2}{2}=\frac{|v_6|}{2}\Rightarrow|v_6|=2\Rightarrow v_6=-2\frac{m}{s}$$

$$S_2=\frac{v_6\times(6-2)}{2}=\frac{-2\times2}{2}=-2m$$

$$v_{av}=\frac{\Delta x}{\Delta t}=\frac{S_1+S_2}{\Delta t}=\frac{8-2}{6-0}=1\frac{m}{s}$$

روش دوم:

با توجه به نمودار مکان – زمان داده شده، چون در لحظهٔ $t=4s$، شیب خط مماس بر نمودار برابر صفر است، سرعت در این لحظه نیز صفر می‌باشد. بنابراین، ابتدا با استفاده از رابطهٔ مستقل از شتاب، سرعت اولیه را می‌یابیم و سپس شتاب متحرک را حساب می‌کنیم:

$$\Delta x=\frac{v+v_0}{2}\times\Delta t\xrightarrow[\Delta t=4s,\,v=0]{\Delta x=26-18=8m}8=\frac{0+v_0}{2}\times4\Rightarrow v_0=4\frac{m}{s}$$

$$a=\frac{v-v_0}{t}=\frac{0-4}{4}\Rightarrow a=-1\frac{m}{s^2}$$

بنا داشتن v_0، سرعت در لحظهٔ $t=6s$ را می‌یابیم و سپس از رابطهٔ $v_{av}=\frac{v_6+v_0}{2}$، سرعت متوسط را پیدا می‌کنیم:

$$v=at+v_0=-1\times6+4\Rightarrow v_6=-2\frac{m}{s}$$

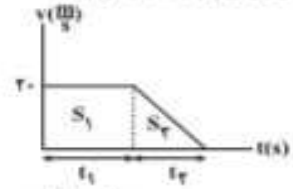
$$v_{av}=\frac{v_6+v_0}{2}=\frac{-2+4}{2}\Rightarrow v_{av}=1\frac{m}{s}$$

(حرکت در خط راست) (فیزیک ۳، صفحه‌های ۱۶ تا ۲۱)

---

۵۷ – گزینهٔ «۴» (عبدالرضا امین نسب)

مدت زمان t_1 ثانیهٔ اول همان زمان واکنش راننده است که خودرو با سرعت ثابت حرکت کرده است و t_2 ثانیهٔ بعدی، زمان حرکت کندشوندهٔ خودرو می‌باشد. بنابراین، ابتدا با استفاده از معادلهٔ سرعت – زمان، مدت زمان t_2 را می‌یابیم. اگر مطابق شکل زیر نمودار سرعت – زمان خودرو را رسم کنید، داریم:



$$v=at+v_0\xrightarrow[a=-2\frac{m}{s^2},\,v=0]{v_0=72\frac{km}{h}=20\frac{m}{s}}0=-2\times t_2+20\Rightarrow t_2=10s$$

از طرف دیگر با توجه به نمودار سرعت – زمان و با توجه به این‌که کل جابه‌جایی خودرو برابر $150m$ است و این جابه‌جایی برابر مساحت زیر نمودار سرعت – زمان می‌باشد، می‌توان نوشت:

$$S_1+S_2=150\Rightarrow(20\times t_1)+\frac{20\times t_2}{2}=150$$

$$\xrightarrow{t_2=10s}20t_1+\frac{20\times10}{2}=150\Rightarrow20t_1=50\Rightarrow t_1=2/5s$$

بنابراین نسبت $\frac{t_2}{t_1}$ برابر است با: $\frac{t_2}{t_1}=\frac{10}{2/5}=4$

(حرکت در خط راست) (فیزیک ۳، صفحه‌های ۱۶ تا ۲۱)

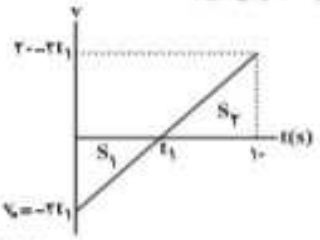
---

۵۸ – گزینهٔ «۱» (نادر فرنا مبی)

با فرض این‌که $v_0=0$ باشد، جابه‌جایی متحرک را در مدت $10s$ می‌یابیم:

$$\Delta x=\frac{1}{2}at^2+v_0t\xrightarrow[a=2\frac{m}{s^2}]{v_0=0,\,t=10s}\Delta x=\frac{1}{2}\times2\times100+0=100m$$

اما با توجه به سؤال متحرک به اندازهٔ $50m$ جابه‌جا شده است. درنتیجه متحرک دارای سرعت اولیهٔ v_0 درخلاف جهت شتاب است. به همین منظور با فرض این‌که $v_0<0$ باشد، v_0 و v_{10} را می‌یابیم و نمودار سرعت – زمان را به‌صورت زیر رسم می‌کنیم و لحظهٔ تغییرجهت را می‌یابیم. اگر لحظهٔ تغییر جهت را t_1 درنظر بگیریم، با استفاده از معادلهٔ سرعت – زمان داریم:



$$v=at+v_0\xrightarrow[a=2\frac{m}{s^2}]{t=t_1\Rightarrow v=0}0=2t_1+v_0\Rightarrow v_0=-2t_1$$

همچنین سرعت در لحظهٔ $t=10s$ برابر است با:

$$v=2\times10-2t_1\Rightarrow v=20-2t_1$$

از طرف دیگر، چون مسافت طی شده در مدت $10s$ برابر $50m$ است، با توجه به نمودار داریم:

$$|S_1|+|S_2|=50m\Rightarrow\left|\frac{-2t_1\times t_1}{2}\right|+\left|\frac{(10-t_1)(20-2t_1)}{2}\right|=50$$

$$\Rightarrow t_1^2+(10-t_1)(10-t_1)=50$$

$$\Rightarrow t_1^2+100-10t_1-10t_1+t_1^2=50\Rightarrow2t_1^2-20t_1+50=0$$

$$\Rightarrow2(t_1-5)^2=0\Rightarrow t_1=5s$$

اکنون که لحظهٔ $t_1=5s$ را به‌دست آوریم، سرعت اولیه برابر $v_0=-2t_1=-2\times5=-10\frac{m}{s}$ است.

بنابراین با داشتن سرعت اولیهٔ متحرک، جابه‌جایی آن به‌صورت زیر قابل محاسبه است:

$$\Delta x=\frac{1}{2}at^2+v_0t\xrightarrow[v_0=-10\frac{m}{s}]{t=2s,\,a=2\frac{m}{s^2}}\Delta x=\frac{1}{2}\times2\times4-10\times2$$

$$\Rightarrow\Delta x=-16m\Rightarrow|\Delta x|=16m$$

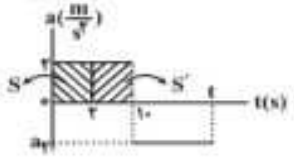
(حرکت در خط راست) (فیزیک ۳، صفحه‌های ۱۶ تا ۲۱)

---

۵۹ – گزینهٔ «۱» (زهره آقامحمدی)

می‌دانیم که در نمودار شتاب – زمان، مساحت زیر نمودار برابر تغییرات سرعت است.

بنابراین برای بازهٔ زمانی صفر تا ۲ ثانیه، داریم: $\Delta V=S=2\times2=4\frac{m}{s}$



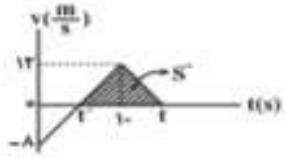
www.mapedu.ir

$$\Delta v = v - v_0 \xrightarrow[\Delta v = 4\frac{m}{s}]{v = -4\frac{m}{s}} 4 = -4 - v_0 \Rightarrow v_0 = -8\frac{m}{s}$$

اکنون سرعت در لحظهٔ $t = 10s$ را می‌یابیم و نمودار سرعت زمان متحرک را رسم می‌کنیم. دقت کنید، در بازهٔ زمانی صفر تا $10s$ شیب نمودار $v - t$ مثبت و در ادامه منفی است.

$$\Delta v' = S' = 2 \times 10 = 20\frac{m}{s}$$

$$\Delta v' = v_{10} - v_0 \Rightarrow 20 = v_{10} - (-8) \Rightarrow v_{10} = 12\frac{m}{s}$$



برای پیدا کردن t'، با استفاده از تشابه مثلث‌ها داریم:

$$\frac{8}{t'} = \frac{12}{10 - t'} \Rightarrow t = 4s$$

چون سرعت متوسط در بازه‌ای از زمان که متحرک در جهت محور x حرکت می‌کند را خواسته است، با توجه به نمودار، این بازهٔ زمانی بین t' و t است. بنابراین مساحت زیر نمودار سرعت –زمان که برابر جابه‌جایی است را برای این بازهٔ زمانی می‌یابیم و با استفاده از آن v_{av} را حساب می‌کنیم:

$$v_{av} = \frac{\Delta x}{\Delta t} = \frac{S''}{\Delta t} = \frac{\frac{(t' - t) \times 12}{2}}{t' - t} \Rightarrow v_{av} = 6\frac{m}{s}$$

(مرکز بر خط راهنما) (فیزیک ۳، صفحهٔ ۱۴ تا ۲۱)

---

۶۰ – گزینهٔ «۲» (مسعود کیان)

اگر فرض کنیم، خودروها در لحظهٔ t' به هم رسیده باشند، در این لحظه جابه‌جایی آن‌ها با هم برابر است. با توجه به این که مساحت سطح محصور بین نمودار سرعت – زمان و محور زمان برابر جابه‌جایی متحرک است، مساحت سطح محصور بین نمودار $v - t$ و محور t را با هم مساوی قرار می‌دهیم. دقت کنید، برای هر دو خودرو مساحت زیر نمودار به‌صورت ذوزنقه است.

$$\Delta x_A = \Delta x_B \Rightarrow \frac{t' + (t' - 8)}{2} \times v_1 = \frac{t' + (t' - 20)}{2} \times v_2$$

$$\Rightarrow (2t' - 8)v_1 = (2t' - 20)v_2 \Rightarrow \frac{v_2}{v_1} = \frac{2t' - 8}{2t' - 20} \quad (1)$$

از طرف دیگر، در لحظهٔ $t = 16s$، سرعت دو خودرو با هم برابر است. یعنی سرعت خودروی B برابر v_1 است. بنابراین با توجه به این‌که شتاب خودروی B برابر $a_B = \frac{v_2 - 0}{20} = \frac{v_2}{20}$ است، می‌توان نوشت:

$$v_B = a_B t + v_{0B} \xrightarrow[v_B = v_1]{t = 16s,\ v_{0B} = 0} v_1 = \frac{v_2}{20} \times 16 + 0$$

$$\Rightarrow \frac{v_2}{v_1} = \frac{20}{16} = \frac{5}{4} \quad (2)$$

اکنون، با استفاده از رابطه‌های (۱) و (۲)، t' را می‌یابیم:

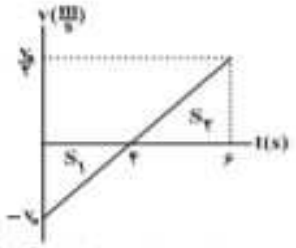
$$\xrightarrow{(1),(2)} \frac{2t' - 8}{2t' - 20} = \frac{5}{4} \Rightarrow 10t' - 100 = 8t' - 32$$

$$\Rightarrow 2t' = 68 \Rightarrow t' = 34s$$

(مرکز بر خط راهنما) (فیزیک ۳، صفحه‌های ۱۴ تا ۲۱)

---

۶۱ – گزینهٔ «۳» (محمدحسین بداران)



با توجه به تقارن مهمی جهت حرکت متحرک در لحظهٔ $t = 4s$ تغییر می‌کند. نمودار سرعت –زمان متحرک را رسم می‌کنیم و سرعت اولیه را به‌دست می‌آوریم. با توجه به تشابه مثلث‌ها تندی متحرک در لحظهٔ $t = 6s$ نصف تندی آن در مبدأ زمان است. با توجه به این‌که مساحت محصور بین نمودار سرعت –زمان و محور زمان برابر جابه‌جایی است، داریم:

$$\Delta L = |S_1| + |S_2| = \overbrace{\frac{4 \times v_0}{2}}^{S_1} + \overbrace{\frac{2 \times \frac{v_0}{2}}{2}}^{S_2} = \frac{5}{2}v_0$$

$$\Delta x = S_2 - S_1 = \frac{2 \times \frac{v_0}{2}}{2} - \frac{4 \times v_0}{2} = \frac{-3v_0}{2} \Rightarrow |\Delta x| = \frac{3}{2}v_0$$

$$\xrightarrow{\Delta L = |\Delta x| = 12m} v_0 = 12\frac{m}{s}$$

اکنون با استفاده از رابطهٔ مکان –زمان در حرکت با شتاب ثابت مکان متحرک را در لحظهٔ $t = 12s$ به‌دست می‌آوریم:

$$a = \frac{\Delta v}{\Delta t} \xrightarrow[\Delta t = 4s]{\Delta v = -(-12) = 12\frac{m}{s}} a = \frac{12}{4} = 3\frac{m}{s^2}$$

$$x = \frac{1}{2}at^2 + v_0 t + x_0 \xrightarrow[v_0 = -12\frac{m}{s},\ t = 12s]{x_0 = 0,\ a = 3\frac{m}{s^2}} x = \frac{1}{2} \times 3 \times 12^2 - 12 \times 12 + 0$$

$$\Rightarrow x = 12^2\left(\frac{3}{2} - 1\right) = \frac{144}{2} = 72m$$

(مرکز بر خط راهنما) (فیزیک ۳، صفحه‌های ۱۴ تا ۲۱)

www.mapedu.ir

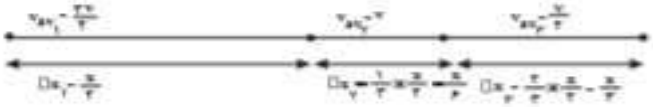
۶۲ – گزینهٔ «۲»

(لیلا خورشید)

طول مسیر مسافت برای هر دو دونده یکسان است که آن را برابر X فرض می‌کنیم. با توجه به اینکه سرعت‌های متوسط در مسیرها برحسب V داده شده است، می‌توان زمان هر قسمت را برحسب X و V به‌دست آورد. بنابراین با استفاده از رابطهٔ سرعت متوسط داریم:

$$\text{A دونده} \Rightarrow v_{av_A} = \frac{\Delta x_A}{\Delta t_A} \xrightarrow[v_{av_A}=v]{\Delta x_A = x} v = \frac{x}{\Delta t_A} \Rightarrow \Delta t_A = \frac{x}{v}$$

برای دونده B با توجه به شکل زیر داریم:



$$\text{B دونده} \Rightarrow \Delta t_B = \Delta t_1 + \Delta t_2 + \Delta t_3$$

$$\Rightarrow \Delta t_B = \frac{\Delta x_1}{v_{av_1}} + \frac{\Delta x_2}{v_{av_2}} + \frac{\Delta x_3}{v_{av_3}}$$

$$\Rightarrow \Delta t_B = \frac{\frac{x}{3}}{\frac{2v}{3}} + \frac{\frac{x}{6}}{v} + \frac{\frac{x}{3}}{\frac{v}{2}} \Rightarrow \Delta t_B = \left(\frac{1}{2} \times \frac{x}{v}\right) + \left(\frac{1}{6} \times \frac{x}{v}\right) + \left(\frac{2}{3} \times \frac{x}{v}\right)$$

$$\xrightarrow{\frac{x}{v} = \Delta t_A} \Delta t_B = \frac{1}{2}\Delta t_A + \frac{1}{6}\Delta t_A + \frac{2}{3}\Delta t_A \Rightarrow \Delta t_B = \frac{7}{6}\Delta t_A$$

$$\Rightarrow \Delta t_A = \frac{6}{7}\Delta t_B$$

(فیزیک ۳، صفحه‌های ۴ تا ۱۳)

---

۶۳ – گزینهٔ «۳»

(عباس اصغری)

ابتدا معادلهٔ حرکت متحرک‌های A و B را می‌یابیم. به همین منظور باید سرعت و مکان اولیهٔ آن‌ها را حساب کنیم. دقت کنید ثانیهٔ دوم بازهٔ زمانی $t_1 = 1s$ تا $t_2 = 2s$ و ۴ ثانیهٔ دوم بازهٔ زمانی $t'_1 = 4s$ تا $t'_2 = 8s$ است. برای متحرک A می‌توان نوشت:

$$v_A = v_{avA} = \frac{x_2 - x_1}{t_2 - t_1} \xrightarrow{x_2 = -, x_1 = -20m}$$

$$v_A = \frac{0 - (-20)}{2 - 1} = 20\frac{m}{s}$$

$$x_A = v_A t + x_{A_0} \xrightarrow{t_0 = 2s, x_0 = -} 0 = 20 \times 2 + x_{A_0} \Rightarrow x_{A_0} = -40m$$

بنابراین معادلهٔ حرکت متحرک A برابر است با:

$$x_A = 20t - 40$$

برای متحرک B می‌توان نوشت:

$$v_B = v_{avB} = \frac{x'_2 - x'_1}{t'_2 - t'_1} \xrightarrow[t'_2 = 8s, t'_1 = 4s]{x'_1 = 60m, x'_2 = 20m} v_B = \frac{20 - 60}{8 - 4} = -10\frac{m}{s}$$

$$x_B = v_B t + x_{B_0} \xrightarrow[x'_1 = 60m]{t'_1 = 4s} 60 = (-10 \times 4) + x_{B_0} \Rightarrow x_{B_0} = 100m$$

بنابراین معادلهٔ حرکت متحرک B برابر است با:

$$x_B = -10t + 100$$

در آخر، وقتی دو متحرک در یک مکان باشند $x_A = x_B$ است. بنابراین داریم:

$$x_A = x_B \Rightarrow 20t - 40 = -10t + 100 \Rightarrow 30t = 140 \Rightarrow t = \frac{14}{3}s$$

(فیزیک ۳، صفحه‌های ۱۳ تا ۱۵)

---

۶۴ – گزینهٔ «۴»

(فاروق حیدرانی)

برای پاسخ به این سؤال لازم است بدانیم:

۱) شیب خط مماس بر نمودار مکان – زمان، معرف سرعت لحظه‌ای است.

۲) شیب خط مماس بر نمودار سرعت – زمان معرف شتاب لحظه‌ای است.

۳) در حرکت بر خط راست، در حرکت شتاب‌دار تندشونده، بردارهای سرعت و شتاب هم جهت $(av > 0)$ و در حرکت شتاب‌دار کندشونده، خلاف جهت یکدیگرند. $(av < 0)$.

اکنون به بررسی هر یک از نمودارها می‌پردازیم:

الف) سرعت خلاف جهت محور X – شتاب در جهت محور X. چون شیب خط مماس بر نمودار منفی است، سرعت نیز منفی است، یعنی در خلاف جهت محور X است. از طرف دیگر، چون اندازهٔ شیب خط مماس بر نمودار در حال کاهش است، تندی نیز در حال کاهش است. لذا حرکت شتاب‌دار کندشونده است. در نتیجه، چون $v < 0$ است، باید $a > 0$ باشد، یعنی شتاب در جهت محور X است.

ب) سرعت خلاف جهت محور X – شتاب در جهت محور X. چون نمودار سرعت – زمان، زیر محور زمان است $v < 0$ می‌باشد. از طرف دیگر، چون شیب خط مماس بر نمودار سرعت – زمان مثبت است، $a > 0$ است.

پ) سرعت در خلاف جهت محور X – شتاب در جهت محور X (همان توضیح قسمت الف)

ت) سرعت در جهت محور X – شتاب در خلاف جهت محور X. چون نمودار سرعت – زمان بالای محور زمان است، $v > 0$ می‌باشد. از طرف دیگر، چون شیب خط مماس بر نمودار سرعت – زمان منفی است، $a < 0$ است.

(فیزیک ۳، صفحه‌های ۱۶ تا ۱۹)

---

۶۵ – گزینهٔ «۳»

(مصطفی میرداج)

با توجه به اینکه مبدأ مکان، مبدأ دستگاه مختصات $(x = 0)$ و مبدأ حرکت در مکان $x_0 = 2m$ است، به بررسی گزینه‌ها می‌پردازیم:

گزینهٔ «۱»: نادرست – در بازهٔ زمانی t_2 تا t_4 متحرک در مکان‌های منفی محور قرار دارد، اما از t_2 تا t_3 در خلاف جهت محور X و از t_3 تا t_4 در جهت محور X حرکت می‌کند.

گزینهٔ «۲»: نادرست – در لحظهٔ t_1 متحرک در بیشترین فاصله از مبدأ مکان قرار دارد.

گزینهٔ «۳»: درست – مبدأ حرکت، مکان $x_0 = 2m$ می‌باشد و متحرک در بازهٔ زمانی t_1 تا t_5، یکبار از این مکان عبور می‌کند.

گزینهٔ «۴» نادرست – در لحظات t_2 و t_4 بردار مکان متحرک تغییر جهت می‌دهد و در لحظه‌های t_1 و t_3 جهت حرکت متحرک تغییر می‌کند.

(فیزیک ۳ – مقدمه‌ی ۲ تا ۹)

---

۶۶ – گزینهٔ «۱» (اسعد دهقان مهری)

با توجه به این‌که در حرکت شتاب ثابت سرعت متوسط متحرک در بازهٔ زمانی t_1 تا t_2 با سرعت لحظه‌ای متحرک در لحظهٔ $t=\frac{t_1+t_2}{2}$ برابر است داریم:

$$\begin{cases} \xrightarrow{t_1=1s,\ t_2=3s} v_{av}=\frac{\Delta x}{\Delta t}\ \frac{\Delta x=12m}{\Delta t=1s}\rightarrow v_{av}=12\frac{m}{s} \\ \xrightarrow{t=\frac{t_1+t_2}{2}=1/5s} v_{av}=v=12\frac{m}{s} \end{cases}$$

$$\begin{cases} \xrightarrow[t'_2=4s]{t'_1=3s} v'_{av}=\frac{\Delta x'}{\Delta t'}\ \frac{\Delta x'=4m}{\Delta t'=1s}\rightarrow v'_{av}=4\frac{m}{s} \\ \xrightarrow{t'=\frac{t'_1+t'_2}{2}=3/5s} v'_{av}=v'=4\frac{m}{s} \end{cases}$$

$$\Rightarrow a=\frac{\Delta v}{\Delta t}=\frac{v'-v}{t'-t}=\frac{4-12}{3/5-1/5}=-4\frac{m}{s^2}$$

$$\Rightarrow v=at+v_0\xrightarrow[a=-4\frac{m}{s^2}]{v=12\frac{m}{s},\ t=1/5s}12=-4(1/5)+v_0\Rightarrow v_0=18\frac{m}{s}$$

حال طبق رابطهٔ مستقل از زمان داریم:

$$v_{\text{توقف}}^2-v_0^2=2a\Delta x\xrightarrow[a=-4\frac{m}{s^2}]{v_{\text{توقف}}=0,\ v_0=18\frac{m}{s}}0-324=2(-4)\Delta x$$

$$\Rightarrow \Delta x=40/5m$$

(فیزیک ۳ – مقدمه‌ی ۵ تا ۶)

---

۶۷ – گزینهٔ «۴» (مهدی رمضان‌زاده)

با نگاه در نمودار مکان متحرک A، متوجه می‌شویم که این متحرک، از مکان $x_0=+20m$ حرکت خود را آغاز کرده و در ثانیه‌های متوالی، جابه‌جایی‌های یکسانی را طی کرده است، بنابراین حرکتش با سرعت ثابت (یکنواخت) می‌باشد. در این حالت با محاسبهٔ سرعت متحرک، معادلهٔ مکان – زمان آن را می‌نویسیم:

$$v_A=\frac{\Delta x}{\Delta t}\ \frac{\Delta x=40-20=10m}{\Delta t=1s}\rightarrow v_A=\frac{10}{1}=10\frac{m}{s}$$

$$x_A=v_At+x_0\xrightarrow[v_A=10\frac{m}{s}]{x_0=20m}x_A=10t+20$$

همچنین، با نگاه در نمودار مکان متحرک B، متوجه می‌شویم که این متحرک، از مکان $x_0=0$ حرکت خود را آغاز کرده و در ثانیه‌های متوالی، جابه‌جایی‌های آن یک تصاعد عددی را تشکیل می‌دهد یعنی حرکتش با شتاب ثابت است بنابراین به کمک رابطهٔ جابه‌جایی در t ثانیهٔ n اُم $(\Delta x=\frac{1}{2}a(2n-1)t^2+v_0t)$ شتاب و سرعت اولیهٔ متحرک B را می‌یابیم و معادلهٔ حرکتش را می‌نویسیم:

$$(n=1)\ \text{جابه‌جایی در ثانیهٔ اول}\ \Delta x_1=\frac{1}{2}a(2\times1-1)t^2+v_0t$$

$$\xrightarrow[\Delta x_1=2m]{t=1s}2=\frac{1}{2}a+v_0$$

$$(n=2)\ \text{جابه‌جایی در ثانیهٔ دوم}\ \Delta x_2=\frac{1}{2}a(2\times2-1)t^2+v_0t$$

$$\xrightarrow[\Delta x_2=5m]{t=1s}5=\frac{3}{2}a+v_0$$

با حل دستگاه دو معادله – دو مجهول $\begin{cases}\frac{1}{2}a+v_0=2\\ \frac{3}{2}a+v_0=5\end{cases}$ کمیت‌های a و v_0 برای متحرک B به دست می‌آید: $\begin{cases}a_B=2\frac{m}{s^2}\\ v_{0B}=2\frac{m}{s}\end{cases}$

بنابراین، معادلهٔ مکان – زمان متحرک B برابر است با:

$$x_B=\frac{1}{2}at^2+v_0t+x_0=\frac{1}{2}\times2t^2+2t+0\Rightarrow x_B=t^2+2t$$

در آخر، چون در لحظه‌ای که این دو متحرک به یکدیگر می‌رسند $x_A=x_B$ است، می‌توان نوشت:

$$x_A=x_B\Rightarrow10t+20=t^2+2t$$
$$\Rightarrow t^2-8t-20=0\Rightarrow(t+2)(t-10)=0\Rightarrow\begin{cases}t=10s\\ t=-2s\ \text{غ ق ق}\end{cases}$$

در نتیجه مکانی که دو متحرک از کنار هم عبور می‌کنند برابر است با:

$$x_B=x_A=10t+20\xrightarrow{t=10s}x_B=x_A=10\times10+20=120m$$

(فیزیک ۳ – مقدمه‌ی ۱ تا ۶)

---

۶۸ – گزینهٔ «۴» (اصغر زاهدی)

ابتدا باید معادلهٔ سرعت – زمان متحرک را بیابیم. چون نمودار $v-t$ به صورت یک سهمی است، معادلهٔ آن یک تابع درجهٔ دوم است که به صورت زیر آن را می‌یابیم:

$$v=\alpha(t-1)^2-4\xrightarrow[v=0]{t=3s}0=\alpha(3-1)^2-4$$

$$\Rightarrow4=4\alpha\Rightarrow\alpha=1$$

$$v=1\times(t-1)^2-4\Rightarrow v=t^2-2t-3$$

اکنون سرعت متحرک را در ابتدا و انتهای ثانیهٔ پنجم می‌یابیم:

$$v=t^2-2t-3\Rightarrow\begin{cases}t_1=4s\Rightarrow v_1=16-8-3=5\frac{m}{s}\\ t_2=5s\Rightarrow v_2=25-10-3=12\frac{m}{s}\end{cases}$$

$$a_{av} = \frac{V_2 - V_1}{t_2 - t_1} = \frac{12-5}{5-4} \Rightarrow a_{av} = 7\frac{m}{s^2}$$

(فرگشت بر غلط راست) (فیزیک ۳، عددهای ۳ تا ۳)

---

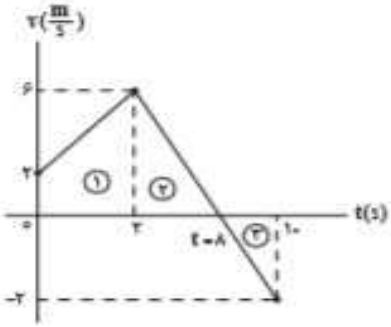
۶۹ – گزینهٔ «۱» (فاروق مرادی)

ابتدا با محاسبهٔ سرعت در لحظه‌های $t_1 = 2s$ و $t_2 = 10s$، نمودار سرعت – زمان متحرک را رسم می‌کنیم:

$$V_1 = a_1 t_1 + V_0 \xrightarrow[V_0 = 2\frac{m}{s},\ t_1 = 2s]{a_1 = 2\frac{m}{s^2}} V_1 = 2\times 2 + 2 = 6\frac{m}{s}$$

$$V_2 = a_2 t_2 + V_1 \xrightarrow[V_1 = 6\frac{m}{s},\ t_2 = 8s]{a_2 = -1\frac{m}{s^2}} V_2 = -1\times 8 + 6 = -2\frac{m}{s}$$

اکنون لحظه‌ای را که جهت حرکت متحرک تغییر می‌کند می‌یابیم. از تشابه دو مثلث (۲) و (۳) داریم:



$$\frac{10-t}{t-2} = \frac{2}{6} \Rightarrow t = 8s$$

با توجه به نمودار $V-t$، متحرک در بازه‌های زمانی (صفر تا ۲s) و (۸s تا ۱۰s) حرکتش تندشونده و در بازهٔ زمانی (۲s تا ۸s) حرکتش کندشونده است. با توجه به این‌که مسافت طی شده برابر مجموع قدر مطلق مساحت زیر نمودار $V-t$ است، داریم:

$$\text{مسافت تندشونده} = |S_1| + |S_3| \Rightarrow \ell_{\text{تندشونده}} = \left|\frac{2+6}{2}\times 2\right| + \left|\frac{-2\times 2}{2}\right|$$

$$\Rightarrow \ell_{\text{تندشونده}} = 10m$$

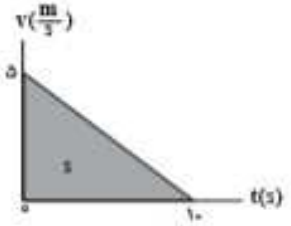
$$\text{مسافت کندشونده} = |S_2| \Rightarrow \ell_{\text{کندشونده}} = \left|\frac{6\times 6}{2}\right| = 18m$$

$$\frac{\ell_{\text{کندشونده}}}{\ell_{\text{تندشونده}}} = \frac{18}{10} = \frac{9}{5}$$

(فرگشت بر غلط راست) (فیزیک ۳، عددهای ۶ تا ۲۶)

۷۰ – گزینهٔ «۲» (عبدالله علمدار زاده)

می‌دانیم سطح محصور بین نمودار سرعت – زمان و محور زمان برابر جابه‌جایی متحرک است. بنابراین با توجه به این‌که $x_0 = -21m$ است، با استفاده از مساحت زیر نمودار سرعت – زمان، مکان متحرک را در لحظهٔ $t = 10s$ می‌یابیم و سپس شتاب آن را پیدا می‌کنیم:



$$\Delta x = S = \frac{10\times 5}{2} = 25m$$

$$\Delta x = x_{10} - x_0 \Rightarrow 25 = x_{10} - (-21) \Rightarrow x_{10} = 4m$$

$$a = \frac{V - V_0}{\Delta t} \xrightarrow[\Delta t = 10-0 = 10s]{V=0,\ V_0 = 5\frac{m}{s}} a = \frac{0-5}{10} = -\frac{1}{2}\frac{m}{s^2}$$

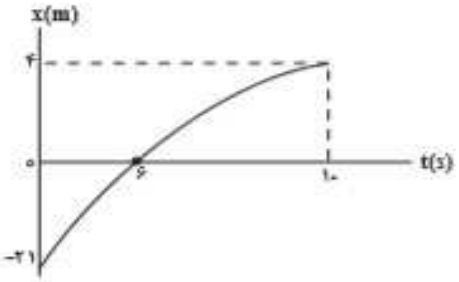
اکنون با داشتن x_0، V_0 و a، معادلهٔ مکان – زمان را می‌نویسیم و لحظه‌ای را که متحرک از مکان $x = 0$ عبور می‌کند می‌یابیم:

$$x = \frac{1}{2}at^2 + V_0 t + x_0 \xrightarrow[x_0 = -21m]{V_0 = 5\frac{m}{s}} x = \frac{1}{2}\times\left(-\frac{1}{2}\right)t^2 + 5t - 21$$

$$\xrightarrow{x=0} 0 = -\frac{1}{4}t^2 + 5t - 21 \Rightarrow t^2 - 20t + 84 = 0$$

$$\Rightarrow (t-12)(t-6) = 0 \Rightarrow \begin{cases} t = 6s \\ t = 12s \end{cases}$$

در آخر با رسم نمودار مکان – زمان، از روی نمودار مدت زمانی را که متحرک در حال دور شدن از مبدأ است، پیدا می‌کنیم: با توجه به نمودار، متحرک در بازهٔ زمانی صفر تا ۶s به مبدأ مکان نزدیک و از لحظهٔ $t = 6s$ تا لحظهٔ $t = 10s$ که سرعت آن صفر می‌شود، به مدت $\Delta t = 10 - 6 = 4s$ از مبدأ مکان دور می‌شود.



(فرگشت بر غلط راست) (فیزیک ۳، عددهای ۱۴ تا ۲۱)

۷۱ – گزینهٔ «۴» (امیرحسین برزوان)

با توجه به نمودار مکان – زمان، چون در لحظهٔ $t=4s$، شیب خط مماس بر نمودار صفر است در این لحظه سرعت متحرک نیز صفر می‌شود. بنابراین، ابتدا سرعت اولیه را برحسب شتاب می‌یابیم و سپس با استفاده از معادلهٔ مستقل از زمان، شتاب حرکت را پیدا می‌کنیم:

$$v = at + v_0 \xrightarrow[v=0]{t=4s} 0 = a\times 4 + v_0 \Rightarrow v_0 = -4a$$

چون در لحظهٔ t_1، در مکان $x=28m$ سرعت متحرک برابر $v=12\frac{m}{s}$ است، می‌توان نوشت:

$$v^2 = v_0^2 + 2a\Delta x \xrightarrow[v=12\frac{m}{s},\ v_0=-4a]{\Delta x=28-(-8)=36m}$$

$$144 = 16a^2 + 2a\times 36 \Rightarrow 16a^2 + 72a - 144 = 0$$

$$\Rightarrow 2a^2 + 9a - 18 = 0 \Rightarrow a = \frac{-9\pm\sqrt{81+144}}{4}$$

$$\Rightarrow a = \frac{-9\pm 15}{4} \Rightarrow \begin{cases} a = -6\frac{m}{s^2} \\ a = 1/5\frac{m}{s^2} \end{cases}$$

با توجه به نمودار، چون $a>0$ است، $a = 1/5\frac{m}{s^2}$ قابل قبول است. اکنون سرعت در لحظهٔ $t=10s$ را می‌یابیم:

$$v = at + v_0 \xrightarrow[t=10s]{v_0=-4a=-4\times 1/5=-6\frac{m}{s}}$$

$$v_{10} = 1/5\times 10 - 6 \Rightarrow v_{10} = 9\frac{m}{s}$$

در آخر، چون در لحظهٔ $t=4s$، متحرک تغییر جهت داده است، مسافت طی شده را با استفاده از رابطهٔ مستقل از شتاب $(\Delta x = \frac{v_1+v_2}{2}\Delta t)$، به‌صورت زیر می‌یابیم:

$$\ell_{\text{کل}} = \ell_{(0\to 4s)} + \ell_{(4s\to 10s)} \Rightarrow \ell = \left|\frac{v_0+v_4}{2}\times\Delta t\right| + \left|\frac{v_4+v_{10}}{2}\times\Delta t'\right|$$

$$\Rightarrow \ell = \left|\left(\frac{-6+0}{2}\times(4-0)\right)\right| + \left(\frac{0+9}{2}\times(10-4)\right) \Rightarrow \ell = 12+27 = 39m$$

(گزینهٔ ۳ درست است) (فیزیک ۳، مقدمه‌ای ۱۵ تا ۲۱)

---

۷۲ – گزینهٔ «۴» (مجتبی زمانی‌زاده)

متحرک در لحظهٔ $t=0$ از مکان $x=0$ با سرعت $10\frac{m}{s}$ شروع به حرکت نموده و پس از عبور از مکان $x=10m$ و تا زمانی که به مکان $x=16m$ می‌رسد شتاب آن ثابت و برابر $-2\frac{m}{s^2}$ است. بنابراین، ابتدا باید سرعت متحرک را در انتهای این قسمت از حرکتش به‌دست آوریم:

$$v_1^2 - v_0^2 = 2a\Delta x \Rightarrow v_1^2 - 10^2 = 2\times(-2)\times(16-0)$$

$$\Rightarrow v_1^2 = 36 \Rightarrow v_1 = \pm 6\frac{m}{s}$$

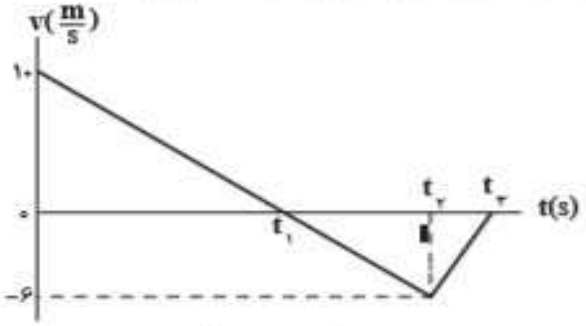
در ادامه شتاب متحرک در مکان $x=16m$ تغییر کرده و با شتاب ثابت $+3\frac{m}{s^2}$ به طرف نقطهٔ $x=10m$ برمی‌گردد. سرعت متحرک را در انتهای این قسمت از حرکتش نیز به‌دست می‌آوریم:

$$v_2^2 - v_1^2 = 2a\Delta x \Rightarrow v_2^2 - 6^2 = 2\times 3\times(10-16)$$

$$\Rightarrow v_2^2 = 0 \Rightarrow v_2 = 0$$

با توجه به این‌که سرعت نهایی متحرک، $v_2=0$ به‌دست آمده است باید، $v_1 = -6\frac{m}{s}$ باشد تا در قسمت دوم حرکت، سرعت متحرک با شتاب مثبت از v_1 به صفر برسد.

اکنون مطابق شکل زیر نمودار سرعت – زمان، این متحرک را رسم می‌کنیم و به کمک رابطهٔ سرعت – زمان، مقادیر t_1، t_2 و t_3 را به‌دست می‌آوریم:



$$v = a_1t_1 + v_0 \Rightarrow 0 = -2t_1 + 10 \Rightarrow t_1 = 5s$$
$$v_1 = a_1t_2 + v_0 \Rightarrow -6 = -2t_2 + 10 \Rightarrow t_2 = 8s$$
$$v_2 = a_2t + v_1 \Rightarrow 0 = 3t - 6 \Rightarrow t = 2s \Rightarrow t_3 = 8 + 2 = 10s$$

در نهایت، تحلیل نوع حرکت را به‌صورت زیر انجام می‌دهیم:

از لحظهٔ $t=0$ تا $t_1=5s$، چون $v>0$ و $a<0$ است، نوع حرکت کندشونده است.

از لحظهٔ $t_1=5s$ تا $t_2=8s$، چون $v<0$ و $a<0$ است، نوع حرکت تندشونده است.

از لحظهٔ $t_2=8s$ تا $t_3=10s$، چون $v<0$ و $a>0$ است، نوع حرکت کندشونده است.

بنابراین، متحرک در مجموع $7s$ حرکتش کندشونده بوده است.

(گزینهٔ ۲ درست است) (فیزیک ۳، مقدمه‌ای ۱۵ تا ۲۱)

---

۷۳ – گزینهٔ «۳» (امیرحسین برزوان)

با توجه به شکل، متحرک‌های A و B، در مبدأ زمان در دو جهت مختلف از مبدأ مکان عبور می‌کنند و تا لحظهٔ t'، از یکدیگر دور می‌شوند. پس از لحظهٔ t'، تا لحظهٔ t'' که

دو متحرک بهم می‌رسند، در حال نزدیک شدن به یکدیگرند بنابراین، ابتدا لحظه‌های t' و t'' را می‌یابیم به همین منظور با محاسبهٔ شتاب متحرک‌ها، معادلات سرعت – زمان و مکان – زمان آن‌ها را می‌نویسیم و با مساوی قرار دادن معادلات سرعت‌شان، t' و با مساوی قرار دادن معادلات مکانشان، t'' را به‌دست می‌آوریم. دقت کنید، در لحظهٔ t' سرعت متحرک‌ها یکسان و در لحظهٔ t''، مکان آنها یکسان است.

$$a_A = \frac{\Delta v_A}{\Delta t_A} = \frac{0-20}{5-0} \Rightarrow a_A = -4\frac{m}{s^2}$$

$$a_B = \frac{\Delta v_B}{\Delta t_B} = \frac{0-(-20)}{20-0} \Rightarrow a_B = 1\frac{m}{s^2}$$

$$v = at + v_0 \Rightarrow \begin{cases} \xrightarrow{v_{0A} = 20\frac{m}{s}} v_A = -4t + 20 \\ \xrightarrow{v_{0B} = -20\frac{m}{s}} v_B = t - 20 \end{cases}$$

$$x = \frac{1}{2}at^2 + v_0 t + x_0 \Rightarrow \begin{cases} \xrightarrow{x_{0A} = 0} x_A = \frac{1}{2}(-4)t^2 + 20t + 0 \\ \Rightarrow x_A = -2t^2 + 20t \\ \xrightarrow{x_{0B} = 0} x_B = \frac{1}{2} \times 1 \times t^2 - 20t + 0 \\ \Rightarrow x_B = \frac{1}{2}t^2 - 20t \end{cases}$$

$$t = t' \Rightarrow v_A = v_B \Rightarrow -4t' + 20 = t' - 20 \Rightarrow 40 = 5t' \Rightarrow t' = 8s$$

$$t = t'' \Rightarrow x_A = x_B \Rightarrow -2t''^2 + 20t'' = \frac{1}{2}t''^2 - 20t''$$

$$\Rightarrow \frac{5}{2}t''^2 - 40t'' = 0 \Rightarrow t''(\frac{5}{2}t'' - 40) = 0$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \frac{5}{2}t'' - 40 = 0 \Rightarrow t'' = 16s \\ t'' = 0 \end{cases}$$

با داشتن t' و t''، اکنون می‌توان مسافت طی شده در بازهٔ زمانی t' و t'' که دو متحرک به یکدیگر نزدیک می‌شوند را به‌دست آورد. بنابراین، با توجه به این‌که در نمودار سرعت – زمان، مساحت سطح محصور بین نمودار و محور زمان برابر جابه‌جایی متحرک است، به‌صورت زیر، مسافت طی شده را می‌یابیم. البته قبل از آن لازم است، سرعت هریک از متحرک‌ها را در لحظه‌های t' و t'' به‌دست آوریم. در ضمن در لحظهٔ t'، سرعت دو متحرک یکسان است.

$$v_A = v_B = -4t' + 20 \xrightarrow{t'=8s} v_A = v_B = -4 \times 8 + 20$$

$$\Rightarrow v_A = v_B = -12\frac{m}{s}$$

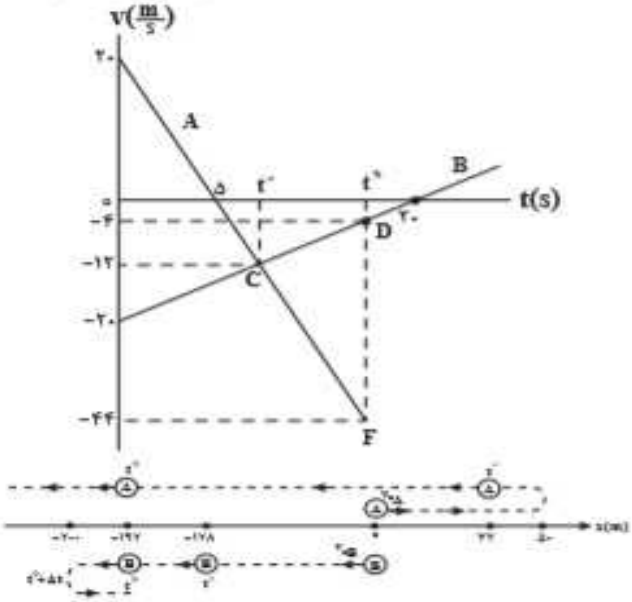
$$v_A = -4t'' + 20 \xrightarrow{t''=16s} v_A = -4 \times 16 + 20 = -44\frac{m}{s}$$

$$v_B = t'' - 20 \xrightarrow{t''=16s} v_B = 16 - 20 = -4\frac{m}{s}$$

$\ell = \ell_A + \ell_B \Rightarrow \ell =$ مساحت ذوزنقه $t't''CF$ + مساحت ذوزنقه $t't''CD$

$$\ell = \frac{(12+44)}{2} \times (16-8) + \frac{(12+4)}{2} \times (16-8) \Rightarrow$$

$$\ell = (56 \times 2) + (8 \times 8) \Rightarrow \ell = 288m$$



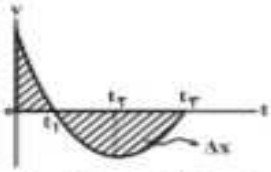
همان‌طور که در شکل فوق مشاهده می‌کنید، هر دو متحرک A و B، در بازهٔ زمانی t' تا t'' در جهت مخالف محور x به یکدیگر نزدیک می‌شوند. در لحظهٔ $t'' + \Delta t$ سرعت متحرک B صفر می‌شود و جهت آن برعکس می‌گردد، لذا متحرک A به حرکت خود در جهت مخالف محور x ادامه می‌دهد.

(گزارشت بر غلط راست) (فرهنگ ۳، علم‌های ۱۵ تا ۲۱)

۷۴ – گزینهٔ «۳»

(زهره آقامحمدی)

بررسی موارد:



الف) می‌دانیم در نمودار سرعت – زمان، شیب خط مماس بر نمودار برابر شتاب متحرک در آن لحظه است. با توجه به این نکته، در بازه t_1 تا t_2 شتاب منفی و در بازه t_2 تا t_3 شتاب مثبت است. (نادرست)

ب) در بازه صفر تا t_1 تندی (بزرگی سرعت) در حال کاهش و در بازه t_1 تا t_2 تندی در حال افزایش است. (نادرست)

پ) می‌دانیم در نمودار سرعت زمان، شیب خط واصل بین دو نقطه از نمودار برابر شتاب متوسط است. در این‌جا با توجه به تقارن سهمی، بزرگی شتاب متوسط در بازه زمانی t_1 تا t_2 برابر با بزرگی شتاب متوسط در بازه زمانی t_2 تا t_3 است، ولی با توجه به تفاوت علامت شیب خط واصل، علامت شتاب متوسط در بازه زمانی t_1 تا t_2 منفی و در بازه زمانی t_2 تا t_3 مثبت است. بنابراین، با توجه به این‌که شتاب متوسط کمیت برداری است، این دو بردار با هم مساوی نیستند. (نادرست)

ت) در نمودار سرعت – زمان، مساحت زیر نمودار برابر جابه‌جایی است. چون در بازه زمانی t_1 تا t_2 مساحت زیرنمودار منفی است $(\Delta x < 0)$، بنابراین، طبق رابطهٔ $v_{av} = \frac{\Delta x}{\Delta t}$، سرعت متوسط متحرک منفی می‌باشد. (درست)

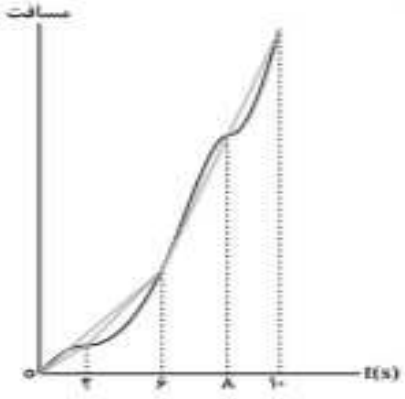
(حرکت بر خط راست) (فیزیک ۳، صفحه‌های ۳۰ و ۳۱)

---

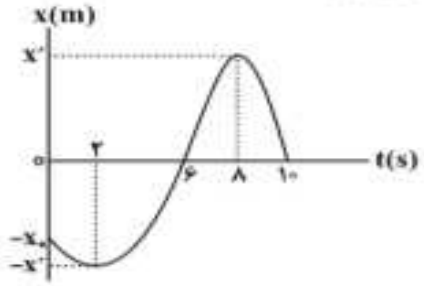
۷۵ – گزینهٔ «۳»

(امیرمحمود برادران)

راه حل اول: شیب خط در نمودار مسافت – زمان برابر با تندی متوسط است. با توجه به نمودار مکان – زمان، بخش‌هایی از نمودار که متحرک در خلاف جهت محور xها حرکت می‌کند را نسبت به محور افق قرینه می‌کنیم تا یک نمودار صعودی به‌دست آید (ویژگی نمودار مسافت – زمان). سپس با توجه به نمودار زیر و مقایسهٔ شیب خط در بازه‌های زمانی مختلف، در می‌یابیم شیب خط در بازهٔ زمانی ۶ ثانیه تا ۱۰ ثانیه بزرگ‌تر از گزینه‌های دیگر است.



راه حل دوم: به روش جبری نیز می‌توانید تندی متوسط متحرک را در بازه‌های زمانی مختلف مقایسه کنید.



گزینهٔ «۱»: $s_{av} = \frac{x'}{2}$ ۲s تا ۶s

گزینهٔ «۲»: $s_{av} = \frac{x' - x_0}{2}$ صفر تا ۲s

گزینهٔ «۳»: $s_{av} = \frac{x'}{2}$ ۶s تا ۱۰s

گزینهٔ «۴»: $s_{av} = \frac{2x' - x_0}{6}$ صفر تا ۶s

با توجه به گزینه‌ها، تندی متوسط متحرک در بازهٔ ۶s تا ۱۰s از بقیه بزرگ‌تر است.

(حرکت بر خط راست) (فیزیک ۳، صفحه‌های ۳۰ و ۳۱)

---

۷۶ – گزینهٔ «۲»

(غلامرضا محبی)

حل: ابتدا به کمک رابطهٔ مربوط به محاسبهٔ شتاب متوسط $\vec{v}_{20} - \vec{v}_{10}$ را می‌یابیم:

$$\vec{a}_{av} = \frac{\Delta \vec{v}}{\Delta t} \xrightarrow[t_1 = 0,\ t_2 = 10s]{\vec{a}_{av} = -10\vec{i}\,\frac{m}{s^2}} -10\vec{i} = \frac{\vec{v}_{10} - \vec{v}_0}{10 - 0}$$

$$\vec{v}_{10} - \vec{v}_0 = -100\vec{i}\,(\frac{m}{s})\ (1)$$

$$\vec{a}_{av} = \frac{\Delta \vec{v}}{\Delta t} \xrightarrow[t_1 = 0,\ t_2 = 20s]{\vec{a}_{av} = -4\vec{i}\,\frac{m}{s^2}} -4\vec{i} = \frac{\vec{v}_{20} - \vec{v}_0}{20 - 0}$$

$$\Rightarrow \vec{v}_{20} - \vec{v}_0 = -80\vec{i}\,(\frac{m}{s})\ (2)$$

از تفریق رابطه‌های (۱) و (۲) داریم:

$$\vec{v}_{20} - \vec{v}_{10} = -80\vec{i} - (-100\vec{i}) = 20\vec{i}\,(\frac{m}{s})$$

بنابراین، شتاب متوسط در ۱۰ ثانیهٔ دوم برابر است با:

$$\vec{a}_{av} = \frac{\vec{v}_{20} - \vec{v}_{10}}{20 - 10} = \frac{20\vec{i}}{10} = 2\vec{i}\,(\frac{m}{s^2}) \Rightarrow |\vec{a}_{av}| = 2\frac{m}{s^2}$$

(حرکت بر خط راست) (فیزیک ۳، صفحه‌های ۱۰ و ۱۱)

---

۷۷ – گزینهٔ «۱»

(مازیار ایرانشاهی)

چون متحرک A نسبت به متحرک B، در مدت زمان یکسان مسافت بیشتری طی کرده است تا به نقطهٔ O برسد، اندازهٔ سرعت آن بیشتر است و متحرک سریع‌تر محسوب می‌شود.

بنابراین با استفاده از رابطهٔ جابه‌جایی در حرکت با سرعت ثابت، ابتدا مدت زمانی که متحرک A (تندتر) از نقطهٔ A به O می‌رسد را می‌یابیم:

www.mapedu.ir

$$\Delta x = v\Delta t \Rightarrow \left.\begin{matrix} 0/2AB = v_A \times 3 \\ 0/8AB = v_A \times t_1 \end{matrix}\right\} \Rightarrow \frac{0/2AB}{0/8AB} = \frac{v_A \times 3}{v_A \times t} \Rightarrow t = 12s$$

این ۱۲ ثانیه، مدت زمان حرکت متحرک تندتر (A) از A تا O است.

از آنجایی‌که هر دو متحرک همزمان شروع به حرکت کرده‌اند و در نقطهٔ O به‌هم رسیده‌اند، لذا متحرک کندتر (B) در همان مدت ۱۲ ثانیه از نقطهٔ B تا نقطهٔ O را طی می‌کند. پس:

$$\begin{cases} 0/2AB = v_B \times 12 \\ 0/8AB = v_B \times t_2 \end{cases} \Rightarrow \frac{0/2AB}{0/8AB} = \frac{v_B \times 12s}{v_B \times t_2} \Rightarrow t = 48s$$

بنابراین ۴۸ ثانیه طول می‌کشد تا متحرک B از نقطهٔ O به نقطهٔ A برسد.

(حرکت بر خط راست) (فیزیک ۳، صفحه‌های ۱۳ تا ۱۵)

---

۷۸ – گزینهٔ «۳»

(احمد اعزی)

ابتدا با توجه به نمودار مکان – زمان‌های داده شده، معادلهٔ مکان – زمان هر کدام را می‌نویسیم. چون نمودارها به‌صورت خط راست است، هر دو متحرک با سرعت ثابت حرکت می‌کنند. بنابراین داریم:

$$v_B = \frac{\Delta x_B}{\Delta t} \xrightarrow[\Delta x_B = -45 - 45 = -45m]{\Delta t = 15s} v_B = \frac{-45}{15} = -3\frac{m}{s}$$

$$x_B = v_B t + x_{0B} \xrightarrow{x_{0B} = 45m} x_B = -3t + 45$$

از طرف دیگر، چون دو متحرک در مکان $x = 15$ به هم رسیده‌اند، زمان این لحظه را می‌یابیم:

$$x_B = -3t + 45 \Rightarrow 15 = -3t + 45 \Rightarrow t = 10s$$

بنابراین مطابق نمودار، در لحظهٔ $t = 10s$، متحرک A در مکان $x = 15m$ است. پس، سرعت متحرک A و به دنبال آن، معادلهٔ حرکتش را پیدا می‌کنیم:

$$x_A = v_A t + x_{0A} \xrightarrow[x_{0A} = -25m]{x_A = 15m,\ t = 10s} 15 = v_A \times 10 - 25$$

$$\Rightarrow v_A = 4\frac{m}{s}$$

$$\Rightarrow x_A = 4t - 25$$

با توجه به این‌که باید فاصلهٔ دو متحرک کمتر از $20m$ باشد، می‌توان نوشت:

$$|x_B - x_A| \le 20m \Rightarrow \begin{cases} -3t + 45 - 4t + 25 \le 20 \\ 4t - 25 + 3t - 45 \le 20 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} -7t + 70 \le 20 \\ 7t - 70 \le 20 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} 50 \le 7t \\ 90 \ge 7t \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} t \ge \frac{50}{7}s \\ t \le \frac{90}{7}s \end{cases} \Rightarrow \frac{50}{7}s \le t \le \frac{90}{7}s$$

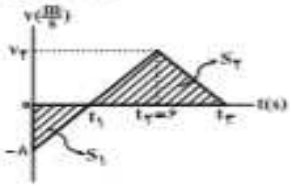
می‌بینیم در بازهٔ زمانی $\frac{50}{7}s$ تا $\frac{90}{7}s$، یعنی به‌مدت $\frac{40}{7}s$ در فاصلهٔ کمتر از $20m$ نسبت به هم قرار دارند.

(حرکت بر خط راست) (فیزیک ۳، صفحه‌های ۱۳ تا ۱۵)

---

۷۹ – گزینهٔ «۱»

(رضا آقاسعدی)



می‌دانیم در نمودار سرعت زمان مساحت محصور بین نمودار و محور زمان برابر جابه‌جایی است. بنابراین، با استفاده از جابه‌جایی در بازهٔ زمانی $t = 0$ تا t_1 لحظهٔ t_1 را می‌یابیم:

$$|\Delta x| = S_1 \Rightarrow 9/6 = \frac{8 \times t_1}{2} \Rightarrow t_1 = 2/4s$$

از طرفی با توجه به ثابت بودن شیب نمودار از لحظهٔ صفر تا t_2، که مصرف شتاب متحرک است، شتاب متحرک در این بازه ثابت است. بنابراین، با استفاده از رابطهٔ حرکت با شتاب ثابت، v_2 را می‌یابیم:

$$a = \frac{\Delta v}{\Delta t} \Rightarrow \frac{v_1 - v_0}{t_1 - 0} = \frac{v_2 - v_1}{t_2 - t_1} \xrightarrow[t_1 = 2/4s,\ t_2 = 6s]{v_0 = 8\frac{m}{s},\ v_1 = 0}$$

$$\frac{0 + 8}{2/4} = \frac{v_2 - 0}{6 - 2/4} \Rightarrow v_2 = 12\frac{m}{s}$$

اکنون با توجه به تعریف سرعت متوسط، برای بازهٔ زمانی t_1 تا t_2 داریم:

$$v_{av\,(t_2 - t_1)} = \frac{\Delta x}{\Delta t} = \frac{S_2}{t_2 - t_1} \Rightarrow v_{av} = \frac{\frac{v_2}{2}(t_2 - t_1)}{t_2 - t_1} = \frac{12}{2} = 6\frac{m}{s}$$

(حرکت بر خط راست) (فیزیک ۳، صفحه‌های ۱۵ تا ۲۱)

---

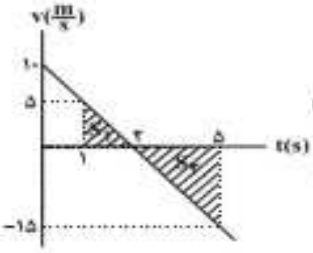
۸۰ – گزینهٔ «۳»

(عباس اعلمی)

ابتدا شتاب حرکت این متحرک را محاسبه می‌کنیم. سرعت در لحظهٔ $t_0 = 0$ برابر $10\frac{m}{s}$ و در لحظهٔ $t = 2s$ که شیب خط مماس بر نمودار، صفر می‌باشد برابر صفر است. بنابراین داریم:

$$v = at + v_0 \Rightarrow 0 = 2a + 10 \Rightarrow a = -5\frac{m}{s^2}$$

اکنون معادلهٔ سرعت زمان را می‌نویسیم و با استفاده از آن سرعت متحرک را در لحظات $t_1 = 1s$ و $t_2 = 5s$ محاسبه نموده و سپس نمودار $v - t$ را رسم می‌کنیم و جابه‌جایی متحرک را که برابر اندازهٔ مساحت سطح محصور بین نمودار $v - t$ و محور زمان است، به‌دست می‌آوریم:



$$t_1 = 1s \Rightarrow v_1 = -5 + 10 = 5\frac{m}{s}$$

$$t_2 = 5s \Rightarrow v_2 = -25 + 10 = -15\frac{m}{s}$$

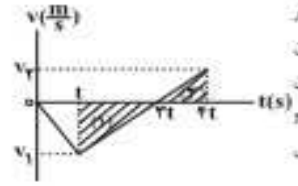
$$\text{مسافت} = \ell = |S_1| + |S_2| \Rightarrow \left|\frac{1}{2} \times 1 \times 5\right| + \left|\frac{1}{2} \times 3 \times (-15)\right| \Rightarrow \ell = 25m$$

(حرکت بر خط راست) (فیزیک ۳، صفحه‌های ۱۵ تا ۲۱)

---

۸۱ – گزینهٔ «۲»

(مهدی براتی)



در بازهٔ زمانی صفر تا $3t$، مساحت زیر نمودار سرعت – زمان برابر با جابه‌جایی متحرک در این بازهٔ زمانی است. با توجه به اینکه مساحت پایین محور زمان می‌باشد، بنابراین، مقدار جابه‌جایی و همچنین سرعت متوسط در این بازهٔ زمانی، منفی خواهد بود. در این حالت داریم:

$$S_{(-3t)} = \frac{v_1 \times 3t}{2} \Rightarrow \Delta x_{(-3t)} = \frac{3tv_1}{2}$$

$$v_{av(0-3t)} = \frac{\Delta x_{(-3t)}}{\Delta t} = \frac{\frac{3tv_1}{2}}{3t - 0} = \frac{v_1}{2}$$

www.mapedu.ir

$$\xrightarrow{v_{av}=-5\frac{m}{s}} -5=\frac{v_1}{2} \Rightarrow v_1=-10\frac{m}{s}$$

اکنون با استفاده از تشابه مثلث‌های (۱) و (۲) سرعت در لحظهٔ $4t$ را می‌یابیم:

$$\frac{v_2}{|v_1|}=\frac{4t-3t}{3t-t} \Rightarrow \frac{v_2}{10}=\frac{1}{2} \Rightarrow v_2=5\frac{m}{s}$$

(مرکت بر خط راست) (فیزیک ۳، صفحه‌های ۱۵ تا ۲۱)

---

۸۲ – گزینهٔ «۲»

(امیرحسین برادران)

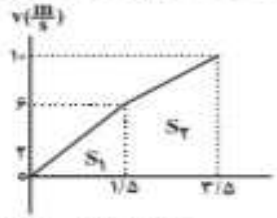
حرکت شامل دو بخش با شتاب ثابت است. از روی نمودار شتاب – سرعت، نمودار سرعت – زمان متحرک را رسم می‌کنیم. بنابراین، ابتدا لحظه‌هایی که سرعت متحرک $6\frac{m}{s}$ و $10\frac{m}{s}$ است را می‌یابیم:

$$v_1=a_1t_1+v_0 \xrightarrow[v_0=0,\ v_1=6\frac{m}{s}]{a_1=4\frac{m}{s^2}} 6=4t_1+0 \Rightarrow t_1=\frac{6}{4}=1/5s$$

$$v_2=a_2t+v_1 \xrightarrow[v_1=6\frac{m}{s},\ v_2=10\frac{m}{s}]{a_2=2\frac{m}{s^2}} 10=2t+6 \Rightarrow t=\frac{4}{2}=2s$$

$$\Rightarrow t_2=1/5+2=3/5s$$

مساحت محصور بین نمودار سرعت – زمان و محور زمان برابر جابه‌جایی است.



$$\Delta x=x_1+x_2=\frac{6\times1/5}{2}+\frac{(6+10)\times2}{2}$$

$$=4/5+16=20/5m$$

$$v_{av}=\frac{\ell}{\Delta t}=\frac{20/5}{3/5}=\frac{41}{7}\frac{m}{s}$$

(مرکت بر خط راست) (فیزیک ۳، صفحه‌های ۱۵ تا ۲۱)

۸۳ – گزینهٔ «۳»

(امیرحسین برادران)

در بازهٔ زمانی که نمودار بالای محور زمان قرار دارد، بردار مکان در جهت مثبت محور xها است. مطابق نمودار در بازهٔ زمانی ۰ تا ۲۵ مکان متحرک مثبت است.

در بازهٔ زمانی‌که شیب خط مماس بر نمودار مکان- زمان مثبت است بردار سرعت در جهت محور xها است. مطابق نمودار در بازهٔ ۰ تا ۱۵ و همچنین در بازهٔ زمانی ۲۵ تا ۶۵ (مجموعاً ۳ ثانیه) متحرک در جهت مثبت در حال حرکت است.

(مرکت بر خط راست) (فیزیک ۳، صفحه‌های ۱۰ تا ۱۰)

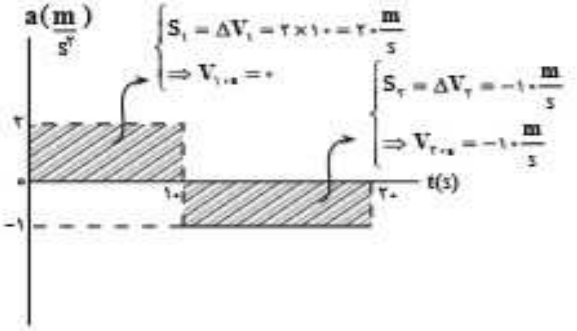
---

۸۴ – گزینهٔ «۲»

(امیرحسین برادران)

با توجه به نمودار شتاب – زمان و سرعت اولیهٔ متحرک، نمودار سرعت – زمان جسم را رسم می‌کنیم.

می‌دانیم سطح محصور بین نمودار شتاب – زمان و محور زمان برابر تغییرات سرعت است.

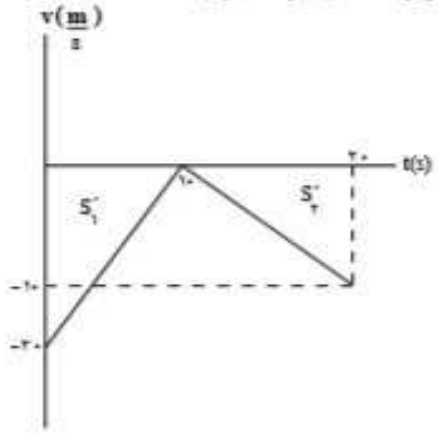


با توجه به نمودار سرعت – زمان مسافت طی شده در ۲۰ ثانیهٔ اول حرکت را به‌دست می‌آوریم:

$$l=s_1'+s_2'=\frac{20\times10}{2}+\frac{10\times10}{2}$$

$$=\frac{300}{2}=150m$$

اکنون مطابق رابطهٔ تندی متوسط، داریم:



$$S_{av} = \frac{l}{\Delta t} \xrightarrow[\Delta t = 2s]{l = 150m}$$

$$S_{av} = \frac{150}{20} = 7/5\frac{m}{s}$$

(حرکت بر خط راست) (الفبای ۳، صفحه‌های ۱۴ تا ۲۱)

---

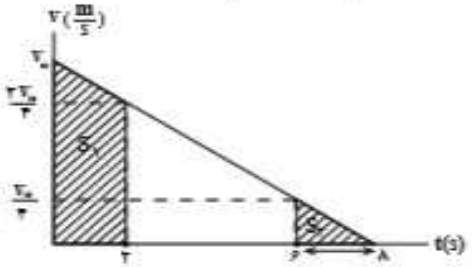
۸۵ – گزینهٔ «۱» (محمدصادق خام‌سیده)

ابتدا شتاب متحرک را می‌یابیم و سپس سرعت آن را در لحظه‌های $t_1 = 2s$ و $t_2 = 6s$ پیدا می‌کنیم:

$$v = at + v_0 \xrightarrow[v=0]{t=8s} 0 = a \times 8 + v_0 \Rightarrow a = -\frac{v_0}{8}$$

$$v_2 = at + v_0 \xrightarrow{t=2s} v_2 = -\frac{v_0}{8} \times 2 + v_0 = \frac{3v_0}{4}$$

$$v_6 = at + v_0 \xrightarrow{t=6s} v_6 = -\frac{v_0}{8} \times 6 + v_0 = \frac{v_0}{4}$$



می‌دانیم سطح محصور بین نمودار سرعت – زمان و محور زمان، برابر مسافت طی شده است. S_1 برابر مساحت ذوزنقه و S_2 برابر مساحت مثلث است.

$$\frac{S_1}{S_2} = \frac{d_1}{d_2} = \frac{\left(\frac{v_0 + \frac{3v_0}{4}}{2}\right) \times 2}{\frac{\frac{v_0}{4} \times 2}{2}} \Rightarrow \frac{d_1}{d_2} = \frac{\frac{7v_0}{4}}{\frac{v_0}{4}}$$

$$\Rightarrow \frac{d_1}{d_2} = 7$$

(حرکت بر خط راست) (الفبای ۳، صفحه‌های ۱۴ تا ۲۱)

۸۶ – گزینهٔ «۳» (امیرحسین برادران)

مبدأ زمان را در لحظه‌ای که متحرک **B** از مبدأ مکان عبور می‌کند در نظر می‌گیریم و معادلهٔ حرکت هر دو متحرک را می‌نویسیم. به همین منظور لازم است، سرعت متحرک **A** و مکان آن را بعد از دو ثانیه بیابیم که این دو سرعت اولیه و مکان اولیهٔ متحرک **A** محسوب می‌شوند.

$$x_A = \frac{1}{2}at^2 + v_0 t + x_0 \xrightarrow[a=4\frac{m}{s^2},\ t=2s]{x_0=0,\ v_0=0}$$

$$x_A = \frac{1}{2} \times 4 \times 2^2 + 0 + 0 \Rightarrow x_A = 8m$$

$$v_A = a_A t + v_{0A} = 4 \times 2 + 0 \Rightarrow v_A = 8\frac{m}{s}$$

در لحظه‌ای که متحرک **B** شروع به حرکت می‌کند، برای متحرک **A** $v_{0A} = 8\frac{m}{s}$ و $x_{0A} = 8m$ است. بنابراین معادلهٔ حرکت آن برابر است با:

$$x_A = \frac{1}{2}at^2 + v_{0A}t + x_{0A} \Rightarrow x_A = \frac{1}{2} \times 4t^2 + 8t + 8$$

$$\Rightarrow x_A = 2t^2 + 8t + 8$$

اکنون معادلهٔ حرکت متحرک **B** را می‌نویسیم. چون سرعت متحرک **B** ثابت است، داریم:

$$x_B = v_B t + x_{0B} \xrightarrow{x_{0B}=0} x_B = v_B t$$

چون در لحظه‌ای که متحرک **B** به متحرک **A** می‌رسد، مکان آن‌ها یکسان است، معادلات مکان آن‌ها را مساوی هم قرار می‌دهیم و v_B را می‌یابیم:

$$x_A = x_B \Rightarrow 2t^2 + 8t + 8 = v_B t \Rightarrow 2t^2 + 8t - v_B t + 8 = 0$$

$$2t^2 + (8 - v_B)t + 8 = 0$$

چون حداکثر تندی متحرک **B** خواسته شده است، این معادله باید یک جواب داشته باشد. بنابراین باید $\Delta = 0$ باشد.

$$\Delta = 0 \Rightarrow (8 - v_B)^2 - 4 \times 2 \times 8 = 0 \Rightarrow (8 - v_B)^2 = 64$$

$$\begin{cases} 8 - v_B = 8 \Rightarrow v_B = 0 \text{ غ‌ق‌ق} \\ 8 - v_B = -8 \Rightarrow v_B = 16\frac{m}{s} \text{ ق‌ق} \end{cases}$$

(حرکت بر خط راست) (الفبای ۳، صفحه‌های ۱۵ تا ۲۱)

---

۸۷ – گزینهٔ «۱» (مصطفی کیانی)

ابتدا مسافت طی شده توسط متحرک در بازهٔ زمانی که با شتاب $2\frac{m}{s^2}$ در حال حرکت است را به‌دست می‌آوریم. با توجه به رابطهٔ مستقل از زمان $(v^2 - v_0^2 = 2a\Delta x)$ داریم:

$$l_1 = 2 \times \left|\frac{0 - 10^2}{2 \times 2}\right| + 75 = 125m$$

اکنون سرعت متحرک را در لحظه‌ای که از مکان $x = 75m$ عبور می‌کند، به‌دست می‌آوریم:

$$v^2 - v_0^2 = 2a\Delta x \xrightarrow[\Delta x = 75m]{v_0 = 10\frac{m}{s},\ a = 2\frac{m}{s^2}} v^2 = 200 + 100 = 400$$

$$\Rightarrow v = 20\frac{m}{s}$$

در لحظه‌ای که متحرک با شتاب $4\frac{m}{s^2}$ از مکان $x = 125m$ عبور می‌کند تندی را به‌دست می‌آوریم:

$$v'^2 - 20^2 = 2(-4)(125 - 75) \Rightarrow v' = 0$$

بنابراین متحرک تا لحظه‌ای که از مکان $x = 125m$ می‌گذرد، دو بار متوقف می‌شود، یک‌بار در بازهٔ زمانی‌که با شتاب ۲ حرکت می‌کند و یک‌بار در مکان $x = 125m$.

بنابراین کل مسافت طی شده توسط متحرک از مبدأ زمان تا لحظهٔ توقف برای دومین‌بار برابر است با: $\ell = 125 + (125 - 75) = 175m$

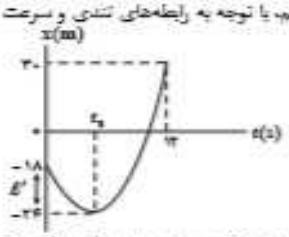
(حرکت بر خط راست) (فیزیک ۳، صفحه‌های ۱۵ تا ۲۱)

---

۸۸ – گزینهٔ «۴»

(امیرحسین برادرانی)

اگر مسافت طی شده توسط متحرک را از لحظهٔ شروع حرکت تا لحظهٔ تغییر جهت برابر ℓ' در نظر بگیریم، با توجه به رابطه‌های تندی و سرعت متوسط داریم:



$$\text{مسافت طی شده} = \ell = \ell' + \ell' + 18 + 30 \Rightarrow \ell = 48 + 2\ell'$$

$$\text{جابه‌جایی} = \Delta x = x_2 - x_1 = 30 - (-18) \Rightarrow \Delta x = 48m$$

$$s_{av} = \frac{\ell}{\Delta t} \xrightarrow{\Delta t = 12} s_{av} = \frac{48 + 2\ell'}{12} = 4 + \frac{\ell'}{6}$$

$$v_{av} = \frac{\Delta x}{\Delta t} = \frac{48}{12} = 4\frac{m}{s}$$

از طرف دیگر داریم:

$$s_{av} - v_{av} = 1 \Rightarrow 4 + \frac{\ell'}{6} - 4 = 1 \Rightarrow \frac{\ell'}{6} = 1 \Rightarrow \ell' = 6m$$

با محاسبهٔ ℓ'، مکان متحرک در لحظهٔ t_2 برابر $x_2 = -18 - 6 = -24m$ است. بنابراین با نوشتن معادلهٔ مکان – زمان حرکت با شتاب ثابت بین دو لحظهٔ (مکث تا t_2) و (t_2 تا $t = 12s$)، شتاب متحرک و به دنبال آن v_{12} را می‌یابیم. برای سادگی در محاسبه $x = -24m$ را مبدأ مکان و t_2 را مبدأ زمان در نظر می‌گیریم. در این حالت $v_2 = 0$ به عنوان سرعت اولیه محسوب می‌شود.

$$\Delta x = \frac{1}{2}at^2 + v_0 t \Rightarrow \begin{cases} 6 = \frac{1}{2}at_2^2 + 0 \\ 30 + 24 = \frac{1}{2}a \times (12 - t_2)^2 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \frac{6}{54} = \frac{\frac{1}{2}at_2^2}{\frac{1}{2}a(12 - t_2)^2} \Rightarrow \frac{1}{9} = \frac{t_2^2}{(12 - t_2)^2} \Rightarrow \frac{1}{3} = \frac{t_2}{12 - t_2} \Rightarrow t_2 = 3s$$

$$6 = \frac{1}{2}at_2^2 \xrightarrow{t_2 = 3s} 6 = \frac{1}{2}a \times 9 \Rightarrow a = \frac{4}{3}\frac{m}{s^2}$$

در آخر سرعت متحرک در لحظهٔ $t = 12s$ برابر است با:

$$v_{12} = a(12 - t_2) + v_2 \xrightarrow{v_2 = 0} v_{12} = \frac{4}{3} \times (12 - 3) \Rightarrow v_{12} = 12\frac{m}{s}$$

راه حل دوم:

$$\frac{\ell - \Delta x}{\Delta t} = 1 \Rightarrow \frac{2\ell'}{12} = 1 \Rightarrow \ell' = 6m$$

$$\begin{cases} -v_0^2 = 2a(-6) \\ v_{12}^2 = 2a(54) \end{cases} \Rightarrow \left(\frac{v_{12}}{v_0}\right)^2 = 9 \Rightarrow v_0 = -\frac{v_{12}}{3}$$

$$\frac{v_0 + v_{12}}{2} = \frac{48}{12} \Rightarrow v_{12} = 12\frac{m}{s}$$

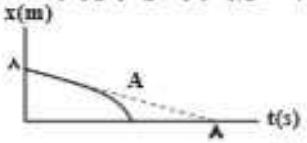
(حرکت بر خط راست) (فیزیک ۳، صفحه‌های ۱۵ تا ۲۱)

۸۹ – گزینهٔ «۲»

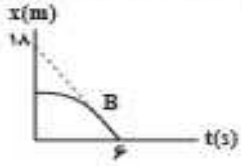
(امیرنصر میرسعید)

تندی در مبدأ زمان، یعنی تندی در لحظهٔ $t = 0$ و تندی در مبدأ مکان، یعنی تندی در لحظه‌ای که متحرک از مبدأ مکان عبور می‌کند، یعنی در لحظهٔ $t = 65$.

بنابراین کافی است شیب مماس بر نمودار مکان – زمان را در لحظه‌های فوق حساب کنیم:



(خط A) $V_0 = \frac{-8}{8} = -1\frac{m}{s}$: شیب خط مماس بر نمودار در لحظهٔ $t = 0$



(خط B) $V_{(t=6s)} = \frac{-18}{6} = -3\frac{m}{s}$: شیب خط مماس بر نمودار در لحظهٔ $t = 6s$

می‌بینیم تندی متحرک در لحظهٔ $t = 6s$ (مبدأ مکان) به اندازهٔ $|\Delta v| = 3 - 1 = 2\frac{m}{s}$ از تندی متحرک در $t = 0$ (مبدأ زمان) بیشتر است.

(حرکت بر خط راست) (فیزیک ۳، صفحه‌های ۹ و ۱۰)

---

۹۰ – گزینهٔ «۴»

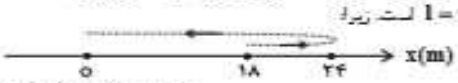
(نصرو ارشوادی‌فرد)

با توجه به این‌که در لحظهٔ $t = 6s$ مکان متحرک برابر $x = 0$ است، ابتدا با استفاده از رابطهٔ سرعت متوسط، مکان اولیهٔ متحرک را می‌یابیم. دقت کنید، در بازهٔ زمانی صفر تا ۶s، سرعت متوسط منفی است.

$$v_{av} = \frac{\Delta x}{\Delta t} = \frac{x - x_0}{t - t_0} \xrightarrow[t=6s, v_{av}=-3\frac{m}{s}]{x=0, t_0=0}$$

$$-3 = \frac{0 - x_0}{6 - 0} \Rightarrow x_0 = 18m$$

با داشتن x_0، می‌توان مسافت طی شده در بازهٔ زمانی صفر تا ۶s را محاسبه و به دنبال آن تندی متوسط را به‌دست آورد. با توجه به شکل زیر، مسافت طی شده برابر $l = 30m$ است. زیرا:



$$l = |24 - 18| + |0 - 24| = 30m$$

تندی متوسط برابر است با: $s_{av} = \frac{l}{\Delta t} = \frac{30}{6 - 0} \Rightarrow s_{av} = 5\frac{m}{s}$

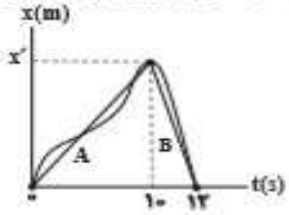
(حرکت بر خط راست) (فیزیک ۳، صفحه‌های ۹ تا ۱۰)

---

۹۱ – گزینهٔ «۴»

(سیاوش فارسی)

برای محاسبهٔ سرعت متوسط بین دو نقطه از نمودار مکان – زمان، باید شیب خط واصل بین دو نقطه را محاسبه کنیم. بنابراین، با توجه به شکل زیر داریم:



$$\frac{(\text{صفر تا } ۱۰۵)v}{(۱۲۵ \text{ تا } ۱۰۵)v'} = \frac{\text{شیب خط } A}{\text{شیب خط } B} = \frac{\frac{x'-0}{۱۰-0}}{\frac{0-x'}{۱۲-۱۰}} = -0/۲ \Rightarrow \vec{v}' = -۵\vec{v}$$

(حرکت بر خط راست) (فیزیک ۳، مقدمه‌ی ۹ و ۱۰)

---

۹۲ – گزینهٔ «۲» (امیرمحمد میرسعید)

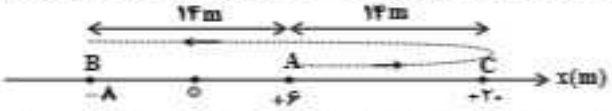
با توجه به جدول ارائه شده، وقتی متحرک از مکان A $(x_A = +۶\vec{i}\,(m))$ تا مکان B $(x_B = -۸\vec{i}\,(m))$ جابجا می‌شود سرعت متوسطش $\vec{v}_{av} = (-۲\frac{m}{s})\vec{i}$ می‌شود

$$\begin{cases} v_{av} = \frac{x_B - x_A}{\Delta t} \\ s_{av} = \frac{l}{\Delta t} \end{cases} \Rightarrow \frac{v_{av}}{s_{av}} = \frac{x_B - x_A}{l} \xrightarrow[x_B=-۸m,\, x_A=+۶m]{v_{av}=-۲\frac{m}{s},\, s_{av}=۶\frac{m}{s}}$$

$$\frac{-۲}{۶} = \frac{-۸-۶}{l} \Rightarrow l = ۲۲m$$

با توجه به این‌که متحرک یک بار تغییر جهت داده است، دو حالت زیر می‌تواند برای این متحرک اتفاق بیفتد.

حالت اول: ابتدا متحرک در جهت محور x حرکت کرده و سپس تغییر جهت می‌دهد. مطابق شکل زیر و با توجه به این‌که مسافت طی شده برابر ۲۲m است، متحرک در نقطهٔ C تغییر جهت می‌دهد که در این لحظه در مکان $x = +۲۰m$ قرار دارد و بردار مکان آن $\vec{r} = +۲۰\vec{i}\,(m)$ خواهد بود که در گزینه‌ها وجود ندارد.



حالت دوم: متحرک ابتدا در خلاف جهت محور x حرکت می‌کند و سپس تغییر جهت می‌دهد. مطابق شکل زیر، وقتی متحرک در نقطهٔ D تغییر جهت می‌دهد، مسافت طی شده توسط آن برابر ۴۲m است. در این حالت بردار مکان آن $\vec{r} = -۲۲\vec{i}\,(m)$ است.

(حرکت بر خط راست) (فیزیک ۳، مقدمه‌ی ۳ تا ۵)

---

۹۳ – گزینهٔ «۲» (امیرحسین برادران)

بررسی عبارات:

الف) نادرست است. در بازهٔ زمانی صفر تا t_1، چون $v > 0$ است، بنابراین متحرک در جهت مثبت محور x در حال حرکت است، لذا $v_{av} > 0$ می‌باشد. از طرف دیگر، چون در این بازهٔ زمانی شیب خطی که دو نقطه از نمودار را به هم متصل می‌کند، منفی است، بنابراین $a_{av} < 0$ خواهد بود.

ب) نادرست است. در نمودار سرعت - زمان، جهت حرکت (جهت بردار سرعت) در لحظاتی عوض می‌شود که نمودار، محور زمان را قطع کند. بنابراین در این نمودار در لحظه‌های t_1 و t_2 جهت حرکت متحرک تغییر می‌کند. در لحظهٔ t_2 جهت بردار شتاب تغییر کرده است.

پ) درست است. می‌دانیم بردار سرعت متوسط و جابه‌جایی متوسط در یک بازهٔ زمانی همواره هم‌جهت‌اند. در بازهٔ زمانی t_2 تا t_3 که نمودار سرعت - زمان زیر محور زمان است، $v < 0$ می‌باشد، لذا متحرک در خلاف جهت محور x در حال حرکت است. بنابراین در این بازهٔ زمانی $v_{av} < 0$ می‌باشد. همچنین، چون شیب خطی که دو نقطه از نمودار را در این بازهٔ زمانی به هم وصل می‌کند، مثبت است، $a_{av} > 0$ خواهد بود.

ت) درست است. در بازهٔ زمانی t_3 تا t_4 که نمودار بالای محور زمان است، $v > 0$ می‌باشد. همچنین در این بازهٔ زمانی که شیب خط مماس بر نمودار $v - t$ در هر لحظه مثبت می‌باشد، $a > 0$ است. بنابراین، a و v هر دو در جهت محور x هستند.

(حرکت بر خط راست) (فیزیک ۳، مقدمه‌ی ۳ تا ۱۲)

---

۹۴ – گزینهٔ «۲» (مهدی شریفی)

در بازهٔ زمانی $t = 0$ تا $t = 5s$ متحرک با سرعت ثابت حرکت می‌کند. بنابراین سرعت در لحظهٔ $t = 3s$ برابر با سرعت متوسط در بازهٔ زمانی صفر تا ۵s است.

$$v_{(3s)} = v_{av(0\to 5s)} = \frac{x_5 - x_0}{t_5 - t_0} = \frac{-5-10}{5-0} = -3\frac{m}{s}$$

در بازهٔ زمانی $t = 5s$ تا $t = 15s$ متحرک با سرعت ثابت حرکت می‌کند. بنابراین سرعت در لحظهٔ ۱۰s برابر سرعت متوسط در بازهٔ زمانی ۵s تا ۱۵s است.

$$v_{(10s)} = v_{av(5s\to 15s)} = \frac{x_{15} - x_5}{t_{15} - t_5} = \frac{10-(-5)}{15-5}$$

$$\Rightarrow v_{(10s)} = 1/5\frac{m}{s}$$

بنابراین شتاب متوسط در بازهٔ زمانی $t_1 = 3s$ تا $t_2 = 10s$ برابر است با:

$$a_{av} = \frac{\Delta v}{\Delta t} = \frac{v_{(10s)} - v_{(3s)}}{10-3} = \frac{1/5-(-3)}{7}$$

$$\Rightarrow a_{av} = \frac{4/5}{7} = \frac{9}{14}\frac{m}{s^2}$$

(حرکت بر خط راست) (فیزیک ۳، مقدمه‌ی ۱۰ تا ۱۵)

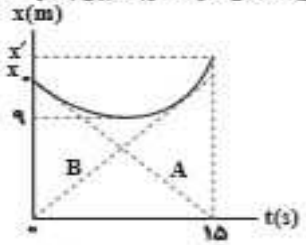
---

۹۵ – گزینهٔ «۱» (امیرحسین برادران)

ابتدا مسافت طی شده در بازهٔ زمانی صفر تا ۱۵s را می‌یابیم:

$$l = (x_0 - 9) + (x' - 9) = x_0 + x' - 18$$

اکنون با استفاده از تعریف تندی متوسط، رابطهٔ بین x_0 و x' را می‌یابیم:



$$s_{av} = \frac{l}{\Delta t} \xrightarrow[\Delta t = 15-0 = 15s]{s_{av} = 1/8\frac{m}{s}}$$

$$1/8 = \frac{x_0 + x' - 18}{15} \Rightarrow 27 = x_0 + x' - 18 \Rightarrow x_0 + x' = 45m$$

در این قسمت، سرعت در لحظه‌های $t = 0$ و $t' = 15s$ را که برابر شیب خط مماس بر نمودار $x - t$ است، می‌یابیم:

$$v_{(t=0)} = A \text{ شیب خط } = \frac{0 - x_0}{15-0} \Rightarrow v_{(t=0)} = -\frac{x_0}{15}$$

$$v_{(t=15s)} = B \text{ شیب خط } = \frac{x' - 0}{15-0} \Rightarrow v_{(t=15s)} = \frac{x'}{15}$$

با داشتن سرعت در لحظه‌های $t = 0$ و $t' = 15s$ به صورت زیر، شتاب متوسط را می‌یابیم:

$$a_{av} = \frac{v_{(t=15s)} - v_{(t=0)}}{\Delta t} = \frac{\frac{x'}{15} - (-\frac{x_0}{15})}{15}$$

www.mapedu.ir

$$\Rightarrow a_{av} = \frac{\frac{x+x_0}{15}}{15} \xrightarrow{x'+x_0=25m} a_{av} = \frac{25}{15\times 15} = \frac{1}{5} = 0/2\frac{m}{s^2}$$

(فیزیک بر نقد راست) (فیزیک ۳، مقدمه‌ی ۲ ت ۲)

---

۹۶ – گزینهٔ «۱» (مهدی شریفی)

ابتدا معادلهٔ مکان - زمان دو متحرک را به‌دست می‌آوریم:

$$v_A = A\text{ شیب خط} = \frac{0-16}{4-0} = -4\frac{m}{s}$$

$$v_B = B\text{ شیب خط} = \frac{0-(-2)}{2-0} = 1\frac{m}{s}$$

با توجه به نمودار، دو متحرک با سرعت ثابت حرکت می‌کنند، پس می‌توان برای هر متحرک معادلهٔ مکان - زمان آن را نوشت:

$$x_A = v_A t + x_{0A} \xrightarrow{x_{0A}=16m} x_A = -4t + 16$$

$$x_B = v_B t + x_{0B} \xrightarrow{x_{0B}=-2m} x_B = t - 2$$

اگر فاصلهٔ دو متحرک را d در نظر بگیریم، داریم:

$$d = |x_A - x_B| \Rightarrow d = |(-4t+16) - (t-2)|$$

$$\Rightarrow d = |-5t+18| \xrightarrow{d=3m}$$

$$\begin{cases} -5t_1 + 18 = 3 \\ -5t_2 + 18 = -3 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} -5t_1 = -15 \Rightarrow t_1 = 3s \\ -5t_2 = -21 \Rightarrow t_2 = 4/2s \end{cases}$$

بنابراین اختلاف زمانی برابر $\Delta t = 4/2 - 3 = 1/2s$ است.

(فیزیک بر نقد راست) (فیزیک ۳، مقدمه‌ی ۳ ت ۱۵)

---

۹۷ – گزینهٔ «۱» (امیرناصر میرسعید)

اگر مدت زمان حرکت خودروی A را $t_A = t$ در نظر بگیریم، مدت زمان حرکت خودروی B که ۲۰ دقیقه دیرتر حرکت کرده و ۲۰ دقیقه زودتر به مقصد رسیده است (یعنی زمان حرکتش ۴۰ دقیقه، معادل $\frac{40}{60} = \frac{2}{3}h$، کمتر است) برابر $t_B = t - \frac{2}{3}h$ خواهد بود. بنابراین، با توجه به این‌که نقطهٔ شروع و پایان برای هر دو خودرو یکسان است، لذا جابه‌جایی آن‌ها نیز یکسان خواهد بود، در نتیجه، بنا به رابطهٔ $\Delta x = vt$ در حرکت با سرعت ثابت می‌توان نوشت:

$$\Delta x_A = \Delta x_B \Rightarrow v_A t_A = v_B t_B \xrightarrow[t_B = t - \frac{2}{3}h,\ v_B = 60\frac{km}{h}]{t_A = t,\ v_A = 50\frac{km}{h}}$$

$$50t = 60\times(t - \frac{2}{3}) \Rightarrow 50t = 60t - 40 \Rightarrow 40 = 10t \Rightarrow t = 4h$$

در آخر، فاصلهٔ نقطهٔ شروع حرکت تا مقصد برابر است با:

$$\Delta x_A = v_A t_A \xrightarrow[v_A = 50\frac{km}{h}]{t_A = t = 4h} \Delta x_A = 50\times 4 = 200km$$

(فیزیک بر نقد راست) (فیزیک ۳، مقدمه‌ی ۳ ت ۱۵)

---

۹۸ – گزینهٔ «۲» (محمد منصوری)

باید مجموع مسافت‌های طی شده توسط متحرک‌ها ۱۰۰۰ متر شود. بنابراین می‌توان نوشت:

$$|\Delta x_1| + |\Delta x_2| = 1000m \xrightarrow{\Delta x = vt} |v_1 t| + |v_2 t| = 1000$$

$$\xrightarrow[v_2 = 25\frac{m}{s}]{v_1 = 15\frac{m}{s}} 15t + 25t = 1000 \Rightarrow 40t = 1000 \Rightarrow t = 25s$$

(فیزیک بر نقد راست) (فیزیک ۳، مقدمه‌ی ۳ ت ۱۵)

---

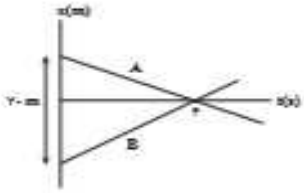
۹۹ – گزینهٔ «۱» (سوره علیمه موحدالفی)

مطابق نمودار داده شده، متحرک A در خلاف جهت محور x و متحرک B در جهت محور در حال حرکت است. بنابراین، اگر تندی متحرک A را v در نظر بگیریم، سرعت متحرک A که خلاف جهت محور x است، برابر $v_A = -v$ و سرعت متحرک B که دو برابر سرعت متحرک A است، برابر با $v_B = +2v$ خواهد بود. بنابراین، با استفاده از معادلهٔ حرکت با سرعت ثابت و با توجه به این‌که در لحظهٔ $t = 4s$، مکان هر دو متحرک $x_A = x_B = 0$ می‌شود، می‌توان نوشت:

$$x_A = v_A t + x_{0A} \xrightarrow{v_A = -v} 0 = -v\times 4 + x_{0A} \Rightarrow x_{0A} = 4v$$

$$x_B = v_B t + x_{0B} \xrightarrow{v_B = 2v} 0 = 2v\times 4 + x_{0B} \Rightarrow x_{0B} = -8v$$

از طرف دیگر، با توجه به نمودار، اختلاف مکان اولیهٔ دو متحرک برابر $30m$ است، بنابراین داریم:



$$x_{0A} - x_{0B} = 30 \Rightarrow 4v - (-8v) = 30 \Rightarrow$$

$$12v = 30 \Rightarrow v = 2/5\frac{m}{s}$$

اکنون با داشتن v، مکان اولیهٔ متحرک B را می‌یابیم و به دنبال آن، معادلهٔ حرکتش را می‌نویسیم:

$$x_{0B} = -8v \xrightarrow{v = 2/5\frac{m}{s}} x_{0B} = -8\times 2/5 = -20m$$

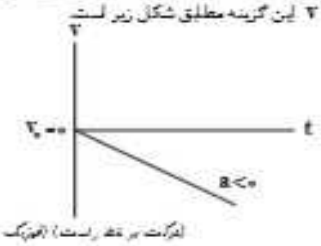
$$x_B = v_B t + x_{0B} \xrightarrow[x_{0B} = -20m]{v_B = 2v = 2\times 2/5 = 5\frac{m}{s}} x_B = 5t - 20$$

(فیزیک بر نقد راست) (فیزیک ۳، مقدمه‌ی ۳ ت ۱۵)

---

۱۰۰ – گزینهٔ «۲» (محمدجواد حسینی)

در صورتی حرکت یک جسم شتاب‌دار کندشونده است، که علامت کمیت‌های سرعت و شتاب آن مخالف هم باشند. به‌طوری‌که همواره $av < 0$ باشد. نکتهٔ دیگر، این‌که، اگر سرعت اولیهٔ جسمی صفر و شتاب آن ثابت باشد، همواره حرکت آن شتاب‌دار تندشونده خواهد بود. بنابراین، در گزینهٔ «۲» که $v_0 = 0$ است، حرکت جسم، شتاب‌دار تندشونده می‌باشد و نمودار $v - t$ این گزینه مطابق شکل زیر است.



(فیزیک بر نقد راست) (فیزیک ۳، مقدمه‌ی ۳ ت ۱۵)

---

۱۰۱ – گزینهٔ «۳» (محمدجواد حسینی)

ابتدا با استفاده از معادلهٔ حرکت با سرعت ثابت و مکان‌های داده شده در لحظه‌های $t_1 = 2s$ و $t_2 = 5s$، سرعت متحرک و مکان اولیهٔ آن را می‌یابیم:

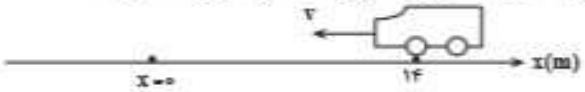
www.mapedu.ir

$$x = vt + x_0 \Rightarrow \begin{cases} \underset{x_1=10\,m}{\square\square\square\square} \rightarrow 10 = v \times 2 + x_0 \\ \underset{x_2=2\,m}{\square\square\square\square} \rightarrow 2 = v \times 5 + x_0 \end{cases}$$

$$\Rightarrow 8 = -3v \Rightarrow v = -2\frac{m}{s}, x_0 = 10 - 2 \times (-2) = 14m$$

$$x = vt + x_0 \Rightarrow x = -2t + 14$$

با توجه به شکل زیر و معادلهٔ حرکت، مشخص است که، متحرک از مکان $x_0 = +14m$ در خلاف جهت محور شروع به حرکت کرده است. بنابراین، مدت زمانی که متحرک فاصلهٔ مسافت بین $x_0 = +14m$ تا مبدأ مکان $(x = 0)$ را طی می‌کند، به مبدأ مکان نزدیک می‌شود که به‌صورت زیر به‌دست می‌آید.



$$x = -2t + 14 \Rightarrow 0 = -2t + 14 \Rightarrow t = 7s$$

(فیزیک ۳، مقدمه‌ی ۳: ۱۵ تا ۲۱)

---

۱۰۲ – گزینهٔ «۴» (امیررضا رضوانی‌فرد)

با توجه به این‌که نمودار سهمی نسبت به محور $t = 6s$ (رأس سهمی) متقارن است، اندازهٔ سرعت متحرک در لحظه‌های $t = 0$ و $t = 12s$ یکسان خواهد بود. بنابراین، کافی است اندازهٔ سرعت در لحظهٔ $t = 0$ را بیابیم. با توجه به این‌که در لحظهٔ $t_2 = 6s$، شیب خط مماس بر نمودار $x - t$ که نشان‌دهندهٔ سرعت لحظه‌ای می‌باشد، برابر صفر است، با استفاده از رابطهٔ زیر می‌توان نوشت:

$$t_1 = 0 \Rightarrow x_1 = -7m, v_1 = v_0$$

$$t_2 = 6s \Rightarrow x_2 = 5m, v_2 = 0$$

$$\Delta x = \frac{v_1 + v_2}{2}(\Delta t) \Rightarrow 5 - (-7) = \frac{v_0 + 0}{2} \times (6 - 0) \Rightarrow 12 = v_0 \times 3$$

$$\Rightarrow v_0 = 4\frac{m}{s}$$

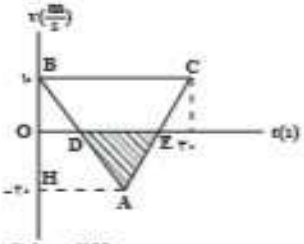
بنابراین تندی متحرک در لحظهٔ $t = 12s$، برابر $4\frac{m}{s}$ می‌باشد.

(فیزیک ۳، مقدمه‌ی ۱۵ تا ۲۱)

---

۱۰۳ – گزینهٔ «۳» (محمدکاظم منداری)

در مدت زمانی که نمودار $v - t$ زیر محور t می‌باشد، سرعت منفی است و متحرک در خلاف جهت محور x در حال حرکت می‌باشد. بنابراین کافی است، مساحت سطح هاشور خورده را بیابیم. به همین منظور با استفاده از تشابه دو مثلث ABC و ADE می‌توان نوشت:



$$\frac{BC}{DE} = \frac{BH}{OH} \quad \underset{OH=20}{\square\square\square\square} \rightarrow \frac{20}{DE} = \frac{20}{20} \Rightarrow DE = 20$$

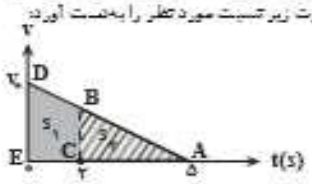
بزرگی جابه‌جایی در بازهٔ زمانی D تا E برابر با مساحت سطح هاشور خورده است. بنابراین داریم:

$$|\Delta x| = \frac{DE \times OH}{2} \Rightarrow \Delta x = \frac{20 \times 20}{2} = 200m$$

(فیزیک ۳، مقدمه‌ی ۱۵ تا ۲۱)

۱۰۴ – گزینهٔ «۱» (محمدکاظم منداری)

می‌دانیم سطح محصور بین نمودار سرعت – زمان و محور زمان برابر جابه‌جایی متحرک است. بنابراین، اگر مطابق شکل زیر، نمودار $v - t$ را رسم کنیم، از تشابه مثلث‌های ABC و ADE می‌توان به‌صورت زیر نسبت مورد نظر را به‌دست آورد:



$$\frac{DE}{BC} = \frac{EA}{CA} \quad \underset{CA=2}{\square\square\square\square} \rightarrow \frac{DE}{BC} = \frac{5}{2} \Rightarrow DE = \frac{5}{2}BC$$

$$\Delta x_1 = S_1 = \frac{DE + BC}{2} \times 2 \Rightarrow \Delta x_1 = \frac{5}{2}BC + BC = \frac{8}{2}BC$$

$$\Delta x_2 = S_2 = \frac{BC \times CA}{2} \Rightarrow \Delta x_2 = \frac{BC \times 2}{2} = \frac{2}{2}BC$$

در آخر، داریم:

$$\frac{\Delta x_1}{\Delta x_2} = \frac{\frac{8}{2}BC}{\frac{2}{2}BC} \Rightarrow \frac{\Delta x_1}{\Delta x_2} = \frac{16}{9}$$

(فیزیک ۳، مقدمه‌ی ۱۱ و ۲۰)

---

۱۰۵ – گزینهٔ «۴» (محمدجواد سوری)

ابتدا با استفاده از رابطهٔ $\Delta x = \frac{v + v_0}{2}\Delta t$، سرعت اولیه متحرک را می‌یابیم:

$$x - x_0 = \frac{v + v_0}{2} t \Delta \quad \underset{\Delta t = 2 \to -2s,\ v = 1\frac{m}{s}}{\square\square\square\square\square\square\square\square\square\square} \rightarrow$$

$$12 - (-20) = \frac{10 + v_0}{2} \times 4 \Rightarrow 16 = 10 + v_0 \Rightarrow v_0 = 6\frac{m}{s}$$

اکنون، شتاب متحرک را می‌یابیم:

$$a = \frac{v - v_0}{\Delta t} \quad \underset{\Delta t = 2s}{\square\square\square\square\square\square\square\square\square\square} \rightarrow a = \frac{10 - 6}{4} = 1\frac{m}{s^2}$$

با توجه به این‌که ثانیهٔ هفتم برابر بازهٔ زمانی $t_1 = 6s$ تا $t_2 = 7s$ است، سرعت متحرک را با استفاده از معادلهٔ سرعت در حرکت با شتاب ثابت در لحظات 6s و 7s پیدا می‌کنیم:

$$v = at + v_0 \quad \underset{v_0 = 6\frac{m}{s}}{\square\square\square\square\square\square} \rightarrow v = t + 6 \begin{cases} t_1 = 6s \Rightarrow v_1 = 6 + 6 = 12\frac{m}{s} \\ t_2 = 7s \Rightarrow v_2 = 7 + 6 = 13\frac{m}{s} \end{cases}$$

چون شتاب ثابت است، $v_{av} = \frac{v_1 + v_2}{2}$ می‌باشد. از طرف دیگر، چون متحرک تغییر جهت نمی‌دهد، $s_{av} = |v_{av}|$ است. بنابراین داریم:

$$s_{av} = |v_{av}| = \frac{v_1 + v_2}{2} = \frac{12 + 13}{2} \Rightarrow s_{av} = 12/5\frac{m}{s}$$

(فیزیک ۳، مقدمه‌ی ۱۵ تا ۲۱)

---

۱۰۶ – گزینهٔ «۳» (امیرحسین برازاده)

ابتدا با استفاده از رابطهٔ مستقل از زمان، تندی قطار را در لحظهٔ رسیدن به پل به‌دست می‌آوریم:

$$v^2 - v_0^2 = 2a\Delta x \xrightarrow[a=0/5\frac{m}{s^2}]{\Delta x=100m} v^2 - 0 = 2\times 0/5\times 100$$

$$\Rightarrow v = 10\frac{m}{s}$$

اکنون مسافت و زمانی را که قطار بایستی بپیماید تا تندی آن به $108\frac{km}{h}$ برسد، می‌یابیم:

$$v'^2 - v^2 = 2a\Delta x' \xrightarrow[a=0/5\frac{m}{s^2},\ v=10\frac{m}{s}]{v'=108\frac{km}{h}=30\frac{m}{s}}$$

$$900 - 100 = 2\times 0/5\times \Delta x' \Rightarrow \Delta x' = 800m$$

$$t_1 = \frac{\Delta v}{a} = \frac{v' - v}{a} \Rightarrow t_1 = \frac{30-10}{0/5} = 40s$$

مسافتی که قطار باید طی کند تا بطور کامل از پل خارج شود، برابر مجموع طول پل و قطار می‌باشد و برابر است با:

$$L_{کل} = L_{پل} + L_{قطار} \xrightarrow[L_{قطار}=400m]{L_{پل}=1300m} L_{کل} = 1300 + 400 = 1700m$$

از ۱۷۰۰ متری که قطار باید طی کند، $800m$ آن با شتاب ثابت طی شده است و $\Delta x'' = 1700 - 800 = 900m$ باقیمانده است که باید آن را با سرعت ثابت طی کند. بنابراین داریم:

$$t_2 = \frac{\Delta x''}{v'} = \frac{900}{30} = 30s$$

در نتیجه، کل مدت زمانی که قطار بر روی پل قرار دارد، برابر است با:

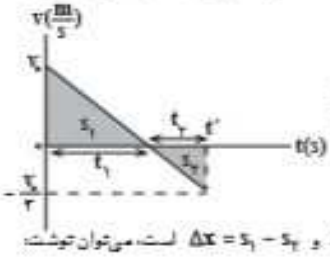
$$t_{کل} = t_1 + t_2 = 40 + 30 \Rightarrow t_{کل} = 70s$$

(فیزیک ۳، صفحه‌ی ۱۳ تا ۲۰)

---

۱۰۷ – گزینهٔ «۱» (امیرحسین برادران)

چون در ابتدا متحرک در حال دور شدن از مبدأ مکان و در لحظهٔ t' در حال نزدیک شدن به مبدأ مکان است، لذا جهت حرکت در لحظهٔ t' مخالف جهت حرکت در لحظهٔ $t = 0$ (مبدأ زمان) است. بنابراین، با رسم نمودار سرعت – زمان و محاسبهٔ مساحت سطح محصور بین نمودار سرعت – زمان و محور زمان بصورت زیر، نسبت $\frac{\ell}{\Delta x}$ را می‌یابیم. در ابتدا با استفاده از تشابه دو مثلث S_1 و S_2 داریم:



$$\frac{v_0}{\frac{v_0}{2}} = \frac{t_1}{t_2} \Rightarrow \frac{t_1}{t_2} = 2 \Rightarrow t_1 = 2t_2$$

در ادامه، با توجه به این‌که $\ell = S_1 + S_2$ و $\Delta x = S_1 - S_2$ است، می‌توان نوشت:

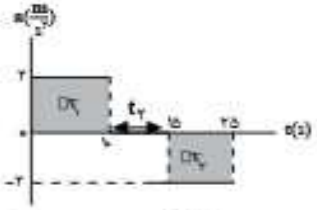
$$\frac{\ell}{\Delta x} = \frac{S_1 + S_2}{S_1 - S_2} \xrightarrow[S_2 = \frac{\frac{v_0}{2}\times t_2}{2} = \frac{v_0 t_2}{4}]{S_1 = \frac{v_0 t_1}{2}} \frac{\ell}{\Delta x} = \frac{\frac{v_0 t_1}{2} + \frac{v_0 t_2}{4}}{\frac{v_0 t_1}{2} - \frac{v_0 t_2}{4}} \Rightarrow$$

$$\frac{\ell}{\Delta x} = \frac{\frac{2t_1 + t_2}{4}}{\frac{2t_1 - t_2}{4}} \xrightarrow{\text{ساده}} \frac{\ell}{\Delta x} = \frac{4t_2 + t_2}{4t_2 - t_2} = \frac{10t_2}{8t_2} \Rightarrow \frac{\ell}{\Delta x} = \frac{5}{4}$$

(فیزیک ۳، صفحه‌ی ۱۵ تا ۲۰)

۱۰۸ – گزینهٔ «۳» (مصطفی کیانی)

می‌دانیم سطح محصور بین نمودار $a - t$ و محور t برابر Δv است. بنابراین، با محاسبهٔ Δv در بازه‌های زمانی مختلف، سرعت در لحظه‌های $10s$، $15s$ و $25s$ را می‌یابیم و سپس با رسم نمودار $v - t$ و محاسبهٔ سطح زیر نمودار آن، مسافت طی شده را می‌یابیم:



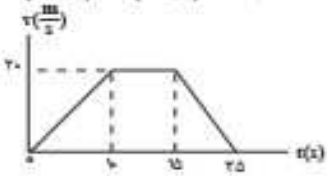
$$\Delta v_1 = 2\times 10 = 20\frac{m}{s},\ \Delta v_2 = -2\times 10 = -20\frac{m}{s}$$

$$v_{(t=10s)} = v_0 + \Delta v \xrightarrow[\Delta v_1 = 20\frac{m}{s}]{} v_{(t=10s)} = 0 + 20 = 20\frac{m}{s}$$

چون در بازهٔ زمانی $10s$ تا $15s$ شتاب صفر است، داریم:

$$v_{(t=15s)} = v_{(t=10s)} \Rightarrow v_{(t=15s)} = 20\frac{m}{s}$$

$$v_{(t=25s)} = v_{(t=15s)} + \Delta v_2 = 20 + (-20) = 0$$



اکنون مساحت زیر نمودار $v - t$ را که برابر مسافت طی شده است، به‌دست می‌آوریم:

$$\ell = |\text{مساحت ذوزنقه}| = \left|\frac{(5+25)}{2}\times 20\right| \Rightarrow \ell = 300m$$

در آخر تندی متوسط را حساب می‌کنیم:

$$s_{av} = \frac{\ell}{\Delta t} \xrightarrow{\Delta t = 25s} s_{av} = \frac{300}{25} = 12\frac{m}{s}$$

(فیزیک ۳، صفحهٔ ۲۱)

www.mapedu.ir

۱۰۹ – گزینهٔ «۱»

(امیرحسین برازاده)

در حرکت با شتاب ثابت، اگر بردار سرعت اولیّه و شتاب خلاف جهت هم باشند، نوع حرکت ابتدا کندشونده و سپس تندشونده است و اگر متحرک از حال سکون شروع به حرکت کند یا بردار سرعت اولیه و شتاب هم‌جهت باشند، نوع حرکت متحرک پیوسته تندشونده است. بررسی گزینه‌های تادرست:

گزینهٔ «۲»: بردار سرعت متوسّط با بردار جابه‌جایی همواره هم‌جهت است. در صورتی که نوع حرکت متحرک پیوسته تندشونده باشد، بردار سرعت متوسّط و شتاب همواره هم‌جهت‌اند.

گزینهٔ «۳»: در حرکت با شتاب ثابت، یا نوع حرکت متحرک پیوسته تندشونده است (بردار سرعت اولیه و شتاب هم‌جهت‌اند)، یا نوع حرکت ابتدا کندشونده و سپس تندشونده است.

گزینهٔ «۴»: اگر جهت بردار مکان ثابت باشد، نوع حرکت می‌تواند پیوسته تندشونده یا ابتدا کندشونده و سپس تندشونده باشد.

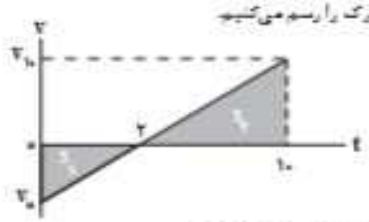
(فرگشت در خط راست) (فیزیک ۳، مقدمه‌ی ۱۵ تا ۲۱)

---

۱۱۰ – گزینهٔ «۲»

(زهره آقامحمدی)

چون شیب خط مماس بر نمودار در لحظه $t=0$ منفی است، لذا سرعت اولیهٔ متحرک منفی می‌باشد. از طرفی، در لحظهٔ $t=25$ شیب خط مماس بر نمودار صفر است، بنابراین سرعت در این لحظه صفر است. با توجه به این اطلاعات، نمودار سرعت زمان متحرک را رسم می‌کنیم:



از تشابه مثلث‌های هاشور زده شده داریم:

$$\frac{|v_0|}{2}=\frac{v_{10}}{8}\Rightarrow v_{10}=4|v_0|$$

از طرفی با استفاده از رابطهٔ تندی متوسط در بازهٔ زمانی صفر تا ۱۰ ثانیه داریم:

$$s_{av}=\frac{\ell}{\Delta t}\xrightarrow{\ell=|s_1|+|s_2|}s_{av}=\frac{s_1+s_2}{\Delta t}\xrightarrow[s_2=\frac{v_{10}\times 8}{2}=16|v_0|]{|s_1|=\frac{|v_0|\times 2}{2},\ s_{av}=8/5\frac{m}{s}}$$

$$8/5=\frac{|v_0|+16|v_0|}{10}\Rightarrow 85=17|v_0|\Rightarrow|v_0|=5\Rightarrow v_0=-5\frac{m}{s}$$

با داشتن v_0، چون در لحظهٔ $t=25$ سرعت صفر شده است، لذا شتاب حرکت را می‌یابیم:

$$v=at+v_0\Rightarrow 0=a\times 2-5\Rightarrow a=\frac{5}{2}\frac{m}{s^2}$$

اکنون معادلهٔ مکان-زمان را نوشته و سپس حساب می‌کنیم در کدام لحظه $x=0$ شده است:

$$x=\frac{1}{2}at^2+v_0t+x_0\xrightarrow{x_0=0}x=\frac{5}{4}t^2-5t\xrightarrow{t=25}x_{25}=-5m$$

$$\ell_{0\to 25}=10m$$

مطابق نمودار مکان-زمان از لحظهٔ صفر تا لحظهٔ $t=25$ بردار مکان متحرک خلاف جهت محور x است. دقت کنید متحرک به مدت ۲۵ در خلاف جهت محور x حرکت نموده است (از لحظهٔ صفر تا $t=25$)، اما بردار مکان آن ۲۵ در خلاف جهت محور x بوده است. بنابراین تندی متوسط در این بازه برابر است با:

$$S_{av}=\frac{\ell}{\Delta t}=\frac{10}{4}=2/5\frac{m}{s}$$

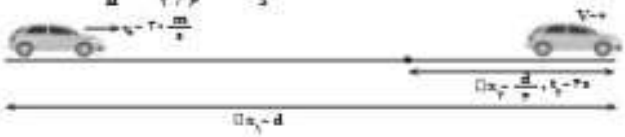
(فرگشت در خط راست) (فیزیک ۳، مقدمه‌ی ۱۵ تا ۲۱)

۱۱۱ – گزینهٔ «۴»

(امیرحسین برازاده)

ابتدا تندی اتومبیل را برحسب متر بر ثانیه محاسبه می‌کنیم و سپس با استفاده از رابطهٔ $\Delta x=\frac{1}{2}at^2+v_0t$، کل زمان حرکت را می‌یابیم:

$$v_0=108\frac{km}{h}=\frac{108}{3/6}=30\frac{m}{s}$$



$$\Delta x=\frac{1}{2}at^2\xrightarrow{a=\text{ثابت}}\frac{\Delta x_1}{\Delta x_2}=(\frac{t_1}{t_2})^2\xrightarrow{t_2=4s}\frac{d}{\frac{d}{2}}=(\frac{t_1}{4})^2$$

$$\Rightarrow 4=(\frac{t_1}{4})^2\Rightarrow 2=\frac{t_1}{4}\Rightarrow t_1=8s$$

با داشتن تندی اتومبیل در ابتدا و انتهای مسیر، به صورت زیر، d را می‌یابیم:

$$d=\frac{v_0+v}{2}\Delta t\xrightarrow[\Delta t=t_1=8s]{v_0=30\frac{m}{s},\ v=0}d=\frac{30+0}{2}\times 8=120m$$

(فرگشت در خط راست) (فیزیک ۳، مقدمه‌ی ۱۵ تا ۲۱)

---

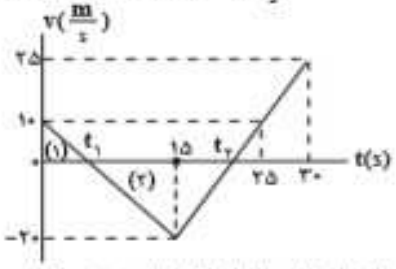
۱۱۲ – گزینهٔ «۲»

(امیرو ابوالفضل)

می‌دانیم مساحت محصور بین نمودار شتاب – زمان و محور زمان، برابر تغییرات سرعت و مساحت محصور بین نمودار سرعت – زمان و محور زمان برابر جابه‌جایی متحرک می‌باشد. بنابراین، ابتدا نمودار $v-t$ را رسم می‌کنیم:

$$v_{15}=v_0+\Delta v_1=10+(-2\times 15)=-20\frac{m}{s}$$

$$v_{30}=v_{15}+\Delta v_2=-20+(15\times 3)=25\frac{m}{s}$$



اکنون از تشابه مثلث‌های (۱) و (۲)، لحظهٔ t_1 را به‌دست می‌آوریم:

$$\frac{10}{t_1}=\frac{20}{15-t_1}\Rightarrow t_1=5s$$

با توجه به این‌که شتاب متحرک در بازهٔ زمانی $t=15s$ تا $t'=30s$، ثابت و برابر $3\frac{m}{s^2}$ است، سرعت متحرک را در لحظهٔ ۲۵s به‌دست می‌آوریم:

$$v_{25}=at+v_{15}=3\times 10-20=10\frac{m}{s}$$

$$\begin{cases}\text{جابه‌جایی در ۵ ثانیهٔ آخر}=(\frac{10+25}{2})\times 5=\frac{175}{2}m\\ \text{جابه‌جایی در ۵ ثانیهٔ اول}=\frac{10\times 5}{2}=25m\end{cases}$$

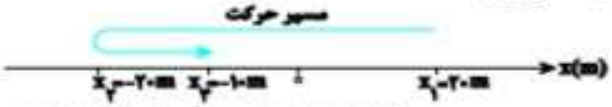
$$\Rightarrow\frac{\text{جابه‌جایی در ۵ ثانیهٔ آخر}}{\text{جابه‌جایی در ۵ ثانیهٔ اول}}=\frac{\frac{175}{2}}{25}=3/5$$

(فرگشت در خط راست) (فیزیک ۳، مقدمه‌ی ۱۵ تا ۲۱)

www.mapedu.ir

۱۱۳ – گزینهٔ «۱» (مهدی براتی)

ابتدا جابه‌جایی و مسافت طی شده توسط متحرک در بازهٔ زمانی t_1 تا t_2 را به‌دست می‌آوریم:



جابه‌جایی: $\Delta x = x_2 - x_1 = -10 - 20 = -30m$

مسافت طی‌شده: $L = |x_3 - x_1| + |x_3 - x_2| = |-20-20| + |-10-(-20)| = 50m$

اکنون نسبت بزرگی سرعت متوسط به تندی متوسط را محاسبه می‌کنیم:

$$\frac{|v_{av}|}{s_{av}} = \frac{\frac{|\Delta x|}{\Delta t}}{\frac{L}{\Delta t}} = \frac{|\Delta x|}{L} = \frac{30}{50} = \frac{3}{5}$$

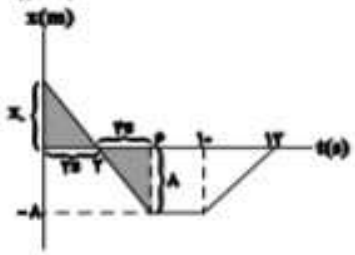
(فیزیک ۳، صفحه‌های ۴۰ و ۴۱)

---

۱۱۴ – گزینهٔ «۲» (علی عاقلی)

با توجه به نمودار، در بازهٔ زمانی صفر تا ۶s که شیب خط مماس بر نمودار منفی است، سرعت متحرک نیز منفی می‌باشد، لذا متحرک در خلاف جهت محور x در حال حرکت است. بنابراین، ابتدا با استفاده از تشابه مثلث‌های هاشورخورده x_0 را می‌یابیم:

$$\frac{x_0}{8} = \frac{3}{2} \Rightarrow x_0 = 12m$$



اکنون اندازهٔ جابه‌جایی متحرک را در بازهٔ زمانی صفر تا ۶s می‌یابیم:

$$\Delta x = x_{6sec} - x_0 = -8 - 4 = -12m$$

$$\Rightarrow |\Delta x| = 12m$$

(فیزیک ۳، صفحه‌های ۴۰ و ۴۱)

---

۱۱۵ – گزینهٔ «۱» (علی عاقلی)

در مدت ۲ ثانیهٔ اول، در لحظهٔ $t = 1s$ که شیب خط مماس بر نمودار صفر شده و علامت آن تغییر می‌کند، جهت حرکت متحرک عوض شده است و در بازهٔ ۱s تا ۲s که شیب خط واصل منفی است، سرعت متوسط نیز منفی می‌باشد.

(فیزیک ۳، صفحه‌های ۴۰ و ۴۱)

---

۱۱۶ – گزینهٔ «۴» (مهدی براتی)

می‌دانیم شیب خط مماس بر نمودار مکان – زمان در هر لحظه برابر با سرعت در آن لحظه است. در نتیجه، از آنجا که متحرک از حال سکون شروع به حرکت کرده، شیب خط مماس بر نمودار در لحظهٔ $t = 0$، باید صفر باشد. (ردّ گزینهٔ «۱»)

از طرف دیگر، چون متحرک پس از شروع حرکت در جهت مثبت محور x در حال حرکت بوده است، در نتیجه شیب خط مماس بر نمودار مکان – زمان آن پس از $t = 0$ باید مثبت باشد. (ردّ گزینهٔ ۲)

از آنجایی‌که متحرک پس از شروع حرکت در لحظهٔ t دوباره متوقف می‌شود، لذا شیب نمودار مکان – زمان در این لحظه باید صفر شود که در گزینهٔ «۴» این‌گونه است.

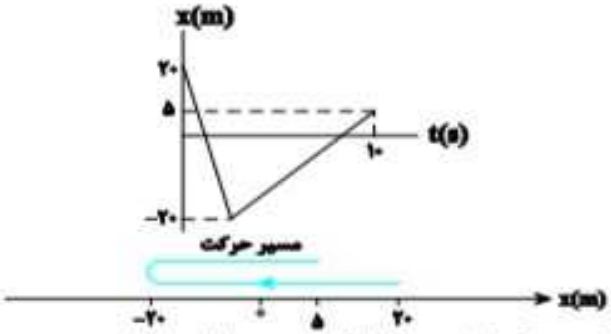
(فیزیک ۳، صفحه‌های ۴۰ و ۴۱)

---

۱۱۷ – گزینهٔ «۳» (مهدی براتی)

ابتدا با استفاده از رابطهٔ سرعت متوسط، مکان متحرک در لحظهٔ $t = 10s$ را می‌یابیم:

$$V_{av} = \frac{x_{(10s)} - x_0}{\Delta t} \Rightarrow -1/5 = \frac{x_{(10s)} - 20}{10} \Rightarrow x_{(10s)} = 5m$$



اکنون مسافت طی شده و به دنبال آن، تندی متوسط را می‌یابیم. با توجه به مسیر حرکت، مسافت طی شده توسط متحرک در کل حرکت برابر است با:

$$L = |-20-20| + |5-(-20)| = 40 + 25 = 65m$$

تندی متوسط برابر است با:

$$S_{av} = \frac{L}{\Delta t} = \frac{65}{10} = 6/5\frac{m}{s}$$

(فیزیک ۳، صفحه‌های ۴۰ و ۴۱)

---

۱۱۸ – گزینهٔ «۱» (امیرحسین براری‌فر)

شیب خط مماس بر نمودار مکان – زمان برابر با سرعت لحظه‌ای است. چون در ابتدا و انتهای بازهٔ زمانی سرعت متحرک منفی است پس شیب خط مماس بر نمودار در این دو لحظه باید منفی باشد. (ردّ گزینه‌های ۲ و ۳) از طرفی چون سرعت متوسط مثبت است، پس باید $x_{12s} > x_0$ (ردّ گزینهٔ «۴»)

(فیزیک ۳، صفحه‌های ۴۰ و ۴۱)

---

۱۱۹ – گزینهٔ «۳» (امیرحسین براری‌فر)

بررسی گزاره‌ها:

آ) درست

ب) درست. با توجه به رابطهٔ سرعت متوسط، بردار سرعت متوسط و بردار جابه‌جایی با یکدیگر هم‌جهت‌اند. (Δt همواره مثبت است) $\vec{v}_{av} = \frac{\Delta \vec{r}}{\Delta t}$

پ) درست. اگر تندی متحرک در یک بازهٔ زمانی صفر نشود، در این بازه جهت حرکت متحرک تغییر نکرده و بنابراین بزرگی جابه‌جایی و مسافت طی شده با یکدیگر برابرند و مطابق رابطهٔ تندی متوسط و بزرگی سرعت متوسط این دو کمیت نیز با یکدیگر برابرند.

ث) نادرست ← بردار سرعت لحظه‌ای به جهت حرکت متحرک بستگی دارد و لزوماً هم‌جهت با بردار مکان نیست.

(مرکز مشاوره‌ی المپیک ← مقدمه‌ی ۲ تا ۱۰)

---

۱۲۰ – گزینهٔ «۲» (امیرحسین برزوئی)

در بازهٔ زمانی ۰ تا t' متحرک در جهت مثبت محور xها و در بازهٔ زمانی t' تا $2t'$ متحرک در جهت منفی محور xها در حال حرکت است. با توجه به رابطهٔ تندی متوسط و سرعت متوسط داریم:

$$\Delta x_{0\to t'} = s_{av} \times t' \ (I)$$

$$\Delta x_{t'\to 2t'} = -s'_{av} \times (2t' - t') = -2s'_{av} t' \ (II)$$

$$v_{av} = \frac{\Delta x_{0\to t'} + \Delta x_{t'\to 2t'}}{2t' - 0} \xrightarrow[v_{av} = -2\frac{m}{s}]{(I,II),\, s'_{av} = 0/8 s_{av}}$$

$$-2 = \frac{s_{av} \times t' - s'_{av}(2t')}{2t'} = s_{av}\frac{(1 - 2 \times 0/8)}{2}$$

$$\Rightarrow s_{av} = 10\frac{m}{s} \Rightarrow s''_{av} = \frac{s_{av} \times t' + 0/8 s_{av} \times 2t'}{3t'} = 5 \times 2/6 = 13\frac{m}{s}$$

(مرکز مشاوره‌ی المپیک ← مقدمه‌ی ۲ تا ۱۰)

---

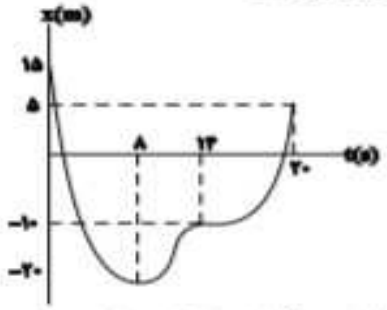
۱۲۱ – گزینهٔ «۱» (امیرحسین برزوئی)

با توجه به رابطهٔ سرعت متوسط مکان متحرک را در لحظهٔ $t = 20s$ به دست می‌آوریم:

$$v_{av} = \frac{\Delta x}{\Delta t} \Rightarrow -0/5 = \frac{x - 15}{20}$$

$$\Rightarrow x = 5m$$

با توجه به اینکه فقط دو بار تندی متحرک صفر شده است، پس نمودار مکان – زمان آن مطابق شکل مقابل است:



با توجه به نمودار به بررسی گزاره‌های درست می‌پردازیم:

آ) درست است. مطابق نمودار دو بار بردار مکان متحرک تغییر کرده است.

ب) نادرست است. جهت حرکت متحرک تنها در لحظهٔ $t = 8s$ تغییر کرده است.

پ) نادرست است. متحرک در بازهٔ زمانی $t_A = 8s$ تا $t' = 20s$ $(t' - t_A = 12s)$ در جهت مثبت محور xها در حال حرکت است.

ت) نادرست است. با توجه به رابطهٔ تندی متوسط داریم:

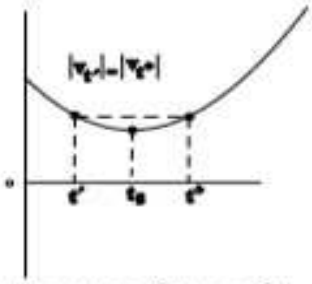
$$S_{av} = \frac{\ell}{\Delta t}, \ell = |\Delta x_{0\to 8}| + |\Delta x_{8\to 20}| = |-20 - 15| + |5 - (-20)|$$

$$= 35 + 25 = 60m \Rightarrow S_{av} = \frac{60}{20} = 3\frac{m}{s}$$

(مرکز مشاوره‌ی المپیک ← مقدمه‌ی ۲ تا ۱۰)

۱۲۲ – گزینهٔ «۳» (امیرحسین برزوئی)

چون نمودار به‌صورت سهمی است بنابراین تندی متحرک در نقاطی که در فواصل زمانی یکسان نسبت به رأس سهمی قرار دارند یکسان است. با توجه به نمودار ابتدا تندی متحرک کاهش و سپس افزایش می‌یابد. با توجه به گزینه‌ها در بازهٔ زمانی t_2 تا t_3 تندی متحرک از بازه‌های دیگر بیشتر است پس تندی متوسط در این بازه بزرگتر است.



(مرکز مشاوره‌ی المپیک ← مقدمه‌ی ۲ تا ۱۰)

شرکت تعاونی خدمات آموزشی کارکنان
سازمان سنجش آموزش کشور

www.mapedu.ir

۱- گزینه ۲ درست است.

زیرا خواهیم داشت:

$$V = 0/4t^2 + 0/5 \Rightarrow \begin{cases} t_1 = 2s \rightarrow v_1 = 2/1\frac{m}{s} \\ t_2 = 5s \rightarrow v_2 = 10/5\frac{m}{s} \end{cases} \Rightarrow a_{av} = \frac{\Delta v}{\Delta t} = (\frac{10/5 - 2/1}{5-2})\frac{m}{s^2} = 2/8\frac{m}{s^2}$$

۲.گزینه ۴ درست است.

چون شتاب حرکت ثابت است و مسیر حرکت راست می‌باشد، خواهیم داشت:

$$\begin{cases} \bar{V} = \frac{V_2 + V_1}{2} \\ V = 4t + V_0 \Rightarrow \begin{cases} t_1 = 0 \Rightarrow V_1 = V_0 \\ t_2 = 4s \Rightarrow V_2 = 20 + V_0 \end{cases} \end{cases} \Rightarrow 0 = \frac{20 + 2V_0}{2} \Rightarrow V_0 = -10\frac{m}{s}$$

۳.گزینه ۳ درست است.

اگر جهت مثبت را جهت حرکت اتومبیل در نظر بگیریم و لحظهٔ به حرکت درآمدن اتومبیل دوم را مبدأ زمان $(t_0 = 0)$ و مکان اتومبیل اول را در این لحظه برابر صفر اختیار کنیم، خواهیم داشت:

$$x_1 = v_1 t + x_{01} \quad \square\square\square \rightarrow x_1 = 30t$$

$$x_2 = \frac{1}{2}a_2 t^2 + v_{02}t + x_{02} \quad \square\square\square\square\square\square\square\square\square\square\square\square \rightarrow x_2 = \frac{1}{2} \times 2t^2 + 200 = t^2 + 200$$

$$t = 5s \Rightarrow \begin{cases} x_1 = (30 \times 5)m = 150m \\ x_2 = (25 + 200)m = 225m \end{cases} \Rightarrow x_2 - x_1 = (225 - 150)m = 75m$$

۴-گزینه ۱ درست است.

$$V = at + v_0 = 6t - 6 = 0 \Rightarrow t = 1s$$

از لحظهٔ $t = 0$ تا $t = 1s$ حرکت کند شونده است.

سرعت در لحظهٔ $t = 2/5s$ برابر سرعت متوسط در ثانیه سوم است.

۵. گزینه ۴ درست است.

شتاب در بازه تا $12s$ ثابت است.

$$\begin{cases} a_{av} = \frac{\Delta v}{\Delta t} = \frac{14}{7} = 2\frac{m}{s^2} \\ v_0 = -10\frac{m}{s} \end{cases} \Rightarrow v = at + v_0 = 2(2) + (-10) = -6\frac{m}{s}$$

شتاب در بازهٔ $12s$ تا $20s$ نیز ثابت است.

$$a_{av} = -\frac{14}{8} = -\frac{7}{4}$$

$$(۱۶s \text{ تا } ۲s)\ a_{av} = \frac{\Delta v}{\Delta t} = \frac{۷-(-۶)}{۱۴} = \frac{۱۳}{۱۴}\frac{m}{s^۲}$$

۶. گزینه ۴ درست است.

ابتدا مدت زمانی که طول می‌کشد سرعت قطار B به $۴۰\frac{m}{s}$ برسد را محاسبه می‌کنیم.

$$t = \frac{v - v_0}{a} = \frac{۴۰}{۴} = ۱۰s$$

در این مدت، قطار A مسافت $\Delta x = ۳۰ \times ۱۰ = ۳۰۰m$ را طی می‌کند و قطار B مسافت $\Delta x = (\frac{۴۰+۰}{۲})۱۰ = ۲۰۰m$ را طی می‌کند. برای اینکه قطار B کاملاً از A عبور کند باید انتهای قطار B مجاور ابتدای قطار A قرار گیرد.

$$x_A = x_B$$
$$۴۰t' = ۳۰t' + ۴۰۰$$
$$t' = ۴۰s$$
$$t = ۱۰ + ۴۰ = ۵۰s$$

۷- گزینه ۳ درست است.

چون شیب خط مماس بر نمودار مکان ـ زمان متحرک، در تمام لحظه‌های حرکت آن یکسان است، نتیجه می‌شود که متحرک با سرعت ثابت روی محور X حرکت می‌کند، پس سرعت آن در هر لحظه برابر سرعت متوسط آن در هر بازهٔ زمانی دلخواه می‌باشد. بنابراین خواهیم داشت:

$$V = V_{av} = \frac{\Delta x}{\Delta t} = (\frac{-۲۰-۸۰}{۵-۰})\frac{m}{s} = -۲۰\frac{m}{s}$$
$$x = vt + x_0 \Rightarrow ۰ = -۲۰t + ۸۰ \Rightarrow t = ۴s$$

۸- گزینه ۲ درست است.

چون نمودار مکان ـ زمان متحرک به صورت سهمی است، نتیجه می‌شود که حرکت راست خط و شتاب ثابت است، پس خواهیم داشت:

$$\begin{cases} x = \frac{۱}{۲}at^۲ + V_0t + x_0 \\ V = at + V_0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} ۰ = \frac{۱}{۲}a(۱)^۲ + V_0 \times ۱ + ۶ \\ ۰ = a \times ۲ + V_0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} ۰ = \frac{۱}{۲}a + V_0 + ۶ \\ V_0 = -۲a \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a = ۴\frac{m}{s^۲} \\ V_0 = -۸\frac{m}{s} \end{cases}$$

$$V = ۴t - ۸ \xrightarrow{t=۳} V = (۴ \times ۳ - ۸)\frac{m}{s} = ۴\frac{m}{s}$$

۹. گزینه ۲ درست است.

اگر جهت مثبت، جهت حرکت جسم اختیار شود، خواهیم داشت:

$$\Delta x = \Delta x_1 + \Delta x_2 = (\frac{v + v_0}{۲})t_1 + vt_2 \xrightarrow{v_0=۰} ۱۰۰ = \frac{v}{۲} \times ۴ + ۸v \Rightarrow v = ۱۰\frac{m}{s}$$
$$a_{av} = \frac{\Delta v}{\Delta t} = (\frac{۱۰-۰}{۴-۰})\frac{m}{s^۲} = ۲/۵\frac{m}{s^۲}$$

۱۰- گزینه ۲ درست است.

زیرا می‌توان نوشت:

$$|a_{av}| = \left|\frac{\Delta V}{\Delta t}\right| \Rightarrow |a_{av}| = \left|(\frac{-۵-۵}{۶-۲})\frac{m}{s^۲}\right| = ۲/۵\frac{m}{s^۲}$$

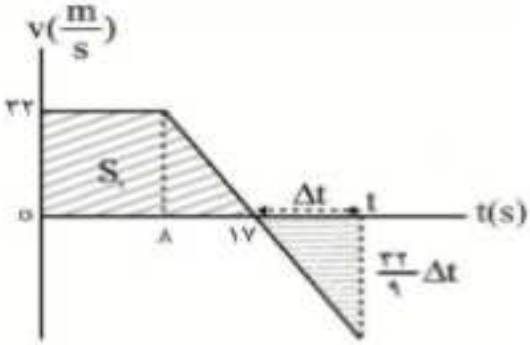
۱۱ـ گزینه ۱ درست است.

شتاب متوسط از رابطه $a_{av} = \frac{v_2 - v_1}{t_2 - t_1}$ محاسبه می‌شود:

$$a_{av} = \frac{v(2) - v(1)}{2 - 1} = \frac{(2(2)^3 - 4(2)^2 + 6(2) - 2) - (2 - 4 + 6 - 2)}{1} = 8\frac{m}{s^2}$$

۱۲ـ گزینه ۲ درست است.

مساحت زیر نمودار $v - t$ برابر جابه‌جایی متحرک است. هرگاه مساحت قسمت بالای محور t و قسمت پایین محور t با یکدیگر برابر باشد، متحرک به نقطه آغاز حرکت باز می‌گردد:



$$S_1 = \frac{17 + 8}{2} \times 32 = 400m$$

با توجه به خط راست بودن نمودار پس از لحظه‌های $t = 8s$، بزرگی شیب خط $\frac{32}{9}$ است:

$$400 = \frac{16}{9}\Delta t^2 \rightarrow \Delta t^2 = \frac{9 \times 400}{16} \rightarrow \Delta t = 15s \rightarrow t = 32s$$

$$s_{av} = \frac{1}{\Delta t} = \frac{400 + 400}{32} = 25\frac{m}{s}$$

۱۳ـ گزینه ۱ درست است.

بزرگی شتاب در لحظه‌های t_1 و t_2 را به ترتیب a_1 و a_2 در نظر بگیرید. شتاب متوسط در بازه زمانی ۰ تا t_1، بزرگ‌تر از a_1، در بازه زمانی t_1 تا t_2 و t_1 تا t_2، کوچک‌تر از a_1 و در بازه زمانی t_2 تا t_2، کوچک‌تر از a_2 است. با توجه به آن که $a_1 > a_2$ است، بیشترین شتاب متوسط در بازه زمانی ۰ تا t_1 اتفاق می‌افتد.

۱۴ـ گزینه ۳ درست است.

در چهار ثانیه اول، حرکت متحرک به صورت سرعت ثابت است. پس سرعت اولیه متحرک در مرحله‌ای که شروع به حرکت یا شتاب ثابت می‌کند، عبارتست از:

$$\left.\begin{array}{l} v_0 = \frac{\Delta x}{\Delta t} = \frac{8}{2} = 4\frac{m}{s} \\ x_0 = 5 + 4 = +9m \end{array}\right\} \rightarrow \Delta x = \frac{1}{2}at^2 + v_0 t \rightarrow 23 - 9 = \frac{1}{2}a(2)^2 + 2 \times 4 \rightarrow a = 3\frac{m}{s^2}$$

$$v = at + v_0 \rightarrow v = 3 \times 1 + 4 = 7\frac{m}{s}$$

۱۵ـ گزینه ۳ درست است.

متحرک از $t = 4s$ تا $t = 7s$ در حال حرکت با شتاب ثابت است و در بازه $t = 7s$ تا $t = 8s$ به صورت سرعت ثابت به حرکت می‌پردازد و سرعت آن در این بازه برابر سرعت متحرک در لحظه $t = 7s$ است:

$$\left.\begin{array}{l} \Delta x_1 = \frac{v(4) + v(7)}{2} \times 3 \rightarrow \Delta x_1 = \frac{-8 + 4}{2} \times 3 = -6m \\ \Delta x_2 = v(7) \times 1 = (4 \times 7 - 24) \times 1 = 4m \end{array}\right\} \Rightarrow \Delta x = \Delta x_1 + \Delta x_2 = -2m$$

۱۶ـ گزینه ۲ درست است.

جابه جایی مساحت زیر نمودار است

$$d = \frac{v' \times (\Delta t')}{۲} = \frac{۵}{۲} v't'$$

جابه جایی را بر مدت زمان تقسیم کنیم

$$v_{av} = \frac{d}{\Delta t} = \frac{\frac{۵}{۲} v't'}{\Delta t'} = \frac{۱}{۲} v'$$

۱۷ـ گزینه ۱ درست است.

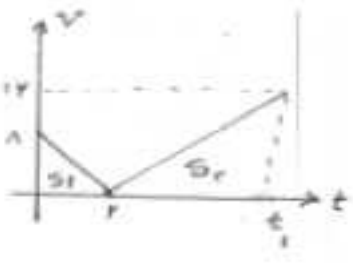
شکل عمومی معادله

$$v = v_۰ + at$$

$$v = -۶t + v_۰ \rightarrow -۴ = -۶(۲) + v_۰$$

$$v_۰ = ۸\frac{m}{s} \rightarrow v = -۶t + ۸$$

۱۸.گزینه ۳ درست است.



$$\Delta v = ۱۶ - ۸ = ۸s$$

$$a_{av} = \frac{\Delta v}{\Delta t} \rightarrow ۲\frac{۸}{t_۱} \rightarrow t_۱ = ۴s$$

$$\Delta x = s_۱ + s_۲ = \frac{۸ \times ۲}{۲} + \frac{۱۶ \times (t_۱ - ۲)}{۲}$$

$$\Delta x = ۸ + ۱۶ = ۲۴m \qquad v_{av} = \frac{۲۴}{۴} = ۶\frac{m}{s}$$

۱۹.گزینه ۲ درست است.

اگر مسافت طی شده در $\frac{۳t}{۴}$ را L' بنامیم:

$$\frac{L'}{d} = (\frac{t'}{t})^۲ \rightarrow \frac{L'}{d} = \left(\frac{\frac{۳t}{۴}}{t}\right)^۲ \rightarrow \frac{L'}{d} = \frac{۹}{۱۶} \rightarrow L' = \frac{۹}{۱۶}d$$

$$d = L + \frac{۹}{۱۶}d \rightarrow L = d - \frac{۹}{۱۶}d \rightarrow L = \frac{۷}{۱۶}d$$

۲۰.گزینه ۳ درست است.

$$a = a_{av} = \frac{\Delta v}{\Delta t} = \frac{۲۴ - ۹}{۵} = \frac{۱۵}{۵} = ۳\frac{m}{s^۲}$$

شکل عمومی

$$\begin{cases} v = at + v_۰ \\ v_۰ = ۰ \end{cases} \rightarrow v = ۳t$$

۲۱. گزینه ۲ درست است.

برای حل $x = ۰$ قرار می‌دهیم.

$$x = ۰ \rightarrow ۰ = (t - ۲)(t + ۳)(t + ۴)$$

$$\begin{cases} t = ۲ & \text{ق ق} \quad \surd \\ t = -۳ & \text{غ ق ق} \\ t = -۴ & \text{غ ق ق} \end{cases}$$

۲۲. گزینه ۳ درست است.

متحرک از لحظه t' تا ۲۵ در جهت خلاف محور xها حرکت کرده که جابه‌جایی آن

$$|\Delta x| = S = \frac{(۲۵ - t') \times ۱۵}{۲}$$

$$V_{av} = \frac{|\Delta x|}{\Delta t} = \frac{\frac{(۲۵ - t) \times ۱۵}{۲}}{(۲۵ - t')} \rightarrow V_{av} = \frac{۱۵}{۲} = ۷/۵m$$

۲۳-گزینه ۳ درست است.

سرعت در ثانیه ششم

$V_۶ =$ شیب مماس بر نمودار

$$V_۶ = \frac{۰ - (-۱۸)}{۹ - ۶} = ۶\frac{m}{s}$$

$$a_{av} = \frac{\Delta V}{\Delta t} = \frac{V_۶ - V_۳}{\Delta t} \rightarrow$$

$$a_{av} = \frac{۶ - ۰}{۳} = ۲\frac{m}{s^۲}$$

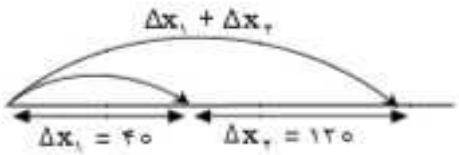
۲۴. گزینه ۲ درست است.

$$\Delta x = \frac{V_۱ + V_۲}{۲}\Delta t \rightarrow \frac{۱۰}{۱۰۰} = \frac{۵۰ + ۳۰}{۲} \times \Delta t$$

$$\Delta t = \frac{۲}{۸۰۰} = \frac{۱}{۴۰۰}s$$

۲۵. گزینه ۳ درست است.

$$\Delta x_۱ = \frac{V_۱ + V_۲}{۲} \times \Delta t_۱$$



$$۴۰ = \frac{۰ + ۱۰}{۲}\Delta t_۱ \rightarrow \Delta t_۱ = ۸s$$

$$\frac{\Delta x_۱}{\Delta x_۱ + \Delta x_۲} = \left(\frac{\Delta t_۱}{\Delta t_۱ + \Delta t_۲}\right)^۲ \rightarrow \frac{۴۰}{۴۰ + ۱۲۰} = \left(\frac{۸}{۸ + \Delta t_۲}\right)^۲$$

پس از ساده کردن: $\Delta t_۲ = ۸s$

۲۶-گزینه ۲ درست است.

$$x_0 = 0$$
$$x_1 = 16m$$
$$V_{av} = \frac{\Delta x}{\Delta t} = \frac{x_1 - x_0}{\Delta t}$$
$$V_{av} = \frac{16 - 0}{4} = 4\frac{m}{s}$$

۲۷- گزینه ۳ درست است.

در حرکت با سرعت ثابت $\Delta x = v\Delta t$ و $x = vt + x_0$ است:

$$\Delta x = v\Delta t \rightarrow 12 = v \times 4 \rightarrow v = 3\frac{m}{s}$$

$$x = vt + x_0 \xrightarrow[x(2) = -3m]{v = 3\frac{m}{s}} -3 = 3 \times 2 + x_0 \rightarrow x_0 = -9m \rightarrow x = 3t - 9$$

۲۸- گزینه ۱ درست است.

متحرک از حال سکون $(v_0 = 0)$ شروع به حرکت کرده است. به کمک رابطه سرعت ـ جابه‌جایی در حرکت با شتاب ثابت داریم:

$$v_1^2 = 2a_1\Delta x_1 \rightarrow v_1^2 = 2 \times (-1) \times (-8) \rightarrow v_1 = -4\frac{m}{s}$$

در $8m$ بعدی، متحرک با سرعت ثابت به حرکت خود ادامه می‌دهد. با تغییر جهت شتاب، بزرگی سرعت متحرک شروع به کاهش می‌کند تا صفر شود و سپس تغییر جهت دهد. دوباره به کمک رابطه سرعت ـ جابه‌جایی داریم:

$$0 - v_1^2 = 2a_2\Delta x_2 \rightarrow -16 = 2 \times (2) \times \Delta x_2 \rightarrow \Delta x_2 = -4m$$

پس متحرک تا توقف به اندازه $8 + 8 + 4 = 20m$ مسافت طی کرده است و از مبدأ مکان دور شده است. اکنون با برگشتن این مسافت، دوباره از مبدأ مکان عبور می‌کند.

۲۹- گزینه ۲ درست است.

ثانیه پنجم یعنی $t_1 = 4s$ تا $t_2 = 5s$، صفر شدن جابه‌جایی در این بازه زمانی یعنی متحرک در $t = 4/5s$ تغییر جهت داده است. پس حرکت ذره در بازه زمانی ۰ تا $4/5s$ با حرکت آن در بازه $4/5s$ تا $9s$ تقارن دارد. لحظه‌های متقارن با هم باید در $t_1 + t_2 = 9s$ صدق کنند. در نتیجه گزینه‌های ۱، ۳ و ۴ نادرست هستند و گزینه ۲ درست است.

۳۰. گزینه ۳ درست است.

شتاب متوسط از $a_{av} = \frac{\Delta v}{\Delta t}$ بدست می‌آید. سطح زیر نمودار $a - t$ معرف Δv است:

$$a_{av_1} = \frac{\frac{۶ \times ۴}{۲}}{۶} = ۲\frac{m}{s}$$

$$\rightarrow \frac{a_{av_1}}{a_{av_2}} = \frac{۲}{۳}$$

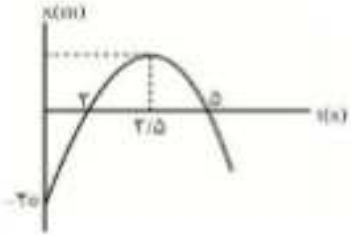
$$\left|a_{av_2}\right| = \frac{\frac{۶ \times ۳}{۲}}{۳} = ۳\frac{m}{s^۲}$$

۳۱. گزینه ۴ درست است.

برای آن که قطار A به طور کامل از قطار B عبور کند، باید علاوه بر جبران فاصله اولیه‌اش، طول قطار B و طول خود را نیز عبور دهد:

$$\Delta x_A - \Delta x_B = ۳۰۰ + ۲۴۰ + ۳۶۰ = ۹۰۰ \rightarrow (v_A - v_B)t = ۹۰۰ \rightarrow t = \frac{۹۰۰}{۱۸ - ۱۲} = ۱۵۰s$$

۳۲. گزینه ۱ درست است.



با رسم نمودار مکان ـ زمان (شکل مقابل) می‌توان دریافت که در بازه زمانی ۲s تا ۳/۵s ، جهت بردار مکان متحرک هم جهت محور x است و نوع حرکت آن کندشونده است.

۳۳- گزینه ۱ درست است.

فاصله متحرک از مبدأ مکان در لحظه $t = ۳s$ برابر با $|x(۳)|$ است:

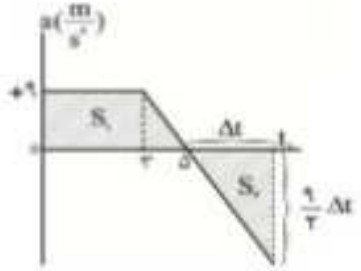
$$x(۳) = ۲(۳)^۳ - ۳(۳)^۲ - ۱۵ = ۵۴ - ۲۷ - ۱۵ = ۱۲m$$

برای تعیین جابه‌جایی متحرک در ثانیه سوم کافی است $\Delta x = x(۳) - x(۲)$ را محاسبه کنیم:

$$\Delta x = x(۳) - x(۲) = ۱۲ - (۲(۲)^۳ - ۳(۲)^۲ - ۱۵) = ۱۲ - (-۱۱) = ۲۳m$$

۳۴. گزینه ۳ درست است.

هر گاه سرعت متحرک دوباره برابر با v_0 شود، شتاب متوسط صفر می‌شود. پس باید مساحت زیر نمودار پس از $t = ۵s$ برابر مساحت زیر نمودار میان ۰ تا ۵s شود. با توجه به مفهوم شیب خط راست، داریم:



$$S_1 = S_2$$

$$\frac{۵ + ۳}{۲} \times ۹ = \frac{\Delta t \times \frac{۹}{۲}\Delta t}{۲} = \frac{۹}{۴}\Delta t^۲ \rightarrow \Delta t = ۴s$$

$$t_1 = ۵ + \Delta t \rightarrow t_1 = ۹s$$

۳۵. گزینه ۴ درست است.

متحرک A میان لحظه‌های $t_1 = 5s$ تا $t_2 = 8s$ ، به اندازه $45m$ جابه‌جا می‌شود. پس سرعت متحرک A برابر با $v_A = \frac{45}{2} = 15\frac{m}{s}$ است. متحرک A در 5s اول حرکت به اندازه $+75m$ جابه‌جا شده است. پس $x_{0A} = -120m$ است. در مدت 40s ، متحرک A به اندازه $120 + 80 = 200m$ بیشتر از متحرک B جابه‌جا می‌شود. این یعنی $v_A - v_B = \frac{200}{40} = 5\frac{m}{s}$ است. در نتیجه $v_B = 10\frac{m}{s}$ است:

$$x_B = v_B t + x_0 \rightarrow x_B = 10 \times 8 + 80 = 160m$$

۳۶. گزینه ۴ درست است.

صفر شدن سرعت متوسط در بازه زمانی t_1 تا t_2 نشان می‌دهد $x(t_2) = x(t_1)$:

$$5^2 + 5b + 12 = 3^2 + 3b + 12 \rightarrow 2b = 9 - 25 \rightarrow b = -8$$

اکنون با کامل شدن معادله مکان ـ زمان، فاصله متحرک از مبدأ مکان در $t = 4s$، عبارتست از:

$$|x(2)| = |4^2 - 8 \times 4 + 12| = -4m$$

۳۷. گزینه ۲ درست است.

علامت سرعت نشان‌دهنده جهت حرکت است. پس هر گاه علامت V تغییر کرد، جهت حرکت تغییر می‌کند. علامت شیب خط مماس بر منحنی $V - t$ معرف علامت شتاب است. در لحظاتی که شیب خط مماس تغییر می‌کند، علامت شتاب نیز تغییر می‌کند.

۳۸. گزینه ۳ درست است.

سرعت متحرک در قسمت اول حرکت مقدار ثابت $v_1 = -\frac{12}{2} = -6\frac{m}{s}$ است. به کمک رابطه شتاب متوسط، داریم:

$$a_{av} = \frac{v_2 - v_1}{t_2 - t_1} \rightarrow 1/5 = \frac{v_2 - (-6)}{6 - 0} \rightarrow v_2 = 3\frac{m}{s}$$

اکنون با توجه به ویژگی‌های خط راست و باتوجه به سرعت‌های متحرک در بازه‌های زمانی و توجه به این نکته که شیب نمودار $x - t$ معرف سرعت است، متحرک در لحظه $t = 3s$ در مکان $x = -6m$ است. حرکت متحرک پس از ۳ ثانیه نیز یک حرکت با سرعت ثابت است. در نتیجه، جابه‌جایی متحرک از لحظه $t = 3s$ تا لحظه $t = 6s$ به صورت زیر است:

$$\Delta x_2 = v_2 \Delta t_2 \rightarrow \Delta x_2 = 3 \times 3 = +9m$$

برای محاسبه تندی متوسط متحرک در ۶ ثانیه اول حرکت کافی است محاسبه مقابل را انجام دهیم:

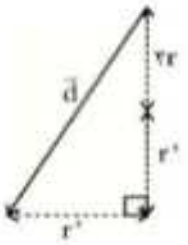
$$s_{av} = \frac{|\Delta x_1| + \Delta x_2}{\Delta t_1 + \Delta t_2} = \frac{18 + 9}{6} = 4/5\frac{m}{s}$$

۳۹. گزینه ۱ درست است.

نسبت تندی متوسط به سرعت متوسط همان نسبت مسافت طی شده به جابه‌جایی است:

$$l = \pi r + \frac{\pi}{2} r' \rightarrow l = 3 \times 6 + \frac{3}{2} \times 36 = 72m$$

برای تعیین جابه‌جایی کافی است طول برداری که بطور مستقیم نقطه A را به نقطه B وصل می‌کند را به دست آوریم.



$$d = \sqrt{(2r + r')^2 + r'^2} \rightarrow d = \sqrt{(12 + 39^2 + 36^2)} = 60m$$

$$\frac{s_{av}}{v_{av}} = \frac{l}{d} = \frac{72}{60} = \frac{6}{5}$$

۴۰-گزینه ۳ درست است.

متحرک در بازه زمانی ۳s تا ۶s به صورت تندشونده در خلاف جهت محور x در حال حرکت است. به کمک اطلاعات حرکت در بازه زمانی ۶s تا ۱۲s، سرعت متحرک در لحظه t = ۶s برابر با $-۶\frac{m}{s}$ است. پس شتاب متوسط متحرک در بازه زمانی $t_1 = ۳s$ تا $t_2 = ۶s$، برابر است با:

$$a_{av} = \frac{\Delta v}{\Delta t} \rightarrow a_{av} = \frac{-۶ - ۰}{۶ - ۳} = -۲\frac{m}{s^۲}$$

۴۱-گزینه ۱ درست است.

در مدت ۵ ثانیه، قطار (۱) به اندازه $\Delta x = ۸ \times ۵ = ۴۰m$ فاصله میان دو قطار را طی می‌کند. برای آن که دو قطار از کنار یکدیگر عبور کنند بایستی ۲۰۰ متر فاصله باقی مانده دو قطار و مجموع طول دو قطار $(۷۰ + ۵۰ = ۱۲۰m)$ طی شود:

$$\Delta x_1 + \Delta x_2 = (v_1 + v_2)\Delta t \rightarrow \Delta t = \frac{۳۲۰}{۲۰} = ۱۶s$$

۴۲-گزینه ۱ درست است.

صفحهٔ ۳ کتاب درسی: مبحث تندی متوسط و سرعت متوسط مطالعه شود.

$$\boxed{S_{av} = \frac{L}{\Delta t}} \quad (۱-۱)$$

۴۳- گزینه ۳ درست است.

$$V_{av} = \frac{\Delta x}{\Delta t}$$

$$V_{av} = \frac{۲۰ - ۴۰}{۳ - ۲} \rightarrow V_{av} = \frac{-۲۰}{۱} = -۲۰\frac{m}{s}$$

۴۴.گزینه ۲ درست است.

شکل ۸ - ۱ کتاب درسی و توضیحات شکل مطالعه شود.

۴۵.گزینه ۴ درست است.

نمودارهای حرکت شتابدار مطالعه شود.

۴۶.گزینه ۲ درست است.

$$\begin{cases} V_0 = ۰ \\ t = ۴S \\ x = ۲۰m \end{cases}$$

$$x = \frac{۱}{۲}at^۲ + V_0 t$$

$$۲۰ = \frac{۱}{۲}ax(۴)^۲ \rightarrow ۲۰ = ۸a \rightarrow a = ۲/۵\frac{m}{s^۲}$$

$$V = V_0 + at \rightarrow V = ۲/۵ \times ۴ = ۱۰\frac{m}{s}$$

۴۷- گزینه ۴ درست است.

$$\begin{cases} V_t = -۲/۴t + ۱۸ \\ V_{(۴)} = -۲/۴ \times ۴ + ۱۸ = -۹/۶ + ۱۸ = ۸/۴\frac{m}{s} \end{cases}$$

$$V_{av} = \frac{V_۰ + V_{(۴)}}{۲} = \frac{(-۲/۴ \times ۰ + ۱۸) + (-۲/۴ \times ۴ + ۱۸)}{۲}$$

$$V_{av} = \frac{۱۸ + (۸/۴)}{۲} = \frac{۲۶/۴}{۲} = ۱۳/۲\frac{m}{s}$$

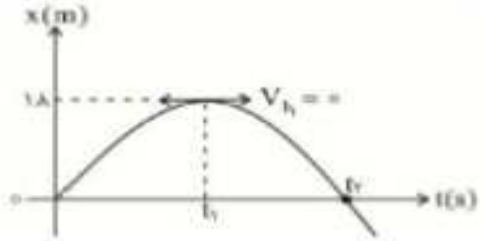
۴۸- گزینه ۲ درست است.

$$V_۰ = \frac{۱۲۶}{۳/۶} = ۳۵\frac{m}{s}$$

$$V = ۰$$

$$\begin{cases} V^۲ - V_۰^۲ = ۲ax \\ x = ۵۵ - ۵ = ۵۰m \end{cases} \rightarrow a = \frac{V^۲ - V_۰^۲}{۲x} = \frac{۰^۲ - (۳۵)^۲}{۲ \times ۵۰} = \frac{-۱۲۲۵}{۱۰۰} = -۱۲/۲۵\frac{m}{s^۲}$$

۴۹. گزینه ۲ درست است.



$$|V_{t_2}| = V_۰ = ۱۲\frac{m}{s}$$

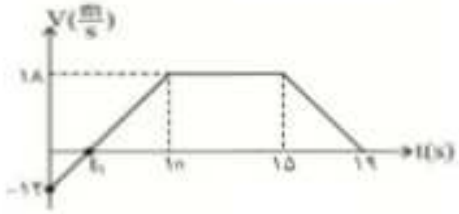
چون حرکت بر مسیر مستقیم و با شتاب ثابت است:

$$\frac{\Delta x}{\Delta t} = \frac{x_{t_1} - x_۰}{t_1 - ۰} = \frac{V_{t_1} + V_۰}{۲}$$

$$\frac{۱۸}{t_1} = \frac{۰ + ۱۲}{۲} \Rightarrow t_1 = ۳s$$

در بازهٔ زمانی ۰ تا $t_1 = ۳s$ حرکت کُندشونده است.

۵۰. گزینه ۳ درست است.



در مدت زمان ۰ تا ۱۵ ثانیه شیب نمودار ثابت است:

$$\frac{۱۸ - (-۱۲)}{۱۰} = \frac{۰ - (-۱۲)}{t_1 - ۰} \Rightarrow t_1 = ۴s$$

مدت زمان حرکت کندشونده $= (t_1 - ۰) + (۱۹ - ۱۵) = ۸s = \Delta t_1$

مدت زمان حرکت در جهت $-x$ $= t_1 - ۰ = ۴s = \Delta t_2$

$$\frac{\Delta t_1}{\Delta t_2} = \frac{۸}{۴} = ۲$$

۵۱. گزینه ۱ درست است.

$$V = ۳۶۰\frac{km}{h} \times \frac{h}{۳۶۰۰s} \times \frac{۱۰۰۰m}{km} = ۱۰۰\frac{m}{s}$$

$$\begin{cases} \Delta x = \frac{۱}{۲}at^۲ + v.t \\ v = at + v_۰ \end{cases} \Rightarrow \Delta x = \frac{۱}{۲}at^۲ + (v_۰ - at)t$$

$$\Delta x = -\frac{۱}{۲}at^۲ + vt$$

$$۸۰۰ = -\frac{۱}{۲}a \times ۱۰^۲ + ۱۰۰ \times ۱۰$$

$$a = ۴\frac{m}{s^۲}$$

$$L = \overline{OB} = \frac{V_B^۲ - V_۰^۲}{۲a} = \frac{۱۰۰^۲ - ۰}{۲ \times ۴} = ۱۲۵۰m$$

۵۲. گزینه ۳ درست است.

جهت محور x را در جهت حرکت هواپیما می‌گیریم.

$$V_{av} = \frac{V + V_۰}{۲} \rightarrow ۶ = \frac{V_C + V_B}{۲} = \frac{۰ + V_B}{۲} \rightarrow V_B = ۱۲\frac{m}{s}$$

برای فاصله BC:

$$V^۲ - V_۰^۲ = ۲a\Delta X \rightarrow ۰ - ۱۲^۲ = ۲a \times ۱۸ \rightarrow a = -۴\frac{m}{s^۲}$$

برای فاصله AC:

$$V^۲ - V_۰^۲ = ۲a\Delta X \rightarrow ۰ - (\frac{۳۶۰}{۳/۶})^۲ = ۲(-۴)\Delta X_{AC} \rightarrow \Delta X_{AC} = ۱۲۵۰m$$

۵۳. گزینه ۲ درست است.

چون از مبدأ به‌سمت (۶-) متر رفته پس در جهت منفی حرکت دارد و سرعت منفی خواهد بود.

$$x = Vt - x_۰$$
$$x = -۳t - (-۶) = -۳t + ۶$$

۵۴. گزینه ۳ درست است.

$$V_2^2 - V_1^2 = 2ax \Rightarrow 10^2 - 8^2 = 2 \times 2/25x$$
$$x = 8$$
$$x' = x + 4 = 8 + 4 = 12m$$

۵۵- گزینه ۱ درست است.

$$\begin{matrix} V_A = at_1 \\ V_B = (a+2)t_1 \end{matrix} \Rightarrow \frac{V_B}{V_A} = \frac{a+2}{a} \Rightarrow \frac{12}{10} = \frac{a+2}{a}$$

$$12a = 10a + 20 \Rightarrow 2a = 20 \rightarrow \boxed{a = 10\frac{m}{s^2}}, \ t_1 = 1s$$

محل شروع حرکت دو متحرک را مبدأ مکان فرض می‌کنیم:

$$a = \frac{1}{2}at^2 + X_0$$

$$\begin{matrix} X_A = 5t_2^2 \\ X_B = 6t_2^2 \end{matrix} \Rightarrow X_B - X_A = 25 \Rightarrow 6t_2^2 - 5t_2^2 = 25$$

$$t_2^2 = 25$$

از شروع حرکت $t_2 = 5s$

$$\Delta t = t_2 - t_1 = 4s$$

۵۶- گزینه ۲ درست است.

$$t = \frac{V}{a} = 40s \Rightarrow a = \frac{V_2 - V_1}{t} = \frac{0 - 20}{40} \qquad a = \frac{-1}{2}\frac{m}{s^2}$$

$$V_2^2 - V_1^2 = 2ax$$

$$0 - 20^2 = 2(\frac{-1}{2})x \Rightarrow x = 400m$$

یا $x = \frac{V_2^2 - V_1^2}{2a} = \frac{0 - 20^2}{2 \times (\frac{V_1}{t})} = 400m$

۵۷. گزینه ۴ درست است.

$$x = \frac{1}{2}at^2 + V_1t$$

$$39 = \frac{1}{2} \times a \times 3^2 + V_1 \times 3 \Rightarrow 39 = 4/5a + 3V_1 \quad (1)$$

نکته در ثانیه n ام $x_n = \frac{1}{2}a(2n-1) + V_1$

$$15 = \frac{1}{2} \times a(2 \times 3 - 1) + V_1 \quad (2) \Rightarrow 15 = 2/5a + V_1$$

$$\begin{cases} (1)\ 39 = 4/5a + 3V_1 \\ (2)\ 15 = 2/5a + V_1 \end{cases} \Rightarrow V_1 = 10\frac{m}{s}, \ a = 2\frac{m}{s^2}$$

۵۸. گزینه ۳ درست است.

$$x = \frac{۱}{۲}at^{۲} + V_{۰}t + x_{۰} \qquad , a = ۲\frac{m}{s^{۲}}$$

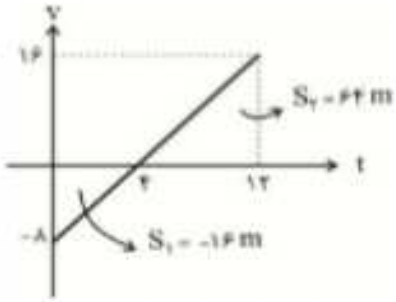
$$t = ۲s \rightarrow x = ۵m \rightarrow ۵ = ۴ + ۲V_{۰} + x_{۰}$$

$$t = ۴s \rightarrow x = ۵m \rightarrow ۵ = ۱۶ + ۴V_{۰} + x_{۰}$$

$$\rightarrow \underline{V_{۰} = -۶} \,,\, \underline{x_{۰} = ۱۳} \rightarrow x = t^{۲} - ۶t + ۱۳$$

$$t = ۸_{s} \rightarrow x = ۶۴ - ۴۸ + ۱۳ = ۲۹m$$

۵۹. گزینه ۳ درست است.



$$S_{av} = \frac{\ell}{\Delta t} = \frac{|S_۱| + |S_۲|}{\Delta t} = \frac{۱۶ + ۶۴}{۱۲} = \frac{۸۰}{۱۲} = \frac{۲۰}{۳}\frac{m}{s}$$

۶۰. گزینه ۴ درست است.

قطار برای عبور از پل باید به اندازهٔ مجموع طول پل (ℓ) و خود قطار (d) جابه‌جا شود.

$$\Delta x = V\Delta t = ۱۶ \times ۹۰ = ۱۴۴۰ = \ell + ۴۰۰ \rightarrow \ell = ۱۰۴۰m$$

در مدتی که قطار به طور کامل روی پل است به اندازهٔ اختلاف طول پل و خود قطار جابه جا می شود.

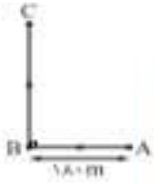
$$\Delta x = \ell - d = ۱۰۴۰ - ۴۰۰ = ۶۴۰m$$

$$\Delta t = \frac{\Delta x}{V} = \frac{۶۴۰}{۱۶} = ۴۰s$$

www.mapedu.ir

تست و پاسخ ۱

متحرکی مسیر **ABC** را در شکل داده‌شده در مدت **۲min**، با تندی متوسط **۳/۵ m/s** می‌پیماید. اندازهٔ سرعت متوسط متحرک در این مدت چند متر بر ثانیه است؟



برای محاسبهٔ اندازهٔ سرعت متوسط باید اندازهٔ جابه‌جایی را داشته باشیم.

۱) ۲ ۲) ۲/۵
۳) ۳ ۴) ۳/۵

پاسخ: گزینه ۲

مشاوره یک تست صبا از مبحث تندی متوسط و اندازهٔ سرعت متوسط که با حل آن، چگونگی محاسبهٔ مسافت و اندازهٔ جابه‌جایی و در نتیجه محاسبهٔ تندی متوسط و اندازهٔ سرعت متوسط را می‌آموزید. در فصل حرکت‌شناسی با این کمیت‌ها زیاد سروکار دارید.

خودت حل کنی بهتره صورت تست، مدت‌زمان حرکت و تندی متوسط را داده است؛ پس به کمک رابطهٔ تندی متوسط می‌توانید مسافت طی‌شده و در نتیجه طول BC را محاسبه کنید. با داشتن طول‌های AB و BC، محاسبهٔ اندازهٔ جابه‌جایی و اندازهٔ سرعت متوسط متحرک کار سختی نیست!

در سر تا سر ۱) مسافت، طول مسیری است که متحرک می‌پیماید. مسافت را با ℓ نشان می‌دهند.

۲) بردار جابه‌جایی، برداری است که مکان آغازین حرکت را به مکان پایانی حرکت وصل می‌کند. بردار جابه‌جایی را با $\vec{d}$ نشان می‌دهند.

نکته مسافت کمیتی نرده‌ای و جابه‌جایی کمیتی برداری است.

۳) تندی متوسط، نسبت مسافت پیموده‌شده به مدت‌زمان حرکت است و از رابطهٔ زیر محاسبه می‌شود:

$$s_{av} = \frac{\ell}{\Delta t}$$

ℓ → (m) طول Kveell ، Δt → (s) زمان Kveell ، s_{av} → (m/s) سرعت متوسط Kveol

۴) سرعت متوسط، نسبت جابه‌جایی به مدت‌زمان حرکت است و از رابطهٔ زیر محاسبه می‌شود:

$$\vec{v}_{av} = \frac{\vec{d}}{\Delta t}$$

$\vec{d}$ → (m) طول Kveell ، Δt → (s) زمان Kveell ، $\vec{v}_{av}$ → (m/s) سرعت متوسط Kveol

نکته تندی متوسط کمیتی نرده‌ای و سرعت متوسط کمیتی برداری است.

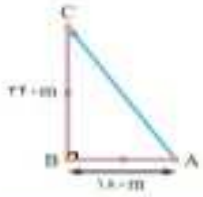
راه حل تشریحی گام اول، مسافت طی‌شده توسط متحرک برابر با مجموع طول پاره‌خط‌های AB و BC است.

به کمک رابطهٔ تندی متوسط، طول پاره‌خط BC را به دست می‌آوریم:

$$s_{av} = \frac{\ell}{\Delta t} = \frac{\overline{AB} + \overline{BC}}{\Delta t} \rightarrow ۳/۵ = \frac{۱۸۰ + \overline{BC}}{۱۲۰} \Rightarrow ۴۲۰ = ۱۸۰ + \overline{BC} \Rightarrow \overline{BC} = ۲۴۰\,m$$

گام دوم، اندازهٔ جابه‌جایی متحرک برابر با طول بردار $\overrightarrow{AC}$ در شکل مقابل است؛ بنابراین:

$$\overline{AC}^۲ = \overline{AB}^۲ + \overline{BC}^۲ = (۱۸۰)^۲ + (۲۴۰)^۲ = ۹۰۰۰۰ \Rightarrow \overline{AC} = \sqrt{۹۰۰۰۰} = ۳۰۰\,m$$



تکنیک با توجه به الگوی فیثاغورسی $(۵k, ۴k, ۳k)$ داریم:

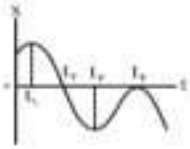
$$\begin{cases} ۱۸۰ = ۳k \\ ۲۴۰ = ۴k \end{cases} \rightarrow \Delta k = ۵ \times ۶۰ = ۳۰۰$$

گام سوم، اندازهٔ سرعت متوسط متحرک برابر است با:

$$v_{av} = \frac{d}{\Delta t} \rightarrow v_{av} = \frac{۳۰۰}{۱۲۰} = ۲/۵\,m/s$$

تست و پاسخ ۲

نمودار مکان ـ زمان متحرکی که در راستای محور x حرکت می‌کند، به شکل داده‌شده است. چند مورد از عبارت‌های زیر دربارهٔ این متحرک درست است؟



الف) جهت حرکت متحرک، فقط دو مرتبه، در لحظه‌های t_1 و t_2 تغییر می‌کند.

ب) جهت بردار مکان متحرک دو مرتبه، در لحظه‌های t_2 و t_3 تغییر می‌کند.

پ) در بازهٔ زمانی t_1 تا t_2، اندازهٔ جابه‌جایی متحرک با مسافت طی‌شده توسط آن برابر است.

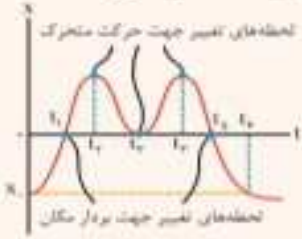
ت) در بازهٔ زمانی t_1 تا t_2، متحرک یک بار از مکان آغازین حرکت خود، عبور می‌کند.

۱) ۴ ۲) ۳ ۳) ۲ ۴) ۱

پاسخ: گزینه ۳

مشاهده از روی نمودار مکان ـ زمان متحرک اطلاعات زیادی دربارهٔ حرکت متحرک می‌توان به دست آورد. تحلیل حرکت از روی نمودار مکان ـ زمان یکی از مهم‌ترین و اولیه‌ترین مهارت‌هایی است که در فصل حرکت‌شناسی باید یاد بگیرید.

درس‌نامه ۱) بخشی از اطلاعاتی که نمودار مکان ـ زمان حرکت جسم دربارهٔ حرکت جسم به ما می‌دهد به صورت زیر است:



۱) **لحظه‌های تغییر جهت بردار مکان**: در لحظه‌هایی که نمودار، محور t را قطع می‌کند، بردار مکان متحرک تغییر جهت می‌دهد؛ برای مثال در نمودار روبه‌رو در لحظه‌های t_1 و t_3 بردار مکان متحرک تغییر جهت می‌دهد (قبل از t_1 بردار مکان در خلاف جهت محور x و بعد از t_1 بردار مکان در جهت محور x است).

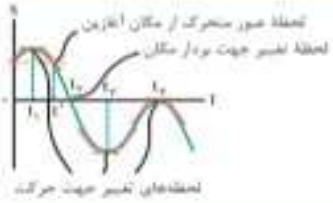
تذکر در لحظه‌هایی که نمودار بر محور t مماس می‌شود (مانند لحظهٔ t_2 در نمودار روبه‌رو) بردار مکان تغییر جهت نمی‌دهد. جهت بردار مکان قبل و بعد از این لحظات یکسان است و فقط برای لحظه‌ای اندازهٔ بردار مکان برابر صفر می‌شود.

۲) **لحظه‌های تغییر جهت حرکت متحرک**: نقطه‌های اکسترمم (بیشینه و کمینه) نمودار، بیانگر لحظاتی است که متحرک تغییر جهت می‌دهد. در این نقاط اولاً شیب مماس بر نمودار در آن لحظه برابر صفر می‌شود و ثانیاً علامت شیب نمودار قبل و بعد از آن لحظه متفاوت است؛ برای مثال در نمودار بالا، متحرک در لحظات t_1، t_2 و t_3 تغییر جهت می‌دهد.

نکته اگر از مکان اولیهٔ متحرک (x_0) خط‌چینی موازی محور t رسم کنیم، محل تقاطع این خط‌چین و نمودار، لحظاتی را نشان می‌دهد که متحرک از مکان اولیه‌اش عبور می‌کند. (لحظهٔ t_4 در نمودار بالا)

۳) مسافت، همواره بزرگ‌تر یا مساوی اندازهٔ جابه‌جایی است. در حالتی که مسیر حرکت متحرک مستقیم باشد و متحرک تغییر جهت ندهد، مسافت با اندازهٔ جابه‌جایی برابر است (برای مثال در نمودار بالا در بازهٔ زمانی t_1 تا t_2 مسافت طی‌شده توسط متحرک با اندازهٔ جابه‌جایی آن برابر است).

پاسخ تشریحی درستی یا نادرستی هر یک از عبارت‌ها را بررسی می‌کنیم:



الف) در نمودار $x-t$، جهت حرکت متحرک در نقاط اکسترمم (بیشینه و کمینه) تغییر می‌کند.
با توجه به این توضیح و شکل روبه‌رو، جهت حرکت متحرک، سه مرتبه در لحظات t_1، t_2 و t_3 تغییر می‌کند. ✗

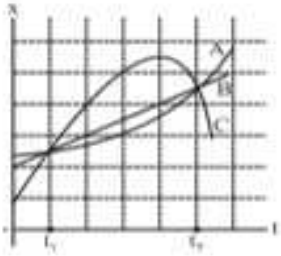
ب) در نمودار $x-t$، جهت بردار مکان متحرک در لحظه‌ای تغییر می‌کند که نمودار محور t را قطع کند.
با توجه به این موضوع، جهت بردار مکان متحرک یک مرتبه و در لحظهٔ t_2 تغییر می‌کند. (شکل روبه‌رو) ✗

حواستون باشه برای تغییر جهت بردار مکان، نمودار $x-t$ باید محور زمان را قطع کند تا علامت بردار مکان قبل و بعد از این لحظه متفاوت باشد. در لحظاتی مانند t_2 که نمودار بر محور زمان مماس می‌شود، بردار مکان متحرک تغییر جهت نمی‌دهد، چون جهت بردار مکان قبل و بعد از این لحظه یکسان است.

ب) اگر متحرکی که در یک مسیر مستقیم حرکت می‌کند، در یک بازهٔ زمانی تغییر جهت نداشته باشد، اندازهٔ جابه‌جایی متحرک و مسافت طی‌شده توسط آن در این بازهٔ زمانی برابر است. با توجه به شکل صفحهٔ قبل در بازهٔ زمانی t_1 تا t_2 متحرک تغییر جهت نمی‌دهد؛ بنابراین در این بازهٔ زمانی اندازهٔ جابه‌جایی متحرک و مسافت طی‌شده توسط آن برابر است. ✓

ت) اگر مطابق شکل صفحهٔ قبل از مکان آغازین متحرک خط‌چینی موازی با محور زمان رسم کنیم، می‌بینیم که این خط‌چین در بازهٔ زمانی t_1 تا t_2 یک بار (در لحظهٔ t')، نمودار $x-t$ را قطع می‌کند و این یعنی در این بازهٔ زمانی، متحرک یک بار از مکان آغازین حرکت خود عبور کرده است. ✓

تست و پاسخ ۳



نمودار مکان ـ زمان سه متحرک A، B و C که بر روی محور x حرکت می‌کنند، مطابق شکل داده‌شده است. کدام عبارت‌ها دربارهٔ تندی متوسط (s_{av}) و اندازهٔ سرعت متوسط (v_{av}) آن‌ها در بازهٔ زمانی t_1 تا t_2 درست است؟

به مسیر حرکت (مسافت طی‌شده) توجه کنید.

به جابه‌جایی توجه کنید.

الف) $v_{av,A} = v_{av,B} = v_{av,C}$

ب) $v_{av,A} = v_{av,B} < v_{av,C}$

پ) $s_{av,A} < s_{av,B} < s_{av,C}$

ت) $s_{av,A} = s_{av,B} < s_{av,C}$

۱) الف و ب

۲) ب و پ

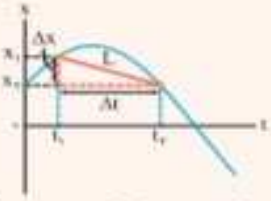
۳) پ و ت

۴) الف و ت

پاسخ: گزینه ۴

مشاوره در خیلی از تست‌های نموداری حرکت‌شناسی با مفاهیم ریاضی مثل شیب خط سروکار داریم؛ بنابراین باید بدانید که در هر نمودار (مثلاً مکان ـ زمان) شیب خط با چه مفهوم فیزیکی معادل است. در ضمن از روی نمودار، مفاهیم فیزیکی دیگری مثل جابه‌جایی، مسافت طی‌شده و ... را می‌توان به‌دست آورد. اگر این مهارت‌های ساده را بدانید حتماً تست‌های این مدلی را جواب می‌دهید.

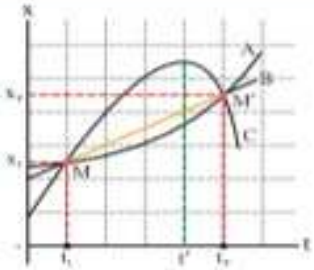
خودت حل کنی بهتره برای مقایسهٔ اندازهٔ سرعت متوسط متحرک‌ها در بازهٔ زمانی t_1 تا t_2، شیب خطی که نمودارها را در لحظات t_1 و t_2 قطع می‌کند، مقایسه کنید. برای مقایسهٔ تندی متوسط متحرک‌ها هم به این موضوع توجه کنید که آیا متحرک‌ها در بازهٔ زمانی t_1 تا t_2 تغییر جهت می‌دهند یا نه.



درس‌نامه ۱) شیب پاره‌خطی که نمودار مکان ـ زمان متحرک را در دو لحظهٔ t_1 و t_2 قطع می‌کند، برابر با سرعت متوسط متحرک در بازهٔ زمانی t_1 تا t_2 است.

$$\text{شیب خط } L = v_{av(t_1,t_2)} = \frac{x_2 - x_1}{t_2 - t_1} = \frac{\Delta x}{\Delta t}$$

۲) تندی متوسط همواره بزرگ‌تر یا مساوی اندازهٔ سرعت متوسط است. در حالتی که مسیر حرکت متحرک مستقیم باشد و متحرک تغییر جهت ندهد، تندی متوسط با اندازهٔ سرعت متوسط برابر است (برای مثال در نمودار بالا چون متحرک در بازهٔ زمانی t_1 تا t_2 یک بار تغییر جهت داده است، در این بازه تندی متوسط بزرگ‌تر از اندازهٔ سرعت متوسط است).



پاسخ تشریحی گام اول: روش اول: مطابق شکل روبه‌رو، اگر پاره‌خطی که نمودار هر متحرک را در لحظات t_1 و t_2 قطع می‌کند، رسم کنیم، این پاره‌خط برای هر سه متحرک، پاره‌خط MM' است. با توجه به این‌که اندازهٔ شیب این خط برابر با اندازهٔ سرعت متوسط هر یک از متحرک‌ها در بازهٔ زمانی t_1 تا t_2 است، اندازهٔ سرعت متوسط هر سه متحرک در بازهٔ زمانی t_1 تا t_2 برابر است:

$$v_{av,A} = v_{av,B} = v_{av,C} \quad (1)$$

روش دوم: با توجه به شکل روبه‌رو، هر سه متحرک A، B و C در بازهٔ زمانی t_1 تا t_2 از مکان x_1 به x_2 رفته‌اند؛ بنابراین در این بازهٔ زمانی، اندازهٔ جابه‌جایی سه متحرک برابر است: $\Delta x_A = \Delta x_B = \Delta x_C$

حالا به کمک رابطهٔ سرعت متوسط داریم:

$$v_{av} = \frac{\Delta x}{\Delta t} \rightarrow v_{av,A} = v_{av,B} = v_{av,C}$$

گام دوم، با توجه به نمودار، در بازهٔ زمانی t_1 تا t_2، جهت حرکت متحرک‌های A و B تغییر نمی‌کند؛ بنابراین در این بازهٔ زمانی، تندی متوسط هر یک از متحرک‌های A و B برابر با اندازهٔ سرعت متوسطشان است.

$$\begin{cases} s_{av,A} = v_{av,A} \\ s_{av,B} = v_{av,B} \end{cases} \xrightarrow{v_{av,A} = v_{av,B}} s_{av,A} = s_{av,B} \quad (۲)$$

همچنین در بازهٔ زمانی t_1 تا t_2، جهت حرکت متحرک C، یک بار (در لحظهٔ t') تغییر می‌کند. با توجه به این موضوع در این بازهٔ زمانی، تندی متوسط متحرک C بزرگ‌تر از اندازهٔ سرعت متوسطش است:

$$s_{av,C} > v_{av,C} \quad (۳)$$

گام سوم، با توجه به روابط (۱)، (۲) و (۳) می‌توان نوشت:

$$s_{av,C} > s_{av,A} = s_{av,B}$$

بنابراین عبارت‌های «الف» و «ت» درست‌اند.

تست و پاسخ ۴

خودرویی با طی مسیری از شهر A به شهر B می‌رود و از همان مسیر، در مدت یک ساعت، از شهر B به شهر A بازمی‌گردد. اگر تندی متوسط خودرو در مسیر رفت $۲۰\,m/s$ و در کل مسیر رفت و برگشت $۲۴\,m/s$ باشد، طول مسیر بین دو شهر چند کیلومتر است؟

۱) ۵۴ ۲) ۷۲ ۳) ۱۰۸ ۴) ۱۴۴

طول مسیر: ℓ ، زمان حرکت: t

طول مسیر: ۲ℓ ، زمان حرکت: $t + ۱$

پاسخ: گزینه ۳

مشاوره: بعضی تست‌ها مانند این تست ظاهر سختی دارند، ولی اگر اطلاعات مسئله را بنویسید و شروع به حل کنید، می‌فهمید که باید چه‌کار کنید.

خودت حل کنی بهتره: با استفاده از تندی متوسط در مسیر رفت که در صورت تست داده شده، مدت‌زمان حرکت در مسیر رفت را برحسب فاصلهٔ بین دو شهر به دست آورید؛ سپس به کمک تندی متوسط در کل مسیر رفت و برگشت و مدت‌زمان کل حرکت، فاصلهٔ بین دو شهر را محاسبه کنید.

درس‌نامه: درس‌نامهٔ (۳) در تست ۵۱ را بخوانید.

پاسخ تشریحی: گام اول، طول مسیری که خودرو بین شهرهای A و B می‌پیماید را برابر ℓ در نظر گرفته و رابطهٔ تندی متوسط را برای مسیر رفت می‌نویسیم:

$$s_{av(۱)} = \frac{\ell}{\Delta t_1} \xrightarrow{s_{av(۱)} = ۷۲\,km/h} ۷۲ = \frac{\ell}{\Delta t_1} \Rightarrow \Delta t_1 = \frac{\ell}{۷۲}$$

گام دوم، خودرو در مدت Δt_1 (برحسب ساعت) از شهر A به شهر B رفته و در مدت یک ساعت از شهر B به شهر A بازمی‌گردد؛ بنابراین کل زمان حرکت خودرو برابر با $(\Delta t_1 + ۱)$ ساعت است. رابطهٔ تندی متوسط را برای کل مسیر رفت و برگشت می‌نویسیم:

$$s_{av} = \frac{۲\ell}{\Delta t} \xrightarrow[\Delta t = \Delta t_1 + ۱\,(h)]{s_{av} = ۲۴\,m/s = ۸۶/۴\,km/h} ۸۶/۴ = \frac{۲\ell}{\Delta t_1 + ۱} \xrightarrow{\Delta t_1 = \frac{\ell}{۷۲}} ۸۶/۴ = \frac{۲\ell}{\frac{\ell}{۷۲} + ۱} \Rightarrow ۱/۲\ell + ۸۶/۴ = ۲\ell$$

$$\Rightarrow ۰/۸\ell = ۸۶/۴ \Rightarrow \ell = ۱۰۸\,km$$

توجه: در روابط بالا، چون طول مسیر بین دو شهر برحسب کیلومتر خواسته شده، تندی متوسط‌ها را به کیلومتر بر ساعت تبدیل کردیم.

تست و پاسخ ۵

معادلهٔ مکان ـ زمان متحرکی که در راستای محور x حرکت می‌کند، در SI به صورت $x = ۴t^۲ - ۲۴t + ۲۷$ است. در کل مدت‌زمانی که متحرک در حال نزدیک‌شدن به مکان اولیهٔ خود است، اندازهٔ سرعت متوسط آن چند متر بر ثانیه است؟

متحرک وقتی شروع به حرکت می‌کند، از مکان اولیه‌اش دور می‌شود؛ پس برای این‌که دوباره به مکان اولیه‌اش نزدیک شود باید تغییر جهت بدهد.

۱) ۹ ۲) ۱۲ ۳) ۱۸ ۴) ۲۴

پاسخ: گزینه ۲

مشاوره شناخت معادلهٔ مکان ـ زمان از اساسی‌ترین نیازهای فصل حرکت‌شناسی است. شما باید در بیرون‌کشیدن اطلاعات حرکت جسم از معادلهٔ مکان ـ زمان، مهارت کافی را کسب کنید تا بتوانید تحلیل درستی از حرکت جسم داشته باشید.

خودت حل کنی بهتره از روی معادلهٔ مکان ـ زمان می‌توان مکان اولیهٔ متحرک را تعیین کرد. اگر در معادلهٔ مکان ـ زمان به جای x، مکان اولیهٔ متحرک را قرار دهید، لحظه‌ای که متحرک از مکان اولیه‌اش عبور می‌کند به دست می‌آید؛ سپس به کمک رابطهٔ $t' = -\frac{B}{2A}$ لحظهٔ تغییر جهت متحرک را به دست آورده و سپس مکان تغییر جهت را محاسبه کنید. قبل از لحظهٔ تغییر جهت، متحرک از مکان اولیه‌اش دور و در بازهٔ زمانی بین لحظهٔ تغییر جهت تا لحظهٔ رسیدن به مکان اولیه، متحرک به مکان اولیه‌اش نزدیک می‌شود. در نهایت، هم بازهٔ زمانی‌ای که متحرک به مکان اولیه‌اش نزدیک می‌شود و هم جابه‌جایی متحرک در این بازهٔ زمانی را دارید. چه کاری راحت‌تر از به دست آوردن اندازهٔ سرعت متوسط متحرک در این بازه؟!

درس نامه ۱) معادلهٔ مکان ـ زمان متحرک، معادله‌ای است که مکان متحرک را برحسب زمان می‌دهد؛ یعنی با قراردادن یک t معین در این معادله، می‌توان مکان متحرک را در لحظهٔ t به دست آورد؛ برای مثال معادلهٔ $x = t^2 + 2t - 5$ می‌تواند معادلهٔ مکان ـ زمان یک متحرک باشد.

نکته اگر در معادلهٔ مکان ـ زمان، t را برابر صفر قرار دهیم، مکان متحرک در لحظهٔ $t = 0$ که همان مکان اولیهٔ متحرک است، به دست می‌آید. در معادلهٔ بالا، مکان اولیهٔ متحرک برابر $x_0 = -5\,m$ است.

۲) اگر معادلهٔ مکان ـ زمان متحرک تابعی درجه‌دو از زمان، یعنی به شکل $x = At^2 + Bt + C$ باشد، متحرک در لحظهٔ $t' = -\frac{B}{2A}$ تغییر جهت می‌دهد؛ برای مثال لحظهٔ تغییر جهت متحرکی که معادلهٔ مکان ـ زمان آن به شکل $x = t^2 - 2t + 5$ است، به صورت زیر به دست می‌آید:

$$t' = -\frac{(-2)}{2 \times 1} = 1\,s$$

تذکر در حالتی که t' برابر صفر یا عددی منفی شود، متحرک تغییر جهت نمی‌دهد.

۳) اگر متحرک در امتداد محور x حرکت کند، رابطهٔ سرعت متوسط به صورت روبه‌رو است:

$$\bar{v}_{av} = \frac{\Delta \bar{x}}{\Delta t}$$

پاسخ تشریحی گام اول: در معادلهٔ مکان ـ زمان دادمشده، t را برابر صفر قرار می‌دهیم تا مکان اولیهٔ متحرک به دست آید:

$$x = 4t^2 - 24t + 27 \xrightarrow{t=0} x_0 = 27\,m$$

حالا اگر در معادلهٔ مکان ـ زمان، x را برابر ۲۷ قرار دهیم، لحظه‌ای که متحرک از مکان اولیه‌اش عبور می‌کند، به دست می‌آید:

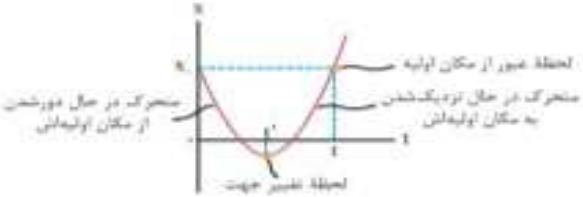
$$x = 4t^2 - 24t + 27 \xrightarrow{x=27} 27 = 4t^2 - 24t + 27 \Rightarrow 4t^2 - 24t = 0 \Rightarrow 4t(t-6) = 0 \Rightarrow t = 0, t = 6\,s$$

متحرک در لحظهٔ $t = 6\,s$ از مکان اولیه‌اش عبور می‌کند (با $t = 0$ که مبدأ زمانه کاری نداریم، چون متحرک در این لحظه حرکتش را از مکان اولیه‌اش شروع می‌کند).

گام دوم: حالا می‌خواهیم لحظهٔ تغییر جهت متحرک را به دست آوریم. چون معادلهٔ مکان ـ زمان متحرک تابعی درجه‌دو از زمان است، لحظهٔ تغییر جهت متحرک به صورت مقابل به دست می‌آید:

$$x = \underbrace{4}_{A}t^2 \underbrace{-24}_{B}t + \underbrace{27}_{C}$$

$$t' = -\frac{B}{2A} = -\frac{(-24)}{2 \times 4} = 3\,s$$



متحرک در بازهٔ زمانی $(0, 3\,s)$ در حال دورشدن از مکان اولیه‌اش و در بازهٔ زمانی $(3\,s, 6\,s)$ در حال نزدیک‌شدن به مکان اولیه‌اش است (برای درک بهتر این موضوع شکل بالا رو ببینید).

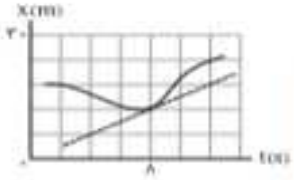
گام سوم: به مکان متحرک در لحظهٔ t' نیاز داریم. با قراردادن $t' = 3\,s$ در معادلهٔ مکان ـ زمان، داریم:

$$x = 4t^2 - 24t + 27 \xrightarrow{t'=3} x' = \underbrace{4(3)^2}_{4\times9} - \underbrace{24(3)}_{8\times3} + \underbrace{27}_{9\times3} = 9(4 - 8 + 3) \Rightarrow x' = 9 \times (-1) = -9\,m$$

گام چهارم: همه چیز برای محاسبهٔ اندازهٔ سرعت متوسط در بازهٔ زمانی‌ای که متحرک در حال نزدیک‌شدن به مکان اولیه‌اش است (یعنی بازهٔ زمانی $t' = 3\,s$ تا $t = 6\,s$) را داریم؛ بنابراین:

$$v_{av} = \frac{\Delta x}{\Delta t} = \frac{27 - (-9)}{6 - 3} = \frac{36}{3} = 12\,m/s$$

تست و پاسخ ۶



نمودار مکان ـ زمان متحرکی که در راستای محور x حرکت می‌کند، به شکل داده‌شده است. تندی متحرک در لحظهٔ $t = ۸\,s$ چند برابر تندی متوسط متحرک در بازهٔ زمانی ۲ s تا ۱۲ s است؟

(خط‌چین رسم‌شده، در لحظهٔ $t = ۸\,s$ بر نمودار مماس است.)

۱) $\frac{۵}{۲}$

۲) $\frac{۶}{۵}$

۳) $\frac{۵}{۶}$

۴) $\frac{۲}{۵}$

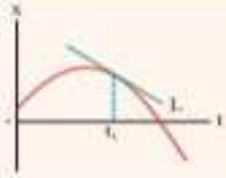
شیب نمودار در لحظهٔ ۸ s را می‌توانید محاسبه کنید.

این جا تندی متوسط را نمی‌توانیم از روی شیب خط گذرنده از دو نقطه محاسبه کنیم. به نظرتون چرا؟!

پاسخ: گزینه ۳

مشاهده ارتباط بین شیب خط مماس بر نمودار مکان ـ زمان و اندازهٔ سرعت (تندی) متحرک از مفاهیمی است که هم در کتاب درسی و هم در کنکور سراسری به آن پرداخته شده است.

خودت حل کنی بهتره برای محاسبهٔ تندی متحرک در لحظهٔ ۸ s، شیب خط مماس بر نمودار در این لحظه را به دست بیاورید. برای محاسبهٔ تندی متوسط در بازهٔ ۲ s تا ۱۲ s، ابتدا باید از روی نمودار بفهمید که متحرک در این مدت چه مسافتی را پیموده است و سپس به کمک رابطهٔ تندی متوسط، مقدار آن را به دست آورید.

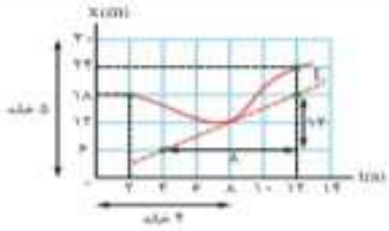


درس‌نامه ۱) شیب خط مماس بر نمودار مکان ـ زمان متحرک در هر لحظه بیانگر سرعت متحرک در آن لحظه است.

$v_{(t_1)} =$ شیب خط L

همچنین می‌دانید که اندازهٔ سرعت متحرک در هر لحظه همان تندی متحرک در آن لحظه است.

۲) درس‌نامهٔ (۳) در تست ۵۱ را بخوانید.



پاسخ تشریحی گام اول: اندازهٔ سرعت (تندی) متحرک در لحظهٔ $t = ۸\,s$ برابر با اندازهٔ شیب خط مماس بر نمودار مکان ـ زمان در این لحظه (خط‌چین L رسم‌شده در شکل روبه‌رو) است. با توجه به شکل روبه‌رو، پنج خانه روی محور x برابر ۳۰ m و چهار خانه روی محور t برابر ۸ s است؛ بنابراین هر خانه روی محور x، ۶ m و هر خانه روی محور t، ۲ s است. شیب خط‌چین مماس بر نمودار در لحظهٔ ۸ s را به دست می‌آوریم:

$$v_۸ = L \text{ شیب خط‌چین } \Rightarrow v_۸ = \frac{۱۸ - ۶}{۱۲ - ۴} = \frac{۱۲}{۸} = \frac{۳}{۲}\,m/s$$

گام دوم: تندی متوسط در بازهٔ زمانی ۲ s تا ۱۲ s را می‌خواهیم. باید ببینیم متحرک در این مدت چه مسافتی را می‌پیماید. با توجه به نمودار بالا متحرک در بازهٔ ۲ s تا ۸ s از مکان ۱۸ m به مکان ۱۲ m و در بازهٔ زمانی ۸ s تا ۱۲ s از مکان ۱۲ m به مکان ۲۴ m می‌رود؛ بنابراین مسافت طی‌شده توسط متحرک برابر است با:

$$\ell = |۱۲ - ۱۸| + |۲۴ - ۱۲| = ۶ + ۱۲ = ۱۸\,m$$

حالا تندی متوسط در بازهٔ ۲ s تا ۱۲ s را به دست می‌آوریم:

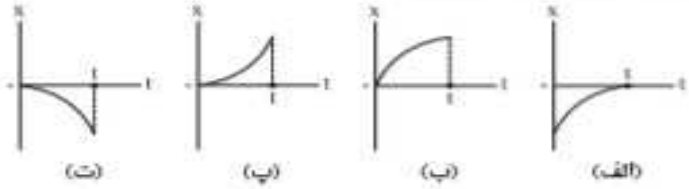
$$s_{av(۲,۱۲)} = \frac{\ell}{\Delta t} = \frac{۱۸}{۱۲ - ۲} = \frac{۱۸}{۱۰} = \frac{۹}{۵}\,m/s$$

گام سوم: نسبت خواسته‌شده برابر است با:

$$\frac{v_۸}{s_{av(۲,۱۲)}} = \frac{\frac{۳}{۲}}{\frac{۹}{۵}} = \frac{\overset{۱}{\cancel{۳}} \times ۵}{۲ \times \underset{۳}{\cancel{۹}}} = \frac{۵}{۶}$$

تست و پاسخ ۷

نمودار مکان ـ زمان چهار متحرک که روی محور x حرکت می‌کنند، به صورت داده‌شده است. در کدام‌یک از موارد زیر در بازهٔ زمانی صفر تا t، بردارهای مکان، سرعت و شتاب پیوسته هم‌جهت است؟



۱) الف و ب

۲) پ و ت

۳) الف و ت

۴) ب و پ

پاسخ: گزینه ۲

مشاوره تشخیص علامت کمیت‌های حرکت‌شناسی مانند سرعت و شتاب از روی نمودار مکان ـ زمان نیازمند اطلاعات ریاضی مثل شیب و تعقر است. در فصل حرکت‌شناسی این مفاهیم ریاضی در تحلیل نمودارهای حرکت متحرک خیلی به کمکتان می‌آید.

خودت حل کنی بهتره در نمودار $x-t$، علامت x بیانگر جهت بردار مکان، علامت شیب نمودار در هر لحظه بیانگر جهت سرعت در آن لحظه و جهت گودی (تقعر) نمودار بیانگر جهت شتاب متحرک است. با استفاده از این مفاهیم جهت این سه بردار را برای هر یک از متحرک‌ها تعیین کرده و خواسته تست را به دست آورید.

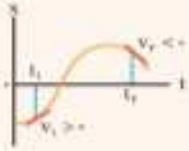
درس نامه ۱) در نمودار مکان ـ زمان متحرک، علامت x در هر لحظه، بیانگر جهت بردار مکان در آن لحظه است:

- اگر علامت x مثبت باشد (نمودار بالای محور t باشد)؛ بردار مکان در جهت محور x (مانند x_1 در نمودار «الف»)
- اگر علامت x منفی باشد (نمودار پایین محور t باشد)؛ بردار مکان در خلاف جهت محور x (مانند x_2 در نمودار «الف»)

(الف)

۲) در نمودار مکان ـ زمان متحرک، علامت شیب مماس بر نمودار در هر لحظه، بیانگر جهت بردار سرعت در آن لحظه است:

- اگر علامت شیب مماس بر نمودار مثبت باشد؛ بردار سرعت در جهت محور x (مانند لحظهٔ t_1 در نمودار «ب»)
- اگر علامت شیب مماس بر نمودار منفی باشد؛ بردار سرعت در خلاف جهت محور x (مانند لحظهٔ t_2 در نمودار «ب»)



(ب)

نکته جهت بردار سرعت متحرک همان جهت حرکت متحرک است. متحرکی که در جهت محور x حرکت می‌کند، بردار سرعتش در جهت محور x است.

نکته از روی صعودی یا نزولی بودن نمودار مکان ـ زمان هم می‌توان جهت حرکت متحرک را مشخص کرد. اگر نمودار صعودی باشد، متحرک در جهت محور x حرکت می‌کند (بردار سرعتش در جهت محور x است.) و اگر نمودار نزولی باشد، متحرک در خلاف جهت محور x حرکت می‌کند (بردار سرعتش در خلاف جهت محور x است).

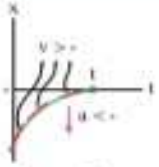
۳) در نمودار مکان ـ زمان، جهت گودی (تقعر) نمودار، بیانگر جهت بردار شتاب است:

- اگر جهت گودی رو به بالا باشد؛ بردار شتاب در جهت محور x (مانند بازهٔ t_1 تا t_2 در نمودار «پ»)
- اگر جهت گودی رو به پایین باشد؛ بردار شتاب در خلاف جهت محور x (مانند بازهٔ صفر تا t_1 در نمودار «پ»)

(پ)

بررسی گزینه‌ها هر یک از نمودارها را جداگانه بررسی می‌کنیم:

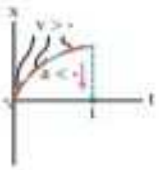
الف) از روی نمودار شکل «الف» مشخص است که xهای متحرک منفی است؛ بنابراین بردار مکان متحرک در بازهٔ $(0,t)$ همواره در خلاف جهت محور x است. از طرفی اگر مطابق شکل «الف» خطوط مماس بر نمودار را در لحظات مختلف رسم کنیم، می‌بینیم که علامت شیب این مماس‌ها در هر لحظه مثبت است و این یعنی سرعت متحرک در تمام لحظات بازهٔ زمانی $(0,t)$ در جهت محور x است؛ هم‌چنین از روی شکل «الف» مشخص است که جهت گودی (تقعر) نمودار رو به پایین است؛ پس شتاب متحرک در تمام لحظات بازهٔ زمانی $(0,t)$ در خلاف جهت محور x است.



(الف)

با توجه به توضیحات بالا در بازهٔ زمانی $(0,t)$، بردارهای مکان و شتاب همواره هم‌جهت‌اند، ولی بردار سرعت در خلاف جهت آن‌هاست. ×

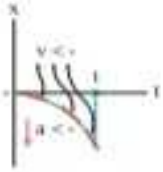
ب) همان‌طور که از روی نمودار شکل «ب» می‌توان فهمید، xهای متحرک مثبت است؛ بنابراین بردار مکان متحرک در بازهٔ $(0,t)$ همواره در جهت محور x است. حالا مطابق شکل «ب» خطوط مماس بر نمودار را در لحظات مختلف رسم می‌کنیم. همان‌طور که مشخص است علامت شیب این مماس‌ها در هر لحظه مثبت است و این یعنی سرعت متحرک در تمام لحظات بازهٔ زمانی $(0,t)$ در جهت محور x است؛ هم‌چنین از روی شکل «ب» پیداست که جهت گودی (تقعر) نمودار رو به پایین است؛ پس شتاب متحرک در تمام لحظات بازهٔ زمانی $(0,t)$ در خلاف جهت محور x است. با توجه به توضیحات بالا در بازهٔ زمانی $(0,t)$، بردارهای مکان و سرعت همواره هم‌جهت‌اند، ولی بردار شتاب در خلاف جهت آن‌هاست. ×



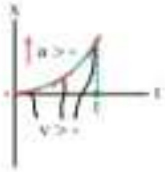
(ب)

پ) اگر بررسی‌هایی که برای شکل‌های «الف» و «ب» انجام دادیم را برای متحرک شکل «پ» انجام دهیم، به این نتیجه می‌رسیم که در بازهٔ زمانی $(0, t)$ بردارهای مکان، سرعت و شتاب متحرک همواره در جهت محور x هستند و بنابراین در این بازهٔ زمانی پیوسته با هم، هم‌جهت‌اند ✓

ت) با توجه به شکل «ت»، برای این متحرک در بازهٔ زمانی $(0, t)$، بردارهای مکان، سرعت و شتاب همواره در خلاف جهت محور x هستند و در نتیجه این بردارها پیوسته با هم، هم‌جهت‌اند ✓



(ت)



(پ)

تست و پاسخ ۸

معادلهٔ مکان ـ زمان متحرکی که در راستای محور x حرکت می‌کند، در SI به صورت $x = t^2 - 4t + 9$ است. اگر سرعت متوسط متحرک در بازهٔ زمانی صفر تا T، برابر با صفر باشد، سرعت متوسط متحرک در بازهٔ زمانی صفر تا 2T برحسب متر بر ثانیه کدام است؟ $(T \neq 0)$

جابه‌جایی متحرک (Δx) در بازهٔ زمانی صفر تا T برابر صفر است.

۱) $12\vec{i}$ ۲) $-12\vec{i}$

۳) $6\vec{i}$ ۴) $-6\vec{i}$

پاسخ: گزینه ۱

مشاوره با تستی روبه‌رو هستید که مفهوم فیزیکی ساده‌ای دارد، ولی باید در محاسبات ریاضی آن دقیق باشید.

خودت حل کنی بهتره سرعت متوسط متحرک در بازهٔ زمانی صفر تا T، برابر با صفر است؛ بنابراین مکان متحرک در لحظهٔ T همان مکان اولیهٔ متحرک است. اگر مکان متحرک در لحظهٔ T را در معادلهٔ مکان ـ زمان قرار دهید، لحظهٔ T به دست می‌آید. با داشتن T، هم می‌توانید 2T و هم مکان متحرک در لحظهٔ 2T را به دست آورید. در انتها همه چیز برای محاسبهٔ سرعت متوسط در بازهٔ زمانی صفر تا 2T را در اختیار دارید.

درس نامه درس‌نامه‌های (۱) و (۳) در تست ۵۵ را بخوانید.

پاسخ تشریحی روش اول: گام اول، سرعت متوسط متحرک در بازهٔ زمانی صفر تا T، برابر با صفر است؛ بنابراین مکان متحرک در لحظات صفر و T یکسان است:

$$v_{av(0,T)} = 0 \Rightarrow \frac{\Delta x_{(0,T)}}{T-0} = 0 \Rightarrow x_T - x_0 = 0 \Rightarrow x_T = x_0$$

گام دوم، به کمک معادلهٔ مکان ـ زمان، T را به دست می‌آوریم:

$$\begin{cases} x_0 = 9\,m \\ x_T = T^2 - 4T + 9 \end{cases} \Rightarrow T^2 - 4T + 9 = 9 \Rightarrow T^2 - 4T = 0 \Rightarrow T(T^2 - 4) = 0 \Rightarrow \begin{cases} T = 0 & \text{غ ق ق} \\ T = -2\,s & \text{غ ق ق} \\ T = 2\,s & \text{ق ق} \end{cases}$$

گام سوم، تست، سرعت متوسط در بازهٔ زمانی صفر تا 4 s $(2T = 2 \times 2)$ را می‌خواهد. مکان متحرک در لحظهٔ 4 s برابر است با:

$$x_4 = (4)^2 - 4(4) + 9 = (4)^2(4-1) + 9 = (16 \times 3) + 9 = 57\,m$$

حالا خواستهٔ تست را به دست می‌آوریم: $v_{av(0,4)} = \frac{\Delta x_{(0,4)}}{\Delta t} = \frac{x_4 - x_0}{4-0} = \frac{57-9}{4} = \frac{48}{4} = 12\,m/s \Rightarrow \vec{v}_{av(0,4)} = (12\,m/s)\vec{i}$

روش دوم: گام اول، سرعت متوسط در بازهٔ زمانی صفر تا T برابر صفر است؛ پس:

$$v_{av(0,T)} = 0 \Rightarrow \frac{\Delta x_{(0,T)}}{\Delta t} = 0 \Rightarrow \frac{x_T - x_0}{T-0} = 0 \Rightarrow \frac{(T^2 - 4T + 9) - (0 - 0 + 9)}{T} = 0$$

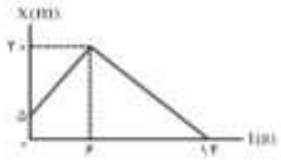
$$\Rightarrow T^2 - 4 = 0 \Rightarrow \begin{cases} T = 2\,s & \text{ق ق} \\ T = -2\,s & \text{غ ق ق} \end{cases}$$

گام دوم، سرعت متوسط در بازهٔ زمانی صفر تا 2T به صورت زیر به دست می‌آید:

$$v_{av(0,2T)} = \frac{\Delta x_{(0,2T)}}{\Delta t} = \frac{((2T)^2 - 4(2T) + 9) - (0 - 0 + 9)}{2T - 0} = \frac{8T^2 - 8T}{2T} = 4T^2 - 4$$

$$\xrightarrow{T=2s} v_{av(0,4)} = 4(2)^2 - 4 = 12\,m/s \Rightarrow \vec{v}_{av(0,4)} = (12\,m/s)\vec{i}$$

تست و پاسخ ۹



نمودار مکان ـ زمان متحرکی که در راستای محور x حرکت می‌کند، به شکل داده‌شده است. اگر سرعت متوسط متحرک در بازهٔ زمانی $t_1 = ۴\,s$ تا t_2 برابر صفر باشد، تندی متوسط آن در بازهٔ زمانی صفر تا t_2 چند متر بر ثانیه است؟

جابه‌جایی متحرک (Δx) در بازهٔ زمانی t_1 تا t_2 برابر صفر است.

۱) ۱/۲۵
۲) ۲/۵
۳) ۲
۴) ۵

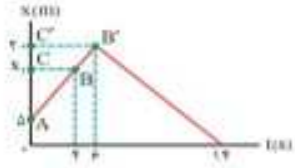
پاسخ: گزینه ۲

مشاوره در نمودارهای حرکت‌شناسی، تسلط بر نسبت‌های تشابه مثلثات خیلی کار راه‌انداز است. خیلی از مواقع جواب‌ندادن به تست دلیل فیزیکی ندارد و دلیلش ندانستن مباحث پایه‌ای ریاضی است؛ پس به شما توصیه می‌کنیم که مباحثی مانند تشابه مثلث‌ها (قضیهٔ تالس) را خوب یاد بگیرید.

خودت حل کنی بهتره مکان متحرک در لحظهٔ t_1، یعنی x_1 را به کمک قضیهٔ تالس (تشابه مثلث‌ها) به دست آورید. با توجه به صفربودن سرعت متوسط در بازهٔ زمانی t_1 تا t_2، مکان متحرک در لحظهٔ t_2 یعنی x_2 برابر با مکان متحرک در لحظهٔ t_1 است. با استفادهٔ دوباره از قضیهٔ تالس، لحظهٔ t_2 را به دست آورید. حالا هم مدت‌زمان بین صفر تا t_2 را دارید و هم می‌توانید از روی نمودار، مسافت طی‌شده توسط متحرک در این بازهٔ زمانی را محاسبه کنید. در نهایت مقادیر به دست آمده را در رابطهٔ تندی متوسط قرار دهید.

درس‌نامه ◄◄ درس‌نامهٔ (۳) در تست ۵۱ را بخوانید.

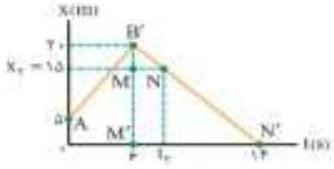
پاسخ تشریحی گام اول: به کمک تشابه مثلث‌های ABC و AB′C′ در شکل «الف»، مکان متحرک در لحظهٔ $t_1 = ۴\,s$ (یعنی x_1) را به دست می‌آوریم:



(الف)

$$\frac{\overline{B'C'}}{\overline{BC}} = \frac{\overline{C'A}}{\overline{CA}} \Rightarrow \frac{۶}{۴} = \frac{\overbrace{۲۰-۵}^{۱۵}}{x_1 - ۵} \Rightarrow x_1 - ۵ = \frac{۶۰}{۶} \Rightarrow x_1 = ۱۵\,m$$

گام دوم: سرعت متوسط در بازهٔ زمانی $t_1 = ۴\,s$ تا t_2 برابر صفر است؛ بنابراین مکان متحرک در لحظهٔ t_2 با مکان متحرک در لحظهٔ t_1 (یعنی $x_1 = ۱۵\,m$) برابر است. مطابق شکل «ب» و به کمک تشابه مثلث‌های B′M′N′ و B′MN، t_2 را به دست می‌آوریم:



(ب)

$$\frac{\overline{B'M'}}{\overline{B'M}} = \frac{\overline{M'N'}}{\overline{MN}} \Rightarrow \frac{۲۰}{\underbrace{۲۰-۱۵}_{۵}} = \frac{\overbrace{۱۴-۶}^{۸}}{t_2 - ۶} \Rightarrow t_2 - ۶ = ۲ \Rightarrow t_2 = ۸\,s$$

تکنیک با توجه به نمودار، اندازهٔ شیب خط‌های AB′ و B′N′ برابر است با:

$$|AB'| = \frac{۲۰-۵}{۶} = \frac{۱۵}{۶} = ۲/۵$$

$$|B'N'| = \frac{۲۰-۰}{۱۴-۶} = \frac{۲۰}{۸} = ۲/۵$$

با توجه به این موضوع، چون متحرک در مدت ۲ s ($۶ - t_1 = ۶ - ۴$) از مکان $x_1 = ۱۵\,m$ به مکان ۲۰ m می‌رسد، جابه‌جایی متحرک از مکان ۲۰ m تا $x_2 = ۱۵\,m$ هم ۲ s طول می‌کشد؛ بنابراین:

$$t_2 - ۶ = ۲ \Rightarrow t_2 = ۸\,s$$

گام سوم: متحرک در بازهٔ زمانی صفر تا $t_2 = ۸\,s$ از مکان ۵ m تا مکان ۲۰ m رفته و سپس به مکان $x_2 = ۱۵\,m$ برمی‌گردد؛ بنابراین تندی متوسط متحرک برابر است با:

$$s_{av} = \frac{\ell}{\Delta t} = \frac{(۲۰-۵) + |۱۵-۲۰|}{۸-۰} = \frac{۱۵+۵}{۸} = ۲/۵\,m/s$$

تست و پاسخ ۱۰

متحرکی که روی محور x حرکت می‌کند، در بازهٔ زمانی معینی در حالی که تندی آن به طور پیوسته در حال کاهش است، از مبدأ مکان عبور می‌کند.

کدام‌یک از گزینه‌های زیر دربارهٔ حرکت متحرک در این بازهٔ زمانی درست است؟

۱) بردارهای سرعت و شتاب ابتدا هم‌جهت و سپس در خلاف جهت یکدیگرند.

۲) بردارهای مکان و شتاب ابتدا هم‌جهت و سپس در خلاف جهت یکدیگرند.

۳) هنگام عبور متحرک از مبدأ بردارهای سرعت و شتاب تغییر جهت می‌دهند.

۴) بردارهای مکان و سرعت ابتدا هم‌جهت و سپس در خلاف جهت یکدیگرند.

به کمک نوع حرکت، می‌توانید جهت بردارهای سرعت و شتاب نسبت به هم را تشخیص دهید.

بردار مکان متحرک تغییر جهت می‌دهد.

پاسخ: گزینه ۲

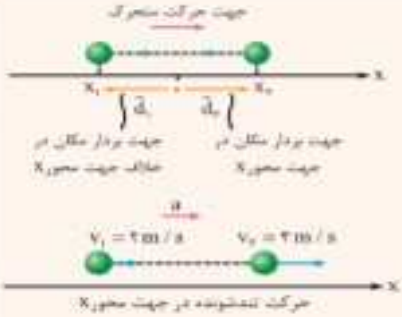
مشاوره برخی تست‌ها مانند این تست ظاهر حفظی و به نظر ساده‌ای دارند، ولی در واقع تستی مفهومی‌اند که برای درست جواب دادن به آن نیاز به یک تحلیل درست و دقیق دارید. برای پاسخ دادن به این تست باید مفاهیم حرکت‌شناسی را خوب بلد باشید.

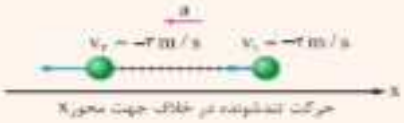
خودت حل کنی بهتره دو حالت (دو جهت) برای حرکت جسم داریم. هر یک از این حالت‌ها را رسم کرده و با توجه به اطلاعات تست، بردارهای سرعت، شتاب و مکان جسم را تعیین کنید. درستی یا نادرستی گزینه‌ها را با توجه به جهت این بردارها که روی شکل رسم گردید، بررسی کنید.

درس نامه ۱۰ ۱) با عبور متحرک از مبدأ، جهت بردار مکان آن تغییر می‌کند.

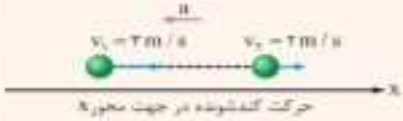
۲) مفهوم حرکت تندشونده و حرکت کندشونده

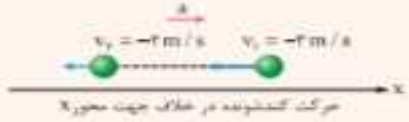
۱) حرکت تندشونده، به حرکتی گفته می‌شود که در آن اندازهٔ سرعت (تندی) متحرک پیوسته افزایش می‌یابد. در این نوع حرکت بردارهای سرعت و شتاب متحرک همواره با یکدیگر هم‌جهت‌اند.





۲) حرکت کندشونده، به حرکتی گفته می‌شود که در آن اندازهٔ سرعت (تندی) متحرک پیوسته کاهش می‌یابد. در این نوع حرکت بردارهای سرعت و شتاب متحرک همواره در خلاف جهت یکدیگرند.

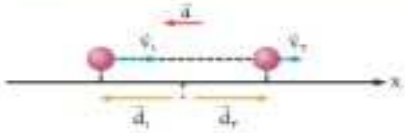




پاسخ تشریحی جهت حرکت متحرک مشخص نیست؛ بنابراین دو حالت داریم:

الف) متحرک در جهت محور x حرکت کند:

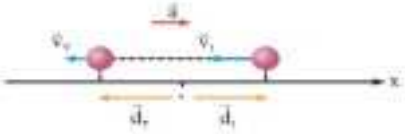
در این حالت بردار سرعت متحرک در جهت محور x و با توجه به این‌که تندی متحرک پیوسته در حال کاهش است، بردار شتاب آن همواره در خلاف جهت بردار سرعت یعنی در خلاف جهت محور x است.



الف) حالت اول

ب) متحرک در خلاف جهت محور x حرکت کند:

در این حالت بردار سرعت متحرک در خلاف جهت محور x و با توجه به این‌که تندی متحرک پیوسته در حال کاهش است، بردار شتاب آن همواره در خلاف جهت بردار سرعت یعنی در جهت محور x است.



ب) حالت دوم

با توجه به شکل‌های «الف» و «ب» درستی یا نادرستی گزینه‌ها را بررسی می‌کنیم:

۱) نادرست: بردارهای سرعت و شتاب همواره در خلاف جهت یکدیگرند.

۲) درست: بردارهای مکان و شتاب ابتدا هم‌جهت و سپس در خلاف جهت یکدیگرند.

۳) نادرست: هنگام عبور متحرک از مبدأ، نه بردار سرعت تغییر جهت می‌دهد، نه بردار شتاب.

۴) نادرست: بردارهای مکان و سرعت ابتدا در خلاف جهت یکدیگر و سپس هم‌جهت‌اند.

تست و پاسخ ۱۱

سرعت دو متحرک A و B که در راستای محور x حرکت می‌کنند، در لحظهٔ $t = ۲/۵\,s$ برابر است. اگر شتاب متوسط دو متحرک در ۲/۵ ثانیهٔ اول به ترتیب $(۲/۴\,m/s^۲)\vec{i}$ و $(۱/۸\,m/s^۲)\vec{i}$ باشد، اختلاف تندی دو متحرک در مبدأ زمان چند متر بر ثانیه می‌تواند باشد؟

۱) صفر

۲) ۲/۵

۳) ۴/۵

۴) ۱۰/۵

پاسخ: گزینه ۱

مشاوره اگر سر جلسهٔ آزمون این تست را درست حل کردید، رمتون گرم؛ ولی اگر حل نکردید اصلاً ناراحت و نگران نباشید، شما با یک تست خاص و خلاقانه طرف هستید. به شما توصیه می‌کنیم که حتماً پاسخ تشریحی آن را مو به مو بخوانید و یاد بگیرید.

خودت حل کنی بهتره رابطهٔ شتاب متوسط را برای هر کدام از متحرک‌های A و B بنویسید. به کمک دو معادله‌ای که به دست می‌آید، اختلاف سرعت‌های دو متحرک در مبدأ زمان قابل محاسبه است. توجه کنید که تست، اختلاف تندی‌های دو متحرک در مبدأ زمان را می‌خواهد. به کمک اختلاف سرعت‌های دو متحرک در مبدأ زمان و تحلیل نمودار $(v-t)$ دو متحرک، می‌توانید بفهمید که اختلاف تندی‌های دو متحرک در مبدأ زمان چه مقادیری می‌تواند داشته باشد.

درس نامه اگر بردار سرعت متحرک در لحظهٔ $t_۱$ برابر $\vec{v}_۱$ و در لحظهٔ $t_۲$ برابر $\vec{v}_۲$ باشد، شتاب متوسط متحرک در بازهٔ زمانی $t_۱$ تا $t_۲$ از رابطهٔ زیر به دست می‌آید:

$$\vec{a}_{av(t_۱,t_۲)} = \frac{\vec{v}_۲ - \vec{v}_۱}{t_۲ - t_۱} = \frac{D\vec{v}}{Dt}$$

(m/s) ¾ÃÀÝ ¾ÃÀÝ ¾ÃÀÝ (s) ¾ÃÀÝ

(m/s²) ¾ÃÀÝ ¾ÃÀÝ ¾ÃÀÝ

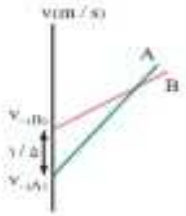
پاسخ تشریحی گام اول: سرعت دو متحرک در لحظهٔ $t = ۲/۵\,s$ برابر است. آن را v در نظر گرفته و رابطهٔ شتاب متوسط را برای هر یک از متحرک‌ها در ۲/۵ ثانیهٔ اول می‌نویسیم:

$$a_{av,A} = \frac{v - v_{۰(A)}}{\Delta t} \Rightarrow ۲/۴ = \frac{v - v_{۰(A)}}{۲/۵} \Rightarrow v - v_{۰(A)} = ۶ \quad (۱)$$

$$a_{av,B} = \frac{v - v_{۰(B)}}{\Delta t} \Rightarrow ۱/۸ = \frac{v - v_{۰(B)}}{۲/۵} \Rightarrow v - v_{۰(B)} = ۴/۵ \quad (۲)$$

گام دوم: طرفین رابطهٔ (۱) را از طرفین رابطهٔ (۲) کم می‌کنیم تا اختلاف سرعت‌های دو متحرک در مبدأ زمان (اختلاف سرعت‌های اولیه) به دست بیاید:

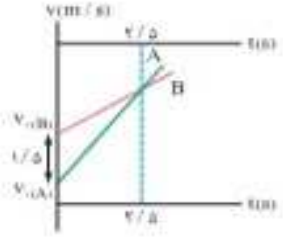
$$(۲) - (۱) \Rightarrow v - v_{۰(B)} - (v - v_{۰(A)}) = ۴/۵ - ۶ \Rightarrow v_{۰(A)} - v_{۰(B)} = -۱/۵$$



گام سوم: تست اختلاف تندی‌های دو متحرک در مبدأ زمان (اختلاف تندی‌های اولیه) را می‌خواهد. بهترین راه، رسم نمودار سرعت ـ زمان دو متحرک و تحلیل حالت‌های مختلفی است که می‌تواند رخ دهد. با توجه به این‌که در ۲/۵ ثانیهٔ اول، شتاب متوسط متحرک A بیشتر از شتاب متوسط متحرک B است، شیب نمودار سرعت ـ زمان متحرک A بیشتر از شیب نمودار سرعت ـ زمان متحرک B است؛ همچنین برای راحتی تحلیل، فرض کردیم شتاب دو متحرک ثابت است و نمودارها را به صورت یک خط راست کشیدیم (*فعلاً محور زمان رو رسم نکردیم*).

www.mapedu.ir

حالا بسته به محل قرارگیری محور زمان، حالت‌های زیر ممکن است رخ دهد:



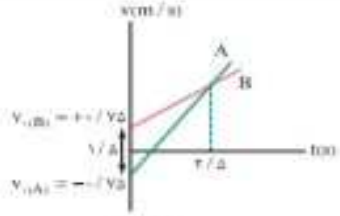
۱) محور زمان بالای نقطهٔ شروع دو نمودار یا پایین آن‌ها باشد.

در این حالت علامت‌های $V_{\circ(A)}$ و $V_{\circ(B)}$، هر دو مثبت یا هر دو منفی است و اختلاف تندی‌های اولیهٔ دو متحرک برابر با بیشینهٔ مقدار خود یعنی $۱/۵\,m/s$ است:

$V_{\circ(A)} > \circ , V_{\circ(B)} > \circ \Rightarrow s_{\circ(B)} - s_{\circ(A)} = ۱/۵\,m/s$ ⇐ محور زمان پایین نقطهٔ شروع نمودارها

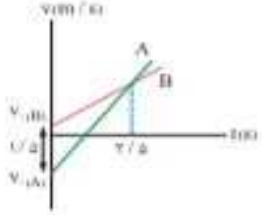
$V_{\circ(A)} < \circ , V_{\circ(B)} < \circ \Rightarrow s_{\circ(A)} - s_{\circ(B)} = ۱/۵\,m/s$ ⇐ محور زمان بالای نقطهٔ شروع نمودارها

خواستن باشه حالتی که سرعت اولیهٔ یکی از متحرک‌ها برابر صفر باشد، جزء همین حالت است و اختلاف تندی‌های اولیهٔ دو متحرک برابر $۱/۵\,m/s$ می‌شود.



۲) محور زمان دقیقاً در وسط فاصلهٔ بین نقطهٔ شروع نمودارها باشد.

در این حالت $V_{\circ(A)}$ و $V_{\circ(B)}$ هم‌اندازه و مختلف‌العلامت‌اند و اختلاف تندی‌های اولیهٔ دو متحرک برابر با صفر می‌شود: $|V_{\circ(A)}| = |V_{\circ(B)}| \Rightarrow s_{\circ(A)} = s_{\circ(B)} \Rightarrow s_{\circ(A)} - s_{\circ(B)} = \circ$



۳) محور زمان در فاصلهٔ بین نقطهٔ شروع نمودارها (نه وسط آن) باشد.

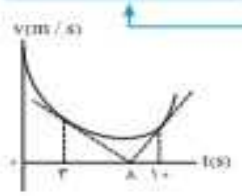
در این حالت اختلاف تندی‌های دو متحرک هر مقداری بین صفر و $۱/۵\,m/s$ می‌تواند داشته باشد:

$\circ < |s_{\circ(A)} - s_{\circ(B)}| < ۱/۵\,m/s$

تست و پاسخ ۱۲

نمودار سرعت ـ زمان متحرکی که روی خط راست حرکت می‌کند، به شکل داده‌شده است. اگر اندازهٔ شتاب متحرک در لحظهٔ $t = ۱\circ\,s$، ۲ برابر اندازهٔ شتاب آن در لحظهٔ $t = ۳\,s$ باشد، تندی متحرک در لحظهٔ $t = ۱\circ\,s$ چند برابر تندی آن در لحظهٔ $t = ۳\,s$ است؟ (دو خط‌چین رسم‌شده، در لحظه‌های $t = ۳\,s$ و $t = ۱\circ\,s$ بر نمودار مماس هستند.)

شیب نمودار در لحظه‌های ۳ s و ۱۰ s را می‌توانید محاسبه کنید.



۱) $\frac{۴}{۵}$

۲) $\frac{۵}{۴}$

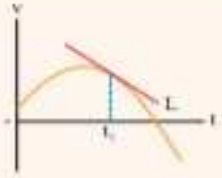
۳) $\frac{۱}{۲}$

۴) ۲

پاسخ: گزینه ۱

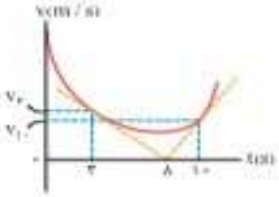
مشاوره یکی از مهم‌ترین و پرکاربردترین نمودارها در فصل حرکت‌شناسی، نمودار سرعت ـ زمان ($v - t$) است. در این تست شما با مفهوم شیب خط مماس بر نمودار سرعت ـ زمان و ارتباط آن با شتاب لحظه‌ای متحرک آشنا می‌شوید.

خودت حل کنی بهتره اندازهٔ شیب خط مماس بر نمودار ($v - t$) در لحظهٔ ۳s که برابر با شتاب در این لحظه است را برحسب $V_۲$ و شیب خط مماس بر نمودار در لحظهٔ ۱۰s که برابر شتاب در این لحظه است را برحسب $V_۱$ بنویسید. به کمک نسبت اندازهٔ این شتاب‌ها که در صورت تست داده شده، نسبت خواسته‌شده به دست می‌آید.



درس نامه ◄ شیب خط مماس بر نمودار سرعت ـ زمان متحرک در هر لحظه بیانگر شتاب متحرک در آن لحظه است.

$a_{(t_1)} =$ شیب خط L



پاسخ تشریحی ◄ گام اول: اندازهٔ شتاب متحرک در لحظات $t=3s$ و $t=10s$ برابر با اندازهٔ شیب خط‌چین‌های مماس بر نمودار سرعت ـ زمان در این لحظات است؛ بنابراین با توجه به شکل روبه‌رو می‌توان نوشت:

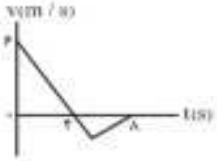
$$|a_3| = \frac{|0 - V_3|}{8-3} = \frac{V_3}{5}$$

$$a_{10} = \frac{V_{10} - 0}{10-8} = \frac{V_{10}}{2}$$

گام دوم: با توجه به صورت تست، a_{10}، ۲ برابر $|a_3|$ است؛ بنابراین به کمک روابط به دست آمده در گام اول می‌توان نوشت:

$$\frac{a_{10}}{|a_3|} = 2 \Rightarrow \frac{\frac{V_{10}}{2}}{\frac{V_3}{5}} = 2 \Rightarrow \frac{V_{10}}{V_3} \times \frac{5}{2} = 2 \Rightarrow \frac{V_{10}}{V_3} = \frac{4}{5} \Rightarrow \frac{s_{10}}{s_3} = \frac{4}{5}$$

تست و پاسخ ۱۳



نمودار سرعت ـ زمان متحرکی که در راستای محور x حرکت می‌کند، به شکل داده‌شده است. در بازه‌ای که تندی متحرک در حال افزایش است، شتاب متوسط آن چند متر بر مربع ثانیه است؟

یعنی نمودار سرعت ـ زمان از محور زمان دور شود.

۱) $0/75\overline{51}$
۲) $-0/75\overline{51}$
۳) $1/\overline{51}$
۴) $-1/\overline{51}$

پاسخ: گزینه ۴

مشاهده ◄ رونالدینیو یک پاس معروف داشت که به سمت راست نگاه می‌کرد، ولی به سمت چپ پاس می‌داد. شما هم برای حل این تست باید به پایین نمودار نگاه کنید، ولی بالای نمودار را حل کنید. وقتی تست رو حل کردین متوجه منظورمون می‌شین.

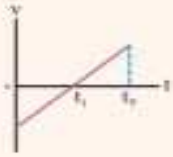
خودت حل کنی بهتره ◄ بازه‌ای که تندی متحرک در حال افزایش است (نمودار سرعت ـ زمان از محور زمان دور می‌شود) را مشخص کنید. این بازه در بخشی از نمودار قرار دارد که به صورت خط راست است. به جای محاسبهٔ شتاب متوسط (شیب نمودار) در این بازه، شتاب متوسط (شیب نمودار) در بازه‌ای دیگر را به دست آورید که با آن برابر است.

درس نامه ◄

۱) تشخیص تندشونده یا کندشونده بودن حرکت از روی نمودار سرعت ـ زمان:

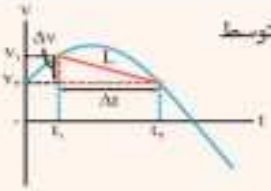
- اگر نمودار به محور زمان نزدیک شود ⟸ تندی (اندازهٔ سرعت) متحرک در حال کاهش است ⟸ حرکت متحرک کندشونده است.

برای مثال در نمودار روبه‌رو در بازهٔ زمانی صفر تا t_1 حرکت متحرک کندشونده است.



- اگر نمودار از محور زمان دور شود ⟸ تندی (اندازهٔ سرعت) متحرک در حال افزایش است ⟸ حرکت متحرک تندشونده است.

برای مثال در نمودار روبه‌رو در بازهٔ زمانی t_1 تا t_2 حرکت متحرک تندشونده است.



۲) شیب پارخطی که نمودار سرعت ـ زمان متحرک را در دو لحظهٔ t_1 و t_2 قطع می‌کند، برابر با شتاب متوسط متحرک در بازهٔ زمانی t_1 تا t_2 است.

$$L\hat{o}iK\tilde{A}\{ = a_{av(t_1,t_2)} = \frac{V_2 - V_1}{t_2 - t_1} = \frac{\Delta V}{\Delta t}$$

۳) درس‌نامهٔ تست ۶۱ را بخوانید.

۴) اگر نمودار سرعت ـ زمان متحرک به صورت خط راست باشد (شیب نمودار ثابت باشد)، شتاب متحرک ثابت است. در این نمودار:

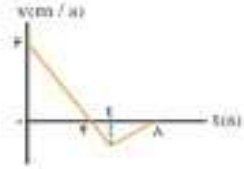
۱) شتاب در هر لحظهٔ دلخواه برابر با شتاب متوسط در هر بازهٔ زمانی دلخواه است.

برای مثال در نمودار روبه‌رو شتاب در لحظهٔ t' با شتاب متوسط در بازهٔ زمانی صفر تا t_1 برابر است.

۲) شتاب متوسط در همهٔ بازه‌های زمانی دلخواه با یکدیگر برابر است.

برای مثال در نمودار روبه‌رو شتاب متوسط در بازهٔ زمانی صفر تا t' با شتاب متوسط در بازهٔ زمانی صفر تا t_1 برابر است.

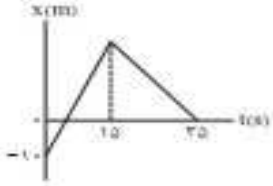
پاسخ تشریحی گام اول: هرگاه نمودار سرعت ـ زمان از محور زمان دور شود، تندی متحرک در حال افزایش است. با توجه به نمودار $v-t$ داده‌شده، تندی متحرک در بازهٔ زمانی ۴s تا t در حال افزایش است.



گام دوم: نمودار سرعت ـ زمان متحرک در بازهٔ زمانی صفر تا t به صورت خط راست است (شیبش ثابته)، پس شتاب متوسط متحرک در بازهٔ زمانی ۴s تا t با شتاب متوسط متحرک در بازهٔ زمانی صفر تا ۴s برابر است؛ بنابراین:

$$a_{av(4,t)} = a_{av(0,4)} = \frac{Dv_{(0,4)}}{Dt} = \frac{V_4 - V_0}{4-0} = \frac{0-6}{4} = -1/5\,m/s^2 \Rightarrow \vec{a}_{av(4,t)} = (-1/5\,m/s^2)\vec{i}$$

تست و پاسخ ۱۴



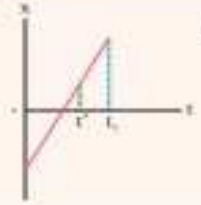
نمودار مکان ـ زمان متحرکی که در راستای محور x حرکت می‌کند، به شکل داده‌شده است. اگر مسافت طی‌شده توسط متحرک در کل حرکت ۵۰m باشد، اندازهٔ شتاب متوسط متحرک در بازهٔ زمانی $t_1 = 5s$ تا $t_2 = 25s$ چند متر بر مربع ثانیه است؟

۱) ۰/۰۵
۲) ۰/۱۰
۳) ۰/۱۵
۴) ۰/۲۰

پاسخ: گزینه ۳

مشاوره ویژگی خیلی از تست‌های نموداری حرکت‌شناسی این است که فقط با دیدن نمودار نمی‌توانیم بفهمیم که سؤال چه چیزی را از ما می‌خواهد، بلکه باید به خواستهٔ تست توجه کنیم تا بفهمیم که دنبال چه چیزی باید بگردیم؛ مثلاً در این تست وقتی حرف از شتاب متوسط می‌زند، می‌فهمیم که باید به دنبال سرعت در لحظه‌های t_1 و t_2 باشیم.

خوب حل کنی بهتره به کمک مسافت طی‌شده توسط متحرک که در صورت تست داده شده، مکان متحرک در لحظهٔ ۱۵s را به دست آورید؛ سپس سرعت متحرک در لحظات ۵s و ۲۵s را به کمک این نکته که نمودار $x-t$ در بازه‌های زمانی شامل هر یک از این دو لحظه، به صورت خط راست است و با استفاده از مفهوم شیب به راحتی می‌توان به دست آورد. در انتها، همه چیز برای محاسبهٔ اندازهٔ شتاب متوسط در بازهٔ ۵s تا ۲۵s مهیا است.

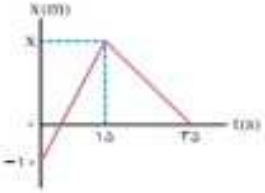


درس‌نامه ۱) اگر نمودار مکان ـ زمان متحرک به صورت خط راست باشد (شیب نمودار ثابت باشد)، سرعت متحرک ثابت است. در این نمودار:

سرعت در هر لحظهٔ دلخواه برابر با سرعت متوسط در هر بازهٔ زمانی دلخواه است.

برای مثال در نمودار روبه‌رو سرعت در لحظهٔ t' با سرعت متوسط در بازهٔ زمانی صفر تا t_1 برابر است.

۲) درس‌نامهٔ تست ۶۱ را بخوانید.



پاسخ تشریحی گام اول، با توجه به نمودار $x-t$، متحرک در مدت $۳۵\,s$ از مکان $-۱۰\,m$ به مکان x رفته و سپس به مبدأ بازمی‌گردد؛ بنابراین با توجه به این‌که مسافت طی‌شده توسط متحرک را در این مدت داریم، x را به دست می‌آوریم:

$$\ell = x-(-۱۰)+x = ۲x+۱۰ \xrightarrow{\ell=۵۰\,m} ۵۰ = ۲x+۱۰ \Rightarrow x = ۲۰\,m$$

گام دوم، نمودار مکان ـ زمان در بازهٔ صفر تا $۱۵\,s$ به صورت خط راست است (*شیبش ثابته*)؛ بنابراین سرعت متحرک در هر یک از لحظات این بازه (مانند لحظهٔ $t_۱ = ۵\,s$) با سرعت متوسط متحرک در کل این بازه برابر است:

$$v_۵ = v_{av(۰,۱۵)} \Rightarrow v_۵ = \frac{\Delta x_{(۰,۱۵)}}{\Delta t_{(۰,۱۵)}} = \frac{۲۰-(-۱۰)}{۱۵-۰} = \frac{۳۰}{۱۵} = ۲\,m/s$$

هم‌چنین نمودار در بازهٔ زمانی $۱۵\,s$ تا $۳۵\,s$ نیز به صورت خط راست است (*شیبش ثابته*) و سرعت متحرک در لحظهٔ $t_۲ = ۲۵\,s$ با سرعت متوسط متحرک در بازهٔ $۱۵\,s$ تا $۳۵\,s$ برابر است:

$$v_{۲۵} = v_{av(۱۵,۳۵)} \Rightarrow v_{۲۵} = \frac{\Delta x_{(۱۵,۳۵)}}{\Delta t_{(۱۵,۳۵)}} = \frac{۰-۲۰}{۳۵-۱۵} = -۱\,m/s$$

گام سوم، اندازهٔ شتاب متوسط متحرک در بازهٔ زمانی $t_۱ = ۵\,s$ تا $t_۲ = ۲۵\,s$ به صورت زیر به دست می‌آید:

$$|a_{av(۵,۲۵)}| = \frac{|\Delta v_{(۵,۲۵)}|}{\Delta t_{(۵,۲۵)}} = \frac{|v_{۲۵}-v_۵|}{۲۵-۵} = \frac{|-۱-۲|}{۲۰} = ۰/۱۵\,m/s^۲$$

تست و پاسخ ۱۵

معادلهٔ مکان ـ زمان متحرکی که بر روی محور x حرکت می‌کند، در SI به صورت $x = -۱۴t+۱۲$ است. اختلاف اندازهٔ سرعت متوسط متحرک در $۰/۵$ ثانیهٔ پنجم با تندی آن در لحظهٔ $t = ۱/۵\,s$ چند متر بر ثانیه است؟

شکل معادله بیانگر حرکت با سرعت ثابت است.

۱) صفر ۲) ۲ ۳) ۴ ۴) ۸

پاسخ: گزینه ۱

مشاوره با یک تست ساده، ولی مفهومی از مبحث حرکت با سرعت ثابت طرف هستید. علی‌رغم ظاهر محاسبه‌ای تست، با دانستن نکتهٔ تست می‌توانید حتی بدون دست به قلم شدن، آن را حل کنید.

خودت حل کنی بهتره از روی معادلهٔ مکان ـ زمان متحرک مشخص است که سرعت متحرک ثابت است. دانستن همین موضوع برای حل تست کافی است.

درس نامه معادلهٔ مکان ـ زمان متحرکی که با سرعت ثابت حرکت می‌کند به صورت زیر است:

$$x = vt + x_۰$$

نکته در حرکت با سرعت ثابت، سرعت متحرک در هر لحظهٔ دلخواه با سرعت متوسط متحرک در هر بازهٔ زمانی دلخواه برابر است.

پاسخ تشریحی معادلهٔ مکان ـ زمان داده‌شده تابعی درجه‌یک از زمان است؛ بنابراین متحرک با سرعت ثابت حرکت می‌کند و اندازهٔ سرعت (تندی) متحرک در همهٔ لحظات (از جمله $t = ۱/۵\,s$) با اندازهٔ سرعت متوسط در هر بازهٔ زمانی دلخواه (از جمله $۰/۵$ ثانیهٔ پنجم) برابر است. داریم:

$$v_{av(۲,۲/۵)} = v_{۱/۵} \Rightarrow v_{av(۲,۲/۵)} - v_{۱/۵} = ۰$$

تست و پاسخ ۱۶

متحرکی که با سرعت ثابت روی محور x حرکت می‌کند، در لحظه‌های $t_۱ = ۲\,s$ و $t_۲ = ۵\,s$ به ترتیب از مکان‌های $x_۱ = ۲\,m$ و $x_۲ = ۱۷\,m$ عبور می‌کند. بردار مکان این متحرک چند ثانیه در خلاف جهت محور x است؟

می‌توانیم سرعت متحرک را به دست آوریم.

۱) ۱/۲ ۲) ۱/۶ ۳) ۲/۴ ۴) ۳/۲

یعنی چند ثانیه x‌های متحرک منفی است.

پاسخ: گزینه ۲

خودت حل کنی بهتره ابتدا به کمک رابطهٔ سرعت متوسط، سرعت متحرک را به دست آورید؛ سپس معادلهٔ مکان ـ زمان متحرک را تشکیل داده و در این معادله یکی از (t و x)ها را جای‌گذاری کنید تا مکان اولیهٔ متحرک به دست آید. در نهایت به کمک معادلهٔ مکان ـ زمان متحرک می‌توانید بازهٔ زمانی‌ای را که بردار مکان متحرک در خلاف جهت محور x است (xهای متحرک منفی است) به دست آورید.

درس‌نامه درس‌نامه‌های (۱) و (۳) در تست ۵۵ و درس‌نامهٔ تست ۶۵ را بخوانید.

پاسخ تشریحی روش اول: گام اول، چون حرکت متحرک با سرعت ثابت است، سرعت متحرک با سرعت متوسط آن در بازهٔ زمانی t_1 تا t_2 برابر است؛ بنابراین:

$$v = v_{av} = \frac{\Delta x}{\Delta t} = \frac{17-2}{5-2} = \frac{15}{3} = 5\,m/s$$

گام دوم، معادلهٔ مکان ـ زمان متحرکی که با سرعت ثابت حرکت می‌کند به شکل کلی $x = vt + x_0$ است:

$$x = 5t + x_0$$

با جای‌گذاری t_1 و x_1 (یا t_2 و x_2) در معادله، x_0 را به دست می‌آوریم:

$$x = 5t + x_0 \xrightarrow{x_1 = 2\,m} 2 = (5\times 2) + x_0 \Rightarrow x_0 = -8\,m$$

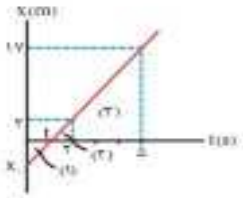
بنابراین معادلهٔ مکان ـ زمان این متحرک به صورت $x = 5t - 8$ است.

گام سوم، بردار مکان متحرک زمانی در خلاف جهت محور x است که xهای متحرک منفی باشد؛ پس:

$$x < 0 \Rightarrow 5t - 8 < 0 \Rightarrow 5t < 8 \Rightarrow t < 1/6\,s$$

بنابراین بردار مکان متحرک در بازهٔ زمانی صفر تا $1/6\,s$ یعنی به مدت $1/6\,s$ در خلاف جهت محور x است.

روش دوم: گام اول، به کمک نقاط (x_1, t_1) و (x_2, t_2) نمودار مکان ـ زمان متحرک را رسم می‌کنیم؛ چون سرعت متحرک ثابت است نمودار به صورت یک خط راست رسم می‌شود.



گام دوم، ما به دنبال مدت‌زمانی هستیم که بردار مکان متحرک در خلاف جهت محور x است (xهای متحرک منفی است)؛ یعنی t در نمودار روبه‌رو.

به کمک نسبت‌های تشابه برای مثلث‌های (۱) و (۲) داریم:

$$\frac{17}{x_0} = \frac{5-t}{t} \Rightarrow x_0 = \frac{17t}{5-t}$$

گام سوم: حالا نسبت‌های تشابه برای مثلث‌های (۱) و (۳) را می‌نویسیم و به کمک x_0 که در گام دوم به دست آوردیم، t را محاسبه می‌کنیم:

$$\frac{2}{x_0} = \frac{2-t}{t} \xrightarrow{x_0 = \frac{17t}{5-t}} \frac{2}{\frac{17t}{5-t}} = \frac{2-t}{t} \Rightarrow \frac{2(5-t)}{17\cancel{t}} = \frac{2-t}{\cancel{t}} \Rightarrow 10 - 2t = 34 - 17t \Rightarrow 15t = 24 \Rightarrow t = 1/6\,s$$

تست و پاسخ ۱۷

متحرکی در راستای محور x به مدت $2\,s$ با سرعت ثابت $v_1 = (5\,m/s)\vec{i}$ و در ادامه به مدت $3\,s$ با سرعت ثابت $v_2 = (-4\,m/s)\vec{i}$ حرکت می‌کند. سرعت متوسط متحرک در این $5\,s$ در SI کدام است؟

۱) $4/4\vec{i}$ ۲) $-4/4\vec{i}$ ۳) $0/4\vec{i}$ ۴) $-0/4\vec{i}$

علامت مثبت v : حرکت در جهت محور x

علامت منفی v : حرکت در خلاف جهت محور x

پاسخ: گزینه ۴

خودت حل کنی بهتره از رابطهٔ $\bar{v}_{av} = \frac{\Delta \bar{x}_1 + \Delta \bar{x}_2}{\Delta t_1 + \Delta t_2}$ استفاده کنید؛ چون صورت تست $\Delta \bar{x}$ها را نداده، باید چه چیزی را به جای آن قرار دهید؟ بقیهٔ حل تست با خودتان!

درس‌نامه اگر متحرکی که در امتداد یک مسیر مستقیم حرکت می‌کند، در مدت Δt_1 با سرعت ثابت $\bar{v}_1$، در مدت Δt_2 با سرعت ثابت $\bar{v}_2$ و ... حرکت کند، سرعت متوسط آن در کل مدت حرکت به صورت مقابل به دست می‌آید:

$$\bar{v}_{av} = \frac{\Delta \bar{x}}{\Delta t} = \frac{\Delta \bar{x}_1 + \Delta \bar{x}_2 + \square}{\Delta t_1 + \Delta t_2 + \square}$$

اگر در صورت سؤال Δtها را بدهند، در این رابطه به جای $\Delta \bar{x}$ها، $\bar{v}\Delta t$ها را قرار می‌دهیم:

$$\bar{v}_{av} = \frac{\bar{v}_1 \Delta t_1 + \bar{v}_2 \Delta t_2 + \square}{\Delta t_1 + \Delta t_2 + \square}$$

پاسخ تشریحی در مرحلهٔ اول متحرک به مدت $\Delta t_1 = 2s$ با سرعت ثابت $\vec{v}_1 = (5m/s)\vec{i}$ و در مرحلهٔ دوم به مدت $\Delta t_2 = 3s$ با سرعت ثابت $\vec{v}_2 = (-4m/s)\vec{i}$ حرکت می‌کند. به کمک رابطهٔ سرعت متوسط برای حرکت‌های چندمرحله‌ای با سرعت ثابت، می‌توان نوشت:

$$\vec{v}_{av} = \frac{\Delta\vec{x}_1 + \Delta\vec{x}_2}{\Delta t_1 + \Delta t_2} = \frac{\vec{v}_1\Delta t_1 + \vec{v}_2\Delta t_2}{\Delta t_1 + \Delta t_2} = \frac{(5\vec{i}\times 2) + (-4\vec{i}\times 3)}{2+3} = \frac{10\vec{i} - 12\vec{i}}{5} \Rightarrow \vec{v}_{av} = (-0/4m/s)\vec{i}$$

تکنیک علامت v_1 مثبت و علامت v_2 منفی است؛ یعنی متحرک ابتدا $(5\times 2)10m$ در جهت محور x رفته و سپس $(4\times 3)12m$ در خلاف جهت محور x برگشته است؛ بنابراین در کل به اندازهٔ $2m$ در خلاف جهت محور x جابه‌جا شده است: $D\vec{x} = (-2m)\vec{i}$

حالا سرعت متوسط متحرک را به دست می‌آوریم: $\vec{v}_{av} = \frac{\Delta\vec{x}}{\Delta t} = \frac{-2\vec{i}}{2+3} = (-0/4m/s)\vec{i}$

تست و پاسخ ۱۸

قطار A به طول $300m$ با تندی ثابت $30m/s$ و قطار B به طول $400m$ با تندی ثابت $20m/s$ روی دو ریل مستقیم، موازی و مجاور به سوی هم در حال حرکت هستند. اگر در مبدأ زمان فاصلهٔ آن‌ها از یکدیگر $1200m$ باشد، به ترتیب از راست به چپ، پس از چند ثانیه دو قطار به طور کامل از کنار هم عبور می‌کنند و در این مدت قطار A چند متر جابه‌جا می‌شود؟

فاصلهٔ جلوی قطارها از یکدیگر

انتهای دو قطار از کنار یکدیگر عبور کند.

۱) ۳۰، ۹۰۰ ۲) ۳۸، ۹۰۰ ۳) ۳۰، ۱۱۴۰ ۴) ۳۸، ۱۱۴۰

پاسخ: گزینه ۴

مشاوره بعضی وقت‌ها با متحرک‌هایی سروکار دارید که طول دارند (مانند قطار) و در بررسی حرکت آن‌ها باید طولشان را هم در نظر بگیرید. در این نوع تست‌ها مفاهیمی مانند به طور کامل از کنار هم عبور کنند، به طور کامل از پل عبور کند و ... معنی و مفهوم دارند و برای درست پاسخ دادن به تست باید آن‌ها را به درستی تجزیه و تحلیل کنید.

خودت حل کنی بهتره دو قطار زمانی به طور کامل از کنار هم عبور می‌کنند که مجموعاً مسافتی به اندازهٔ فاصلهٔ اولیهٔ بینشان و طول‌هایشان را طی کنند. با استفاده از این نکته مدت‌زمان خواسته‌شده را به دست آورید. با داشتن این مدت‌زمان، به دست آوردن جابه‌جایی قطار A در این مدت، کاری است بس آسان!

درس‌نامه ۱) درس‌نامهٔ (۳) در تست ۵۱ و درس‌نامهٔ (۳) در تست ۵۵ را بخوانید.

۲) حرکت نسبی

۱) اگر دو متحرک با تندی v_1 و v_2 در خلاف جهت یکدیگر حرکت کنند، تندی نسبی آن‌ها از رابطهٔ زیر به دست می‌آید:

$$v_{\hat{A}L\hat{v}} = v_1 + v_2$$

- دو متحرک با تندی نسبی $v_1 + v_2$ به یکدیگر نزدیک می‌شوند.

- دو متحرک با تندی نسبی $v_1 + v_2$ از یکدیگر دور می‌شوند.

۲) اگر دو متحرک در ابتدا در فاصلهٔ L از یکدیگر قرار داشته باشند و سپس به هم برسند، جابه‌جایی نسبی آن‌ها برابر L است.

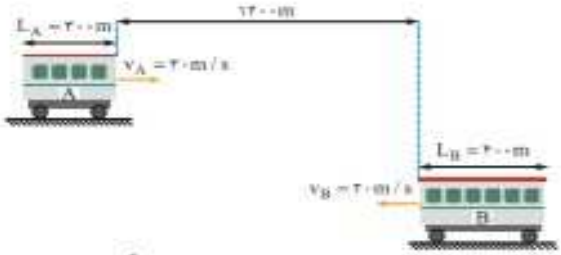
$$Dx_{\hat{A}L\hat{v}} = L$$

۳) برای محاسبهٔ مدت‌زمانی که طول می‌کشد تا دو متحرک به یکدیگر برسند از رابطهٔ زیر استفاده می‌کنیم:

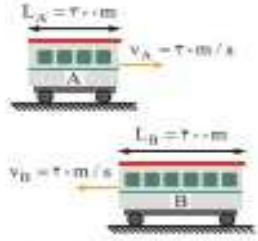
$$Dx_{\hat{A}L\hat{v}} = v_{\hat{A}L\hat{v}}Dt \Rightarrow Dt = \frac{Dx_{\hat{A}L\hat{v}}}{v_{\hat{A}L\hat{v}}} = \frac{L}{v_1 + v_2}$$

پاسخ تشریحی گام اول: با توجه به شکل‌های «الف» تا «پ»، برای این‌که دو قطار به طور کامل از کنار هم عبور کنند، باید مجموعاً مسافت $۱۲۰۰+L_A+L_B$ را طی کنند:

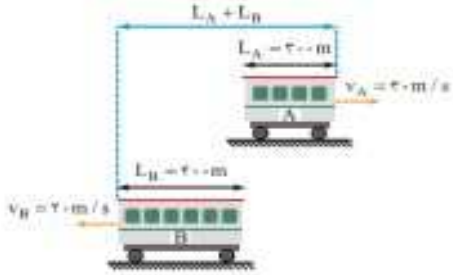
الف) در مبدأ زمان $(t=۰)$ فاصلهٔ دو قطار از هم برابر $۱۲۰۰\,m$ است.



ب) تا لحظه‌ای که دو قطار به هم برسند، مجموع مسافت طی‌شده توسط آن‌ها برابر $۱۲۰۰\,m$ است.



پ) دو قطار علاوه بر $۱۲۰۰\,m$ باید مجموعاً مسافتی به اندازهٔ L_A+L_B را طی کنند تا به طور کامل از کنار یکدیگر عبور کنند.



بنابراین: $\ell_A+\ell_B=۱۲۰۰+۳۰۰+۴۰۰=۱۹۰۰\,m \Rightarrow v_A\Delta t+|v_B|\Delta t=۱۹۰۰ \Rightarrow ۳۰\Delta t+۲۰\Delta t=۱۹۰۰ \Rightarrow \Delta t=\frac{۱۹۰۰}{۵۰}=۳۸\,s$

تکنیک تا لحظه‌ای که دو قطار به هم برسند، قطار A با تندی ثابت $۳۰\,m/s$ و قطار B با تندی ثابت $۲۰\,m/s$ به سمت یکدیگر حرکت می‌کنند؛ بنابراین دو قطار با تندی نسبی $(۳۰+۲۰)۵۰\,m/s$ به هم نزدیک می‌شوند. فاصلهٔ دو قطار از یکدیگر (فاصلهٔ نسبی) هم برابر $۱۲۰۰\,m$ است؛ بنابراین:

$$\Delta t_۱=\frac{\Delta x_{\text{فاصلهٔ نسبی}}(۱)}{v_{\text{فاصلهٔ نسبی}}}=\frac{۱۲۰۰}{۵۰}=۲۴\,s$$

سپس دو قطار با تندی نسبی $۵۰\,m/s$ از یکدیگر دور می‌شوند. مدت‌زمانی که لازم است تا دو قطار به طور کامل از یکدیگر عبور کنند (یعنی فاصلهٔ نسبی‌شان برابر $L_A+L_B=۳۰۰+۴۰۰=۷۰۰\,m$ شود) برابر است با:

$$\Delta t_۲=\frac{\Delta x_{\text{فاصلهٔ نسبی}}(۲)}{v_{\text{فاصلهٔ نسبی}}}=\frac{۷۰۰}{۵۰}=۱۴\,s$$

پس:

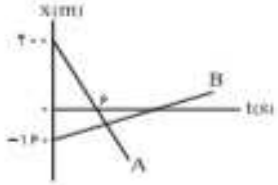
$$\Delta t=\Delta t_۱+\Delta t_۲=۲۴+۱۴=۳۸\,s$$

گام دوم: اندازهٔ جابه‌جایی قطار A در مدت $۳۸\,s$ به صورت مقابل به دست می‌آید:

$$\Delta x_A=v_A\Delta t=۳۰\times۳۸=۱۱۴۰\,m$$

تست و پاسخ ۱۹

نمودار مکان ـ زمان دو متحرک A و B که در راستای محور x حرکت می‌کنند، به شکل داده‌شده است. اگر فاصلهٔ دو متحرک در لحظه‌ای که متحرک A از مبدأ مکان می‌گذرد $۸۰\,m$ باشد، به مدت چند ثانیه فاصلهٔ بین این دو متحرک کمتر یا مساوی $۲۰۰\,m$ است؟



یعنی در این لحظه متحرک B در مکان $-۸۰\,m$ قرار دارد.

۱) ۲/۵
۲) ۵
۳) ۷/۵
۴) ۱۰

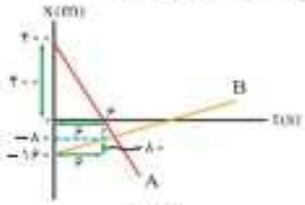
پاسخ: گزینه

مشاوره نمودارهای دو متحرک با سرعت ثابت در کنکورهای اخیر مورد توجه طراحان بوده است. همین‌طور که همیشه گفتیم خواستان هم به کتاب درسی و هم به تست‌های کنکور سراسری باشد؛ هم‌چنین همان‌طور که قبلاً هم گفتیم دانستن مبحث تشابه مثلث‌ها به حل تست‌های نموداری حرکت‌شناسی کمک بسیار بزرگی می‌کند.

خودت حل کنی بهتره به کمک اطلاعاتی که تست داده، شیب نمودارهای A و B که همان سرعتشان هست را به دست آورده و معادلهٔ مکان ـ زمان هر کدام را بنویسید. با برابر قراردادن این دو معادله، لحظه‌ای که دو متحرک از کنار هم عبور می‌کنند را به دست آورید. شما باید به دنبال بازه‌های زمانی‌ای باشید که اختلاف xها کوچک‌تر یا مساوی ۲۰۰m است. به کمک معادلهٔ مکان ـ زمان متحرک‌ها و در دو بخش قبل از لحظهٔ به هم رسیدن و بعد از آن، می‌توانید خواستهٔ تست را به دست آورید.

درس‌نامه درس‌نامهٔ (۱) در تست (۵۳)، درس‌نامهٔ (۱) در تست ۵۵، درس‌نامهٔ تست ۶۵ و درس‌نامهٔ (۲) در تست ۶۸ را بخوانید.

پاسخ تشریحی گام اول: با توجه به صورت تست در لحظه‌ای که متحرک A از مبدأ می‌گذرد، فاصلهٔ دو متحرک برابر ۸۰m است؛ بنابراین در نمودار شکل «الف» در لحظه‌ای که نمودار A محور زمان را قطع می‌کند (یعنی لحظهٔ ۶s)، متحرک B در مکان ۸۰m− قرار دارد.



(الف)

با توجه به شکل «الف» می‌توانیم شیب نمودارهای A و B را محاسبه کنیم:

$$\text{شیب نمودار A} = -\frac{۴۰۰}{۶} = -\frac{۲۰۰}{۳}$$

$$\text{شیب نمودار B} = \frac{۸۰}{۶} = \frac{۴۰}{۳}$$

گام دوم: شیب نمودار $x-t$ متحرک‌ها که در گام اول به دست آوردیم برابر سرعت هر یک از آن‌هاست؛ بنابراین معادلهٔ مکان ـ زمان هر یک از متحرک‌ها را می‌نویسیم:

$$\begin{cases} v_A = -\frac{۲۰۰}{۳}\,m/s \\ x_{۰(A)} = ۴۰۰\,m \end{cases} \Rightarrow x_A = -\frac{۲۰۰}{۳}t + ۴۰۰ \quad , \quad \begin{cases} v_B = \frac{۴۰}{۳}\,m/s \\ x_{۰(B)} = -۱۶۰\,m \end{cases} \Rightarrow x_B = \frac{۴۰}{۳}t - ۱۶۰$$

گام سوم: با برابر قراردادن x_A با x_B، لحظه‌ای که دو متحرک از کنار یکدیگر عبور می‌کنند (مکانشان یکسان می‌شود) را به دست می‌آوریم:

$$x_A = x_B \Rightarrow -\frac{۲۰۰}{۳}t + ۴۰۰ = \frac{۴۰}{۳}t - ۱۶۰ \Rightarrow \frac{۲۴۰}{۳}t = ۵۶۰ \Rightarrow ۸۰t = ۵۶۰ \Rightarrow t = ۷\,s$$

گام چهارم: روش اول: با توجه به شکل «ب»، مدتی قبل از لحظهٔ ۷s و مدتی بعد از آن، فاصلهٔ دو متحرک کم‌تر یا مساوی ۲۰۰m است؛ بنابراین یک بار $t < ۷\,s$ و یک بار $t > ۷\,s$ را بررسی می‌کنیم:

$$۱)\ t \le ۷\,s:\ x_A > x_B \Rightarrow x_A - x_B \le ۲۰۰\,m \Rightarrow -\frac{۲۰۰}{۳}t + ۴۰۰ - (\frac{۴۰}{۳}t - ۱۶۰) \le ۲۰۰$$

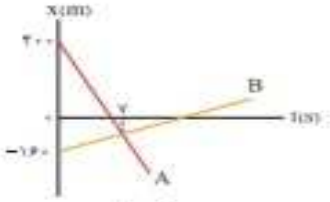
$$\Rightarrow -\frac{۲۴۰}{۳}t + ۵۶۰ \le ۲۰۰ \Rightarrow ۸۰t \ge ۳۶۰ \Rightarrow t \ge ۴/۵\,s$$

پس فاصلهٔ دو متحرک در بازهٔ زمانی ۴/۵s تا ۷s یعنی به مدت ۲/۵s کم‌تر یا مساوی ۲۰۰m است.

$$۲)\ t \ge ۷\,s:\ x_B > x_A \Rightarrow x_B - x_A \le ۲۰۰\,m \Rightarrow (\frac{۴۰}{۳}t - ۱۶۰) - (-\frac{۲۰۰}{۳}t + ۴۰۰) \le ۲۰۰$$

$$\Rightarrow \frac{۲۴۰}{۳}t - ۵۶۰ \le ۲۰۰ \Rightarrow ۸۰t \le ۷۶۰ \Rightarrow t \le ۹/۵\,s$$

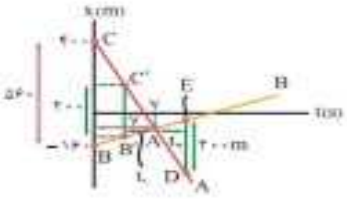
فاصلهٔ دو متحرک در بازهٔ زمانی ۷ s تا ۹/۵ s (به مدت ۲/۵ s) هم کم‌تر یا مساوی ۲۰۰ m است.
بنابراین فاصلهٔ دو متحرک در مجموع به مدت ۵ s (۲/۵ + ۲/۵) کم‌تر یا مساوی ۲۰۰ m است.



(ب)

تکنیک سرعت دو متحرک ثابت است؛ بنابراین اگر قبل از لحظهٔ ۷ s، به مدت ۲/۵ s فاصلهٔ دو متحرک کم‌تر یا مساوی ۲۰۰ m است، بعد از لحظهٔ ۷ s هم به مدت ۲/۵ s فاصله‌شان کم‌تر یا مساوی ۲۰۰ m است.

روش دوم: ما به دنبال بازهٔ زمانی‌ای هستیم که فاصلهٔ دو متحرک از هم کم‌تر یا مساوی ۲۰۰ m است؛ بنابراین با توجه به آن‌چه در شکل «ب» نشان دادیم به مدت t_1 قبل از لحظهٔ ۷ s و به مدت t_2 بعد از لحظهٔ ۷ s فاصلهٔ نمودارها از هم کم‌تر یا مساوی ۲۰۰ m است. به کمک تشابه مثلث‌های ABC و A'B'C'، t_1 را به دست می‌آوریم:



(ب)

$$\frac{\overline{BC}}{\overline{B'C'}} = \frac{۷}{t_1} \Rightarrow \frac{۵۶۰}{۲۰۰} = \frac{۷}{t_1} \Rightarrow t_1 = ۲/۵\,s$$

حالا به کمک تشابه مثلث‌های AB'C' و ADE، t_2 را به دست می‌آوریم:

$$\frac{B'C'}{DE} = \frac{t_1}{t_2} \Rightarrow \frac{۲۰۰}{۲۰۰} = \frac{۲/۵}{t_2} \Rightarrow t_2 = ۲/۵\,s$$

پس در کل به مدت ۵ s (۲/۵ + ۲/۵) فاصلهٔ متحرک‌ها کم‌تر یا مساوی ۲۰۰ m است.

تکنیک مطابق شکل‌های زیر، متحرک‌ها ابتدا به هم نزدیک و پس از عبور از کنار هم، از یکدیگر دور می‌شوند؛ بنابراین از لحظه‌ای که برای اولین بار به فاصلهٔ ۲۰۰متری یکدیگر قرار دارند (لحظهٔ t') تا لحظه‌ای که دوباره به فاصلهٔ ۲۰۰متری یکدیگر می‌رسند (لحظهٔ t'')، مکانشان نسبت به هم ۴۰۰ m (۲۰۰ + ۲۰۰) تغییر می‌کند: $\Delta x_{\hat{A}L\hat{v}} = ۴۰۰\,m$

هم‌چنین چون دو متحرک همواره در خلاف جهت یکدیگر حرکت می‌کنند، تندی نسبی‌شان برابر با مجموع تندی‌هایشان است؛ یعنی:

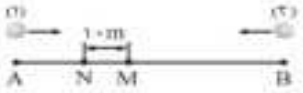
$$v_{\hat{A}L\hat{v}} = v_B + |v_A| \Rightarrow v_{\hat{A}L\hat{v}} = \frac{۴۰}{۳} + \frac{۲۰۰}{۳} = ۸۰\,m/s$$

مدت‌زمان بین t' تا t'' برابر است با:

$$\Delta x_{\hat{A}L\hat{v}} = v_{\hat{A}L\hat{v}}\,\Delta t \Rightarrow ۴۰۰ = ۸۰\,\Delta t \Rightarrow \Delta t = ۵\,s$$

تست و پاسخ ۲۰

مطابق شکل داده‌شده، دو متحرک (۱) و (۲) از دو نقطهٔ A و B با تندی‌های ثابت به سوی یکدیگر حرکت می‌کنند. اگر تندی متحرک (۲)، ۲ برابر تندی متحرک (۱) باشد، در نقطهٔ M و اگر تندی متحرک (۲)، ۳ برابر تندی متحرک (۱) باشد، در نقطهٔ N از کنار هم می‌گذرند. فاصلهٔ دو نقطهٔ A و B چند متر است؟

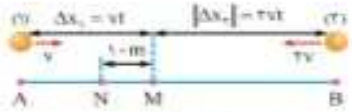


۱) ۸۰
۲) ۹۰
۳) ۱۲۰
۴) ۱۳۰

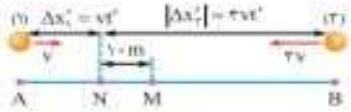
پاسخ: گزینه ۳

خودت حل کنی بهتره ابتدا شکل مناسبی از دو حالت را رسم کرده و جابه‌جایی متحرک‌ها تا لحظه‌های رسیدن به هم را برحسب سرعتشان و زمان بنویسید. با برابر قراردادن مجموع اندازهٔ این جابه‌جایی در دو حالت، نسبت مدت‌زمان به هم رسیدن در دو حالت به دست می‌آید. اختلاف اندازهٔ جابه‌جایی هر متحرک در دو حالت برابر $10\,m$ است که در صورت تست داده شده است. با استفاده از این نکته و به کمک نسبت مدت‌زمان که ابتدا به دست آوردید، رابطه‌ای به دست می‌آید که به کمک آن می‌توانید فاصلهٔ نقاط A و B را به دست آورید.

پاسخ تشریحی **گام اول:** در حالت اول فرض می‌کنیم تندی متحرک (۱) برابر v و تندی متحرک (۲) برابر $3v$ است. این دو متحرک در حالت اول پس از مدت t در نقطهٔ M به هم می‌رسند؛ هم‌چنین در حالت دوم با فرض این‌که تندی متحرک (۱) برابر v و تندی متحرک (۲) برابر $3v$ است، این دو متحرک پس از مدت t' در نقطهٔ N به هم می‌رسند. با توجه به این توضیحات، در شکل‌های «الف» و «ب» اندازهٔ جابه‌جایی هر یک از متحرک‌ها را تا لحظهٔ رسیدن به هم، در حالت‌های اول و دوم نشان دادیم:



الف) حالت اول



ب) حالت دوم

همان‌طور که از شکل‌های «الف» و «ب» مشخص است، مجموع مسافت‌های طی‌شده توسط دو متحرک در هر یک از حالت‌ها با هم برابر است (برابر با طول پاره‌خط AB)؛ بنابراین:

$$\Delta x_1 + |\Delta x_2| = \Delta x_1' + |\Delta x_2'| \Rightarrow vt + 3vt = vt' + 3vt' \Rightarrow 4vt = 4vt' \Rightarrow t' = \frac{3}{4}t$$

گام دوم: با توجه به شکل‌های «الف» و «ب» می‌توان نوشت:

$$\Delta x_1 - \Delta x_1' = \overline{MN} \Rightarrow vt - vt' = 10 \xrightarrow{t' = \frac{3}{4}t} vt - \frac{3}{4}vt = 10 \Rightarrow \frac{1}{4}vt = 10 \Rightarrow vt = 40\,m$$

گام سوم: فاصلهٔ دو نقطهٔ A و B به صورت زیر به دست می‌آید:

$$\overline{AB} = \Delta x_1 + |\Delta x_2| = vt + 3vt = 4vt \xrightarrow{vt = 40} \overline{AB} = 4 \times 40 = 120\,m$$

تست و پاسخ ۲۱

مطابق شکل داده‌شده متحرک (۱) با سرعت اولیهٔ $\vec{i}(4\,m/s)$ و شتاب $\vec{i}(2\,m/s^2)$ از نقطهٔ A می‌گذرد. یک ثانیهٔ بعد، متحرک (۲) حرکت خود را از حال سکون با شتابی به بزرگی $4\,m/s^2$ از نقطهٔ B به سمت نقطهٔ A آغاز می‌کند. در لحظه‌ای که دو متحرک از کنار هم می‌گذرند، تندی متحرک (۱) چند متر بر ثانیه است؟

$v_0 = 0$ در نتیجه شتاب هم‌جهت با جهت حرکت (سرعت) است.

چون جهت حرکت به سمت چپ است، $\vec{a}_2 = (-4\,m/s^2)\vec{i}$ است.

مکان دو متحرک برابر است.

۱) ۷ ۲) ۸

۳) ۹ ۴) ۱۲

پاسخ: گزینه ۲

مشابه یکی از چالش‌هایی که در مسیر حل این سوال وجود دارد، این است که متحرک (۲) یک ثانیه دیرتر شروع به حرکت می‌کند.

خودت حل کنی بهتره ابتدا معادلهٔ مکان ـ زمان دو متحرک را به دست می‌آوریم، سپس با هم برابر قرار داده و لحظهٔ گذر دو متحرک از کنار هم را به دست می‌آوریم. در نهایت تندی متحرک (۱) را در آن لحظه از روی معادلهٔ $v-t$ به دست می‌آوریم.

درس‌نامه معادلهٔ مکان ـ زمان $(x-t)$ در حرکت با شتاب ثابت

$$x = \frac{1}{2}\underbrace{a}_{\text{شتاب } (m/s^2)}t^2 + \underbrace{v_0}_{\text{سرعت اولیه } (m/s)}t + \underbrace{x_0}_{\text{مکان اولیه } (m)}$$

معادلهٔ سرعت ـ زمان $(v-t)$ در حرکت با شتاب ثابت

$$v = \underbrace{a}_{\text{شتاب } (m/s^2)}t + \underbrace{v_0}_{\text{سرعت اولیه } (m/s)}$$

نکته تندی لحظه‌ای برابر است با مقدار سرعت متحرک در هر لحظه.

نکته در حرکت شتاب ثابتی که متحرک از حال سکون $(v_0 = 0)$ شروع به حرکت می‌کند، جهت حرکت هم‌جهت با شتاب حرکت است.

پاسخ تشریحی **گام اول:** ابتدا معادلهٔ مکان ـ زمان دو متحرک (۱) و (۲) را به دست می‌آوریم:

(با توجه به این‌که متحرک (۲) از حال سکون با شتاب ثابت به سمت نقطهٔ A، شروع به حرکت می‌کند، بنابراین جهت شتاب آن، هم‌جهت با جهت حرکت است (یعنی $\vec{a}_2 = (-4\,m/s^2)\vec{i}$)، از طرفی چون مکان اولیهٔ متحرک (۲) به اندازهٔ ۱۴ متر جلوتر از مکان اولیهٔ متحرک (۱) است، $x_B = x_A + 14$ می‌باشد.)

تذکر چون متحرک (۲)، یک ثانیه دیرتر شروع به حرکت می‌کند، بنابراین لحظهٔ t از حرکت متحرک (۱) معادل با لحظهٔ $(t-1)$ از حرکت متحرک (۲) است.

$$x = \frac{1}{2}at^2 + v_0t + x_0 \Rightarrow \begin{cases} x_1 = \frac{1}{2}(2)t^2 + 4t + x_A = t^2 + 4t + x_A \\ x_2 = \frac{1}{2}(-4)(t-1)^2 + x_B = -2(t^2 - 2t + 1) + x_A + 14 = -2t^2 + 4t + x_A + 12 \end{cases}$$

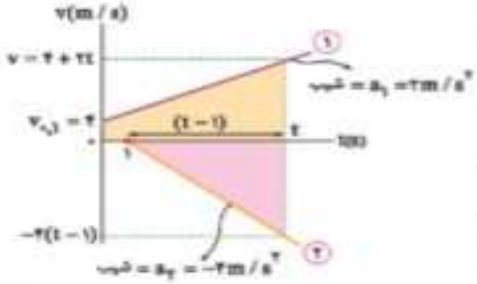
گام دوم: معادلهٔ مکان ـ زمان دو متحرک را با هم برابر قرار می‌دهیم تا لحظهٔ رسیدن دو متحرک به هم را به دست آوریم:

$$x_1 = x_2 \Rightarrow t^2 + 4t + x_A = -2t^2 + 4t + x_A + 12 \Rightarrow 3t^2 = 12 \Rightarrow t^2 = 4 \Rightarrow t = 2\,s$$

گام سوم: به کمک شتاب و سرعت اولیهٔ متحرک (۱)، معادلهٔ سرعت ـ زمان آن را به دست آورده و بزرگی سرعت (تندی) در لحظهٔ $t = ۲\,s$ را به دست می‌آوریم:

$$v_۱ = a_۱ t + v_۰ \Rightarrow v_۱ = ۲t + ۴ \xrightarrow{t=۲s} v_۱ = ۲(۲) + ۴ = ۸\,m/s$$

روش دوم: با توجه به شتاب و سرعت اولیهٔ دو متحرک، نمودار سرعت ـ زمان آن‌ها را در یک دستگاه مختصات رسم می‌کنیم. با توجه به این‌که سطح محصور بین نمودار $v-t$ و محور t برابر مسافت طی شده است داریم:



$$\text{مسافت متحرک (۲)} + \text{مسافت متحرک (۱)} = ۱۴\,m$$

$$\Rightarrow \left(\frac{۴+۴+۲t}{۲}\right)t + \frac{(t-۱)\times ۴(t-۱)}{۲} = ۱۴$$

$$\Rightarrow t^۲ + ۴t + ۲t^۲ - ۴t + ۲ = ۱۴ \Rightarrow ۳t^۲ = ۱۲ \Rightarrow t^۲ = ۴ \Rightarrow t = ۲\,s$$

$$v = ۴ + ۲t \xrightarrow{t=۲s} v_۱ = ۴ + ۲(۲) = ۸\,m/s$$

تست و پاسخ ۲۲

گلوله‌ای با تندی $۴۰\,m/s$ به تنهٔ درختی به ضخامت $۲۰\,cm$ برخورد کرده و با تندی $۱۰\,m/s$ از آن خارج می‌شود. اگر شتاب حرکت گلوله در تنهٔ درخت ثابت فرض شود، تندی گلوله در لحظه‌ای که ۵ سانتی‌متر در درون درخت حرکت کرده، چند متر بر ثانیه است؟

جابه‌جایی گلوله داخل درخت

۱) ۳۷/۵ ۲) ۳۵ ۳) ۳۲/۵ ۴) ۳۰

پاسخ: گزینه ۲

مشابه یکی از دام‌های تستی در حل این سوال این است که دانش‌آموزان نسبت بگیرند. به اشتباه فکر کنند در اثر $۲۰\,cm$ جابه‌جایی $۳۰\,m/s$ تندی کاهش یافته پس در اثر $۵\,cm$ جابه‌جایی ($\frac{۱}{۴}$ قبل) باید $\frac{۳۰}{۴} = ۷/۵\,m/s$ تندی کاهش یابد و ۳ را به غلط انتخاب کنند.

خودت حل کنی بهتره به کمک معادلهٔ مستقل از زمان در جابه‌جایی $۲۰\,cm$، شتاب را به دست آورید و در نهایت مجدداً به کمک معادلهٔ مستقل از زمان و داشتن شتاب، تندی متحرک را پس از $۵\,cm$ جابه‌جایی به دست می‌آوریم.

درس‌نامه معادلهٔ مستقل از زمان

در حرکت با شتاب ثابت، هرگاه بخواهیم شتاب (a)، جابه‌جایی (Δx)، سرعت اولیه ($v_۰$) یا سرعت نهایی (v) را به دست آوریم، بدون این‌که بازهٔ زمانی را داشته باشیم، از معادلهٔ مستقل از زمان یا سرعت ـ مکان استفاده می‌کنیم.

$$\underbrace{v^۲}_{\text{سرعت نهایی}} - \overbrace{v_۰^۲}^{\text{سرعت اولیه}} = ۲\underbrace{a}_{\text{شتاب}}\overbrace{\Delta x}^{\text{جابه‌جایی}}$$

تذکر شتاب و جابه‌جایی را با علامت در این رابطه قرار می‌دهیم.

می‌توانیم به جای $v_۰$ از $v_۱$ (سرعت در ابتدای بازه) و به جای v از $v_۲$ (سرعت در انتهای بازه) هم استفاده کنیم.

پاسخ تشریحی با به کار بردن معادلهٔ مستقل از زمان یک بار از لحظهٔ ورود تا لحظهٔ خروج و بار دیگر از لحظهٔ ورود تا لحظهٔ پیشروی ۵سانتی‌متری درون درخت، داریم:

$$\begin{cases} v_۲ : \text{سرعت نهایی} \\ v_۱ : \text{سرعت اولیه} \end{cases}$$

$$v_f^۲ - v_i^۲ = ۲a\Delta x \Rightarrow \begin{cases} ۱۰^۲ - ۴۰^۲ = ۲a \times ۰/۲ \\ v^۲ - ۴۰^۲ = ۲a \times ۰/۰۵ \end{cases} \Rightarrow \frac{v^۲ - ۱۶۰۰}{۱۰۰ - ۱۶۰۰} = \frac{۰/۰۵}{۰/۲} \Rightarrow \frac{v^۲ - ۱۶۰۰}{-۱۵۰۰} = \frac{۱}{۴} \Rightarrow v^۲ - ۱۶۰۰ = -۳۷۵$$

$$\Rightarrow v^۲ = ۱۲۲۵ \Rightarrow v = ۳۵\,m/s$$

تست و پاسخ ۲۳

متحرکی که با شتاب ثابت و سرعت اولیهٔ v_0 روی یک خط راست حرکت می‌کند، در ۲ ثانیهٔ سوم حرکت خود، ۴۰ m و در ۳ ثانیهٔ دوم حرکت خود، ۶۳ m را بدون تغییر جهت طی می‌کند. شتاب حرکت این متحرک در SI کدام است؟

بازهٔ زمانی ۴ s تا ۶ s

بازهٔ زمانی ۳ s تا ۶ s

۱) ۲ ۲) ۱ ۳) ۱− ۴) ۲−

پاسخ: گزینه ۴

مشاوره دانش‌آموز در این سؤال ممکن است در دام اشتباه محاسبهٔ ۲ ثانیهٔ سوم و ۳ ثانیهٔ دوم بیفتد و اشتباهی جابه‌جا حساب کند.

خودت حل کنی بهتره با کمک جابه‌جایی در دو بازهٔ زمانی، سرعت متوسط و سپس سرعت لحظه‌ای در لحظات ۵ s و ۴/۵ s را به دست آورید. در نهایت با داشتن سرعت در دو لحظه شتاب را به دست آورید.

درس‌نامه جابه‌جایی چیست؟

برداری است که مکان اولیهٔ متحرک را به مکان نهایی آن وصل می‌کند.

$$\vec{d} = \Delta\vec{x} = \vec{x}_2 - \vec{x}_1$$

بردار جابه‌جایی (m)

بردار مکان نهایی (m) — بردار مکان اولیه (m)

سرعت متوسط چیست؟

نسبت جابه‌جایی متحرک به مدت‌زمانی که طول می‌کشد، سرعت متوسط است.

$$\vec{v}_{av} = \frac{\Delta\vec{x}}{\Delta t}$$

بردار سرعت متوسط (m/s) — مدت‌زمان (s)

شتاب متوسط چیست؟

نسبت تغییر سرعت به مدت‌زمانی که طول می‌کشد، شتاب متوسط است.

$$\vec{a}_{av} = \frac{\Delta\vec{v}}{\Delta t}$$

بردار شتاب متوسط (m/s²) — بردار تغییر سرعت (m/s) — مدت‌زمان (s)

پاسخ تشریحی **گام اول:** سرعت متوسط متحرک در ۲ ثانیهٔ سوم و ۳ ثانیهٔ دوم را به دست آورده و به ترتیب با سرعت لحظه‌ای در $t = \frac{4+6}{2} = 5\,s$ و $t' = \frac{3+6}{2} = 4/5\,s$ برابر قرار می‌دهیم:

$$\begin{cases} 4 \to 6\,s : v_{av} = \frac{\Delta x}{\Delta t} \Rightarrow v_{av} = \frac{40}{6-4} = 20\,m/s \\ 3 \to 6\,s : v'_{av} = \frac{\Delta x'}{\Delta t'} \Rightarrow v'_{av} = \frac{63}{6-3} = 21\,m/s \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} v_{av} = v_{5s} = 20\,m/s \\ v'_{av} = v_{4/5s} = 21\,m/s \end{cases}$$

گام دوم: با داشتن سرعت متحرک در لحظهٔ $t = 5\,s$ و $t' = 4/5\,s$، شتاب متحرک را به دست می‌آوریم:

$$a = a_{av(4/5-5)} = \frac{\Delta v}{\Delta t} \Rightarrow a = \frac{v_5 - v_{4/5}}{5 - 4/5} \Rightarrow a = \frac{20-21}{0/5} = -2\,m/s^2$$

روش دوم: جابه‌جایی متحرک در t ثانیهٔ nام برابر است با:

$$\Delta x_n = (2n-1)(\frac{1}{2}at^2) + v_0 t$$

$$\xrightarrow{\text{۲ ثانیهٔ سوم}} \Delta x = 40 = (2(3)-1)(\frac{1}{2}a(2)^2) + 2v_0$$

$$\xrightarrow{\text{۲ ثانیهٔ دوم}} \Delta x = 63 = (2(2)-1)(\frac{1}{2}a(3)^2) + 3v_0$$

$$(-1/5)\begin{cases} 10a + 2v_0 = 40 \\ 13/5a + 3v_0 = 63 \end{cases}$$

$$-1/5a = 3 \Rightarrow a = -2\,m/s^2$$

تست و پاسخ ۲۴

متحرکی که با شتاب ثابت روی محور x حرکت می‌کند، در لحظهٔ $t=0$ در حال حرکت در جهت محور x است. اگر سرعت متوسط این متحرک در ۴ ثانیهٔ سوم حرکتش $\vec{v}_{av}=(-12\,m/s)\vec{i}$ و تندی متوسط آن در همین بازه $15\,m/s$ باشد، شتاب این متحرک در SI کدام است؟

بازهٔ زمانی ۸ s تا ۱۲ s

از مقدار سرعت متوسط بزرگ‌تر پس تغییر جهت داشته.

۱) $\vec{a}=12\vec{i}$ ۲) $\vec{a}=-12\vec{i}$ ۳) $\vec{a}=6\vec{i}$ ۴) $\vec{a}=-6\vec{i}$

پاسخ: گزینه ۲

مشاوره باید به علامت شتاب دقت شود چرا که ۱ دام تستی است.

خوب حل کنی بهتره ابتدا جابه‌جایی و مسافت در ۴ ثانیهٔ سوم را به دست آورید. سپس به کمک اختلاف مقدار جابه‌جایی و مسافت طی‌شده، جابه‌جایی قبل و بعد از توقف در ۴ s سوم را به دست آورده و در نهایت به کمک معادلهٔ مستقل از زمان شتاب را به دست می‌آورید.

درس نامه در صورتی که متحرک بدون تغییر جهت بر روی خط راست حرکت کند، داریم:

$$\underbrace{|\Delta\vec{x}|}_{\text{مقدار جابه‌جایی}}=\underbrace{\ell}_{\text{مسافت طی‌شده}} \quad , \quad \underbrace{|\vec{v}_{av}|}_{\text{مقدار سرعت متوسط}}=\underbrace{s_{av}}_{\text{تندی متوسط}}$$

نکته هرگاه در حرکت با شتاب ثابت در یک بازهٔ زمانی، تندی متوسط از مقدار سرعت متوسط بزرگ‌تر باشد، قطعاً متحرک در لحظهٔ t' تغییر جهت داده و شتاب و سرعت اولیه، مختلف‌العلامت هستند.

پاسخ تشریحی **گام اول:** با داشتن سرعت متوسط و تندی متوسط در ۴ ثانیهٔ سوم، جابه‌جایی و مسافت طی‌شده را به دست می‌آوریم:

$$t=8\,s \rightarrow 12\,s \begin{cases} \Delta\vec{x}=\vec{v}_{av}\Delta t \Rightarrow \Delta\vec{x}=(-12\vec{i})\times 4=(-48\,m)\vec{i} \\ \ell=s_{av}\Delta t \Rightarrow \ell=15\times 4=60\,m \end{cases}$$

گام دوم: با توجه به این‌که مسافت طی‌شده از مقدار جابه‌جایی بزرگ‌تر است، درمی‌یابیم که متحرک تغییر جهت داشته است. اگر مقدار جابه‌جایی متحرک قبل از تغییر جهت، d_1 و پس از تغییر جهت d_2 باشد، داریم:

$$\ell=d_1+d_2=60$$

$$\Delta\vec{x}=\vec{d}_1+\vec{d}_2=(-48\,m)\vec{i}$$

(d_1 و d_2 در خلاف جهت یکدیگرند. از طرفی چون متحرک در ابتدا در جهت محور x حرکت می‌کند، بنابراین $d_1>0$ و $d_2<0$ است.)

$$\Rightarrow \begin{cases} \vec{d}_1=(+6\,m)\vec{i} \\ \vec{d}_2=(-54\,m)\vec{i} \end{cases}$$

گام سوم: اگر سرعت در لحظهٔ ۸ s را v_A و سرعت در لحظهٔ ۱۲ s را v_{12} بنامیم، داریم:

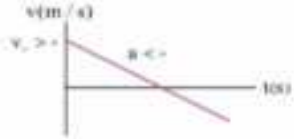
$$v_f^2-v_i^2=2a\Delta x \Rightarrow \begin{cases} 0^2-v_A^2=2a(6) \\ v_{12}^2-0^2=2a(-54) \end{cases} \Rightarrow \frac{-v_A^2}{v_{12}^2}=\frac{-1}{9} \Rightarrow \left|\frac{v_A}{v_{12}}\right|=\frac{1}{3}$$

$$\Rightarrow |v_{12}|=3|v_A| \xrightarrow[v_A>0 \text{ در جهت محور}]{v_{12}<0 \text{ در خلاف جهت محور}} v_{12}=-3v_A$$

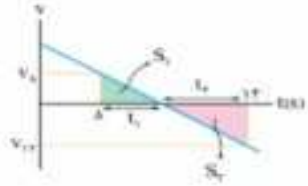
$$\Rightarrow a=\frac{\Delta v}{\Delta t} \Rightarrow a=\frac{v_{12}-v_A}{12-8}=\frac{-3v_A-v_A}{4}=\frac{-4v_A}{4}=-v_A$$

$$v_f^2-v_i^2=2a\Delta x \Rightarrow 0-v_A^2=2a\Delta x \Rightarrow 0-v_A^2=2(-v_A)(6) \Rightarrow -v_A^2=-12v_A \Rightarrow v_A=12\,m/s$$

$$\xrightarrow{a=-v_A} a=-12\,m/s^2$$



روش دوم: گام اول: با توجه به این‌که در بازهٔ زمانی ۸ s تا ۱۲ s، تندی متوسط متحرک از مقدار سرعت متوسط متحرک بزرگ‌تر است، درمی‌یابیم متحرک در لحظه‌ای بین ۸ s تا ۱۲ s تغییر جهت داده است. از طرفی چون متحرک در ابتدا در جهت محور x حرکت می‌کند، $v_0 > 0$ است. می‌توانیم شکل کلی نمودار $v - t$ را به دست آوریم:



گام دوم: به کمک سرعت متوسط و تندی متوسط در ۴ ثانیهٔ سوم، جابه‌جایی و مسافت متحرک را به دست آورده و معادل با سطح محصور نمودار $v - t$ با محور t در نظر می‌گیریم:

$$8\,s \to 12\,s: \begin{cases} \Delta x = v_{av}\Delta t \Rightarrow \Delta x = (-12)\times 4 = -48\,m \\ \ell = s_{av}\Delta t \Rightarrow \ell = 15\times 4 = 60\,m \end{cases}$$

$$\begin{cases} S_1 + S_2 = 60 \\ S_1 - S_2 = -48 \end{cases} \Rightarrow S_1 = 6\,,\ S_2 = 54$$

گام سوم: با توجه به شکل درمی‌یابیم که دو مثلث با مساحت‌های S_1 و S_2 با یکدیگر متشابه‌اند. از روی نسبت مساحت‌ها می‌توانیم نسبت اضلاع را به دست آوریم:

$$\frac{S_2}{S_1} = \left(\frac{t_2}{t_1}\right)^2 \Rightarrow \frac{54}{6} = \left(\frac{t_2}{t_1}\right)^2 \Rightarrow t_2 = 3t_1$$

$$\xrightarrow{t_1 + t_2 = 4\,s} t_1 = 1\,s\,,\ t_2 = 3\,s$$

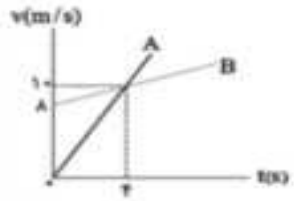
گام چهارم: با داشتن S_1 و t_1، v_A را به دست آورده و به کمک آن، شتاب را به دست می‌آوریم:

$$S_1 = \frac{v_A \times t_1}{2} \Rightarrow 6 = \frac{v_A \times 1}{2} \Rightarrow v_A = 12\,m/s$$

$$a = \text{شیب خط} = \frac{0 - v_A}{t_1} \Rightarrow a = \frac{0 - 12}{1} = -12\,m/s^2$$

تست و پاسخ ۲۵

نمودار سرعت ـ زمان دو متحرک A و B که روی محور xها در حال حرکت‌اند، مطابق شکل داده‌شده است. اگر دو متحرک در مبدأ زمان در یک نقطه قرار داشته باشند، در لحظه‌ای که اختلاف تندی آن‌ها برابر با $10\,m/s$ می‌شود، فاصلهٔ دو متحرک از هم برابر با چند متر است؟



تندی متحرک B نمی‌تواند $10\,m/s$ بیشتر از متحرک A باشد. بنابراین منظور لحظه‌ای است که تندی متحرک A، $10\,m/s$ بیشتر از متحرک B باشد.

۱) ۵
۲) ۹
۳) ۱۱
۴) ۸۱

پاسخ: گزینه ۲

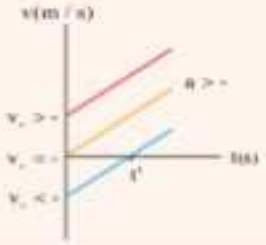
مشاوره برای حل این سؤال دانش‌آموزی که تشابه مثلث‌ها را بشناسد، به راحتی می‌تواند به این سؤال پاسخ دهد.

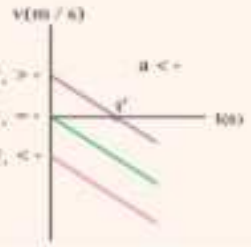
خودت حل کنی بهتره ابتدا لحظه‌ای که اختلاف تندی دو متحرک به $10\,m/s$ می‌رسد، در نمودار مشخص می‌کنیم. سپس به کمک تشابه مثلث‌ها، فاصلهٔ دو متحرک را در آن لحظه به دست می‌آوریم.

درس‌نامه ۱) نمودار سرعت ـ زمان (۴ ـ ۷) در حرکت با شتاب ثابت:

$$v = \underbrace{a}_{\text{شتاب}}\underbrace{t}_{\text{شیب خط}} + \underbrace{v_0}_{\text{سرعت اولیه}}$$

عرض از مبدأ



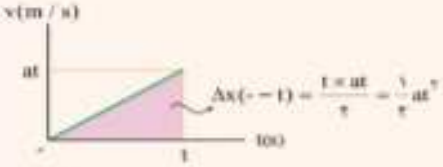


لحظهٔ توقف و تغییر جهت: $t' = -\frac{v_0}{a}$

درس‌نامه در مسائلی که متحرک حرکت چندبخشی دارد (شتاب متحرک در بازه‌های زمانی متفاوت تغییر می‌کند.)، بهتر است با توجه به توضیحات سؤال نمودار سرعت ـ زمان رسم شود.

۲) مفهوم برخی جملات در رسم نمودار سرعت ـ زمان

متحرکی با شتاب ثابت a از حال سکون شروع به حرکت می‌کند ⇐ یعنی نمودار $v-t$ با شیب ثابت در حال دورشدن از محور t است. در این حالت حرکت تندشونده است.



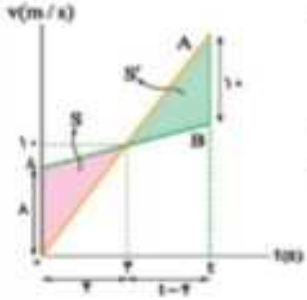
متحرکی با شتاب ثابت a ترمز می‌کند تا متوقف شود ⇐ یعنی نمودار $v-t$ با شیب ثابت در حال نزدیک‌شدن به محور t است. در این حالت حرکت کندشونده است.

مفهوم شتاب در نمودار سرعت ـ زمان

مفهوم شتاب ثابت مثبت $(a>0)$: اگر در نمودار $v-t$ به اندازهٔ t به سمت راست برویم، به اندازهٔ at به سمت بالا می‌رویم یا اگر به اندازهٔ t به سمت چپ برویم، به اندازهٔ at به سمت پایین می‌رویم.

مفهوم شتاب ثابت منفی $(a<0)$: اگر در نمودار $v-t$ به اندازهٔ t به سمت راست برویم، به اندازهٔ at به سمت پایین می‌رویم یا اگر به اندازهٔ t به سمت چپ برویم، به اندازهٔ at به سمت بالا می‌رویم.

پاسخ تشریحی با توجه به نمودار سرعت ـ زمان دو متحرک داریم:



به کمک تشابه مثلث‌های S و S'، لحظه‌ای که اختلاف تندی دو متحرک $10\,m/s$ است را به دست می‌آوریم:

$$\frac{t-4}{4}=\frac{10}{8}\Rightarrow t-4=5\Rightarrow t=9\,s$$

با توجه به نمودار سرعت ـ زمان درمی‌یابیم که در بازهٔ زمانی صفر تا ۴ s متحرک B به اندازهٔ S بیشتر از متحرک A جابه‌جا می‌شود و در بازهٔ زمانی ۴ s تا ۹ s متحرک A به اندازهٔ S' بیشتر از متحرک B جابه‌جا می‌شود؛ بنابراین برای به دست آوردن فاصلهٔ دو متحرک در لحظهٔ $t=9\,s$ داریم:

$$d_A-d_B=S'-S\Rightarrow d_A-d_B=\frac{10\times5}{2}-\frac{8\times4}{2}=25-16=9\,m$$

تست و پاسخ ۲۶

متحرکی که با شتاب ثابت روی محور x حرکت می‌کند، در لحظه‌های $t_1=3\,s$ و $t_2=7\,s$ از مبدأ مکان عبور می‌کند. اگر در لحظه‌ای که متحرک به مکان $x=+4\,m$ می‌رسد، جهت حرکتش عوض شود، معادلهٔ حرکت این متحرک در SI کدام است؟

مکان متحرک در لحظات ۳ s و ۷ s صفر است.

سرعت متحرک صفر است.

۱) $x=-2t^2+10t-21$

۲) $x=-t^2+10t-21$

۳) $x=t^2-10t+21$

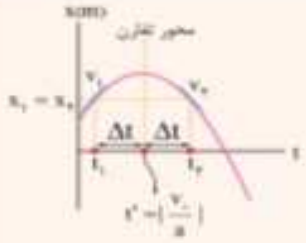
۴) $x=2t^2-10t+21$

پاسخ: گزینه ۲

مشاوره برای حل این سؤال، اطلاعات معادله و نمودار تابع درجه۲ به دانش‌آموز کمک می‌کند.

خودت حل کنی بهتره: به کمک تقارن نمودار درجه‌دو $x-t$، لحظهٔ تغییر جهت را به دست آورید. به کمک معادلهٔ مستقل از شتاب، سرعت را در یکی از لحظات $3\,s$ یا $7\,s$ به دست آورده و سپس شتاب را به دست آورید.

درس‌نامه: در حرکت با شتاب ثابت، نمودار مکان ـ زمان به صورت سهمی است و با توجه به خاصیت تقارن نمودار سهمی، داریم:



$$t' = |\frac{v_0}{a}| = \frac{t_1 + t_2}{2}$$

$$v_1 = -v_2$$

$$\Delta x_{(t_1 - t_2)} = 0 \Rightarrow v_{av(t_1 - t_2)} = 0$$

اگر بخواهیم در حرکت با شتاب ثابت، بازهٔ زمانی (Δt)، سرعت اولیه (v_0)، سرعت نهایی (v) یا جابه‌جایی (Δx) را بدون داشتن شتاب به دست آوریم، از معادلهٔ مستقل از شتاب استفاده می‌کنیم:

سرعت نهایی (m/s) — سرعت اولیه (m/s)

$$\frac{(v + v_0)}{2}\Delta t = \Delta x$$

بازهٔ زمانی (s) — جابه‌جایی (m)

پاسخ تشریحی: **گام اول:** با توجه به این‌که متحرک در لحظات $t_1 = 3\,s$ و $t_2 = 7\,s$ در مبدأ مکان بوده و جابه‌جایی آن در این بازهٔ زمانی برابر با صفر است، داریم:

$$3\,s \to 7\,s : v_{av} = \frac{\Delta x}{\Delta t} \Rightarrow v_{av} = \frac{0}{4} = 0$$

از طرفی در حرکت شتاب ثابت، سرعت متوسط متحرک در بازهٔ زمانی t_1 تا t_2 با سرعت لحظه‌ای در لحظهٔ $t = \frac{t_1 + t_2}{2}$ برابر است، بنابراین داریم:

$$v_{av(3-7)} = v_{(t = \frac{3+7}{2} = 5\,s)} = 0$$

گام دوم: با داشتن مکان متحرک در لحظهٔ تغییر جهت $(t = 5\,s)$، سرعت متحرک در این لحظه $(v_5 = 0)$ و مکان متحرک در لحظهٔ $t = 3\,s$، به کمک معادلهٔ مستقل از شتاب، سرعت متحرک در لحظهٔ $t = 3\,s$ را به دست می‌آوریم:

$$\frac{(v_{3s} + v_{5s})}{2}\Delta t = \Delta x \Rightarrow \frac{(v_{3s} + 0)}{2}(5 - 3) = (4 - 0) \Rightarrow v_{3s} = 4\,m/s$$

گام سوم: با داشتن سرعت متحرک در لحظات $t_1 = 3\,s$ و $t_2 = 5\,s$، شتاب متحرک را به دست می‌آوریم:

$$a = a_{av(3-5)} = \frac{\Delta v}{\Delta t} \Rightarrow a = \frac{0 - 4}{5 - 3} = -2\,m/s^2$$

گام چهارم: به کمک شتاب و سرعت متحرک در لحظهٔ $t = 5\,s$، سرعت اولیه و مکان اولیه را به دست می‌آوریم:

$$a = a_{av(0-5)} = \frac{\Delta v}{\Delta t} = \frac{v_5 - v_0}{5 - 0} \Rightarrow -2 = \frac{0 - v_0}{5} \Rightarrow v_0 = 10\,m/s$$

$$\frac{(v_5 + v_0)}{2}\Delta t = (x_5 - x_0) \Rightarrow (\frac{0 + 10}{2})5 = (4 - x_0) \Rightarrow x_0 = -21\,m$$

گام پنجم: با داشتن a، v_0 و x_0، معادلهٔ مکان ـ زمان حرکت با شتاب ثابت را به دست می‌آوریم:

$$x = \frac{1}{2}at^2 + v_0 t + x_0 \Rightarrow x = -t^2 + 10t - 21$$

روش دوم: با توجه به تقارن نمودار سهمی، لحظهٔ تغییر جهت متحرک را می‌یابیم:

$$t' = \frac{t_1 + t_2}{2} \Rightarrow t' = \frac{3 + 7}{2} = 5\,s$$

از طرفی متحرک در بازهٔ زمانی $t_1 = 3\,s$ تا $t' = 5\,s$، 4 متر در جهت محور x جابه‌جا شده است؛ بنابراین سرعت متوسط متحرک در این بازهٔ زمانی که برابر با سرعت لحظه‌ای متحرک در لحظهٔ وسط این بازهٔ زمانی است را به دست می‌آوریم:

$$v_{av(3-5)} = v_{(t=4\,s)} = \frac{\Delta x}{\Delta t} = \frac{4 - 0}{5 - 3} = \frac{4}{2} = 2\,m/s$$

حال با داشتن $v_{(t=4\,s)}$ و $v_{(t=5\,s)}$، شتاب و سپس سرعت اولیه را به دست می‌آوریم: $a = a_{av(4-5)} = \frac{v_5 - v_4}{5-4} = \frac{0-2}{1} = -2\ m/s^2$

$$v = at + v_0 \xrightarrow[a=-2\,m/s^2]{t=5\,s,\ v=0} 0 = -2(5) + v_0 \Rightarrow v_0 = 10\ m/s$$

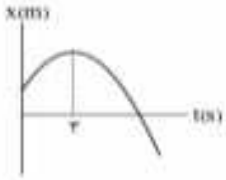
اکنون با داشتن v_0، a و مکان متحرک در یکی از لحظات، معادلهٔ مکان ـ زمان حرکت شتاب ثابت را به دست می‌آوریم:

$$x = \frac{1}{2}at^2 + v_0 t + x_0 \xrightarrow[a=-2\,m/s^2,\ v_0=10\,m/s]{t=4\,s,\ x=0} 0 = \frac{1}{2}(-2)(4)^2 + 10(4) + x_0 \Rightarrow x_0 = -21\ m$$

حال با داشتن a، v_0 و x_0، داریم:

$$x = \frac{1}{2}at^2 + v_0 t + x_0 \Rightarrow x = -t^2 + 10t - 21$$

تست و پاسخ ۲۷



نمودار مکان ـ زمان متحرکی که با شتاب ثابت روی محور x حرکت می‌کند، به صورت شکل داده‌شده است. اگر تندی متوسط متحرک در ۸ ثانیهٔ نخست برابر با ۱۷ m / s باشد، تندی آن در لحظهٔ t = ۷ s چند متر بر ثانیه است؟

بازهٔ زمانی صفر تا ۸ s

۱) ۱۶ ۲) ۲۴

۳) ۳۲ ۴) ۴۰

پاسخ: گزینه ۳

مشاوره برای پاسخ به این سؤال دانش‌آموز باید توانایی استخراج اطلاعات از شکل کلی نمودار $x - t$ را داشته باشد.

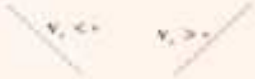
خودت حل کنی بهتره ابتدا با توجه به شکل کلی نمودار مکان ـ زمان، نمودار سرعت ـ زمان را رسم می‌کنیم. سپس به کمک مسافت طی‌شده در بازهٔ زمانی صفر تا ۸ s به کمک تشابه مثلث‌ها، جابه‌جایی از صفر تا ۴ s و بعد از آن v_0 را به دست می‌آوریم. سپس شتاب و به کمک آن معادلهٔ $v - t$ را به دست می‌آوریم. در نهایت تندی در لحظهٔ t = ۷ s را به دست می‌آوریم.

درس‌نامه نحوهٔ رسم نمودار سرعت ـ زمان به کمک نمودار مکان ـ زمان در حرکت شتاب ثابت

۱) به کمک تقعر نمودار مکان ـ زمان، علامت شتاب را به دست می‌آوریم

در نمودار $x - t$ که علامت شتاب نشان‌دهندهٔ علامت شیب نمودار سرعت ـ زمان است.

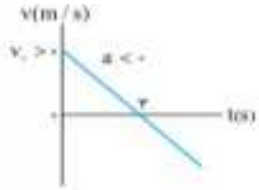
۲) به کمک شیب خط مماس بر نمودار مکان ـ زمان در لحظهٔ t = ۰، علامت سرعت اولیه را به دست می‌آوریم که علامت سرعت اولیه نشان‌دهندهٔ علامت عرض از مبدأ نمودار سرعت ـ زمان است.



شیب خط مماس بر $x - t$ در لحظهٔ t = ۰

۳) طول رأس سهمی نمودار مکان ـ زمان نشان‌دهندهٔ مکان تغییر جهت حرکت است که همان ریشهٔ نمودار سرعت ـ زمان است.

پاسخ تشریحی **گام اول:** با توجه به شکل نمودار مکان ـ زمان، شکل کلی نمودار سرعت ـ زمان را رسم می‌کنیم:

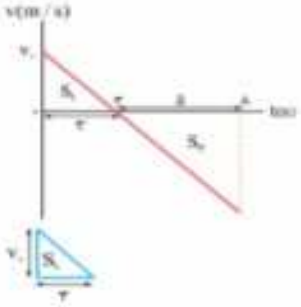


- تقعر نمودار مکان ـ زمان رو به پایین است؛ بنابراین شتاب متحرک در خلاف جهت محور است. $(a < 0)$
- شیب خط مماس بر نمودار مکان ـ زمان در لحظه t = ۰ مثبت است؛ بنابراین سرعت اولیهٔ متحرک در جهت محور است. $(v_0 > 0)$
- در لحظهٔ t = ۳ s متحرک تغییر جهت داده است $(v_{3s} = 0)$؛ بنابراین این لحظه ریشهٔ نمودار $v - t$ است.

$$v = at + v_0 \xrightarrow[v_{3s}=0]{a<0,\ v_0>0} 0 = a \times 3 + v_0 \Rightarrow a = -\frac{v_0}{3}$$

گام دوم: ابتدا با داشتن تندی متوسط در ۸ ثانیهٔ اول، مسافت پیموده‌شده را به دست می‌آوریم:

$$s_{av} = \frac{\ell}{\Delta t} \Rightarrow \ell = s_{av}.\Delta t \Rightarrow \ell = 17 \times 8 = 136\ m$$



گام سوم: با داشتن مسافت طی‌شده، به کمک سطح محصور نمودار $v-t$ داریم:

$$\text{دو مثلث با مساحت‌های } S_1 \text{ و } S_2 \text{ متشابه‌اند} \Rightarrow \frac{S_2}{S_1}=(\frac{5}{3})^2=\frac{25}{9} \Rightarrow S_2=\frac{25}{9}S_1$$

$$\ell=S_1+S_2 \xrightarrow[\ell=136\,m]{S_2=\frac{25}{9}S_1} 136=S_1+\frac{25}{9}S_1 \Rightarrow 136=\frac{34}{9}S_1 \Rightarrow S_1=36\,m \ ,\ S_2=100\,m$$

گام چهارم: به کمک S_1، v_0 را به دست می‌آوریم:

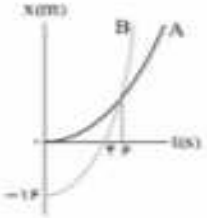
$$S_1=\frac{3\times v_0}{2} \Rightarrow 36=\frac{3v_0}{2} \Rightarrow v_0=24\,m/s$$

گام پنجم: با داشتن $v_0=24\,m/s$، ابتدا شتاب متحرک را محاسبه کرده، سپس معادلهٔ سرعت ـ زمان را به دست آورده و لحظهٔ $t=7\,s$ را جای‌گذاری می‌کنیم تا سرعت و تندی متحرک در این لحظه را به دست آوریم:

$$a=-\frac{v_0}{3} \xrightarrow{v_0=24\,m/s} a=-8\,m/s^2$$

$$v=at+v_0 \xrightarrow[a=-8\,m/s^2]{v_0=24\,m/s} v=-8t+24 \xrightarrow{t=7\,s} v_7=-8(7)+24=-32\,m/s \Rightarrow |v_7|=32\,m/s$$

تست و پاسخ ۲۸



نمودار مکان ـ زمان دو متحرک که با شتاب ثابت و از حال سکون روی محور x شروع به حرکت می‌کنند، مطابق شکل است. پس از چند ثانیه از شروع حرکت، فاصلهٔ دو متحرک از یکدیگر به ۲۰ m می‌رسد؟

لحظه‌ای که متحرک B، ۲۰ m متر از متحرک A جلوتر است. (چون با توجه به نمودار $x-t$ هیچ‌گاه متحرک A از ۲۰ m B جلو نمی‌افتد)

۱) ۷

۲) ۹

۳) ۱۱

۴) ۱۲

پاسخ: گزینه ۲

مشاوره سؤال از نظر مراحل حل طولانی است ولی محاسبات و اعداد روان است.

خودت حل کنی بهتره با توجه به نمودار مکان ـ زمان، معادلهٔ مکان ـ زمان دو متحرک را به دست آورید. سپس معادلهٔ $x-t$ دو متحرک را در معادلهٔ $x_B=x_A+20$ قرار دهید و لحظهٔ مورد نظر را به دست آورید.

درس‌نامه درس‌نامهٔ تست‌های ۵۱ و ۵۶ را بخوانید.

پاسخ تشریحی **گام اول:** ابتدا معادلهٔ مکان ـ زمان متحرک B را به دست می‌آوریم:

به کمک معادلهٔ مستقل از شتاب، سرعت متحرک B در لحظهٔ $t=4\,s$ را به دست می‌آوریم:

$$B:(\frac{v_{0B}+v_{4s}}{2})\Delta t=\Delta x \Rightarrow (\frac{0+v_{4s}}{2})4=(0-(-16)) \Rightarrow 2v_{4s}=16 \Rightarrow v_{4s}=8\,m/s$$

با داشتن v_0 و v_{4s} متحرک B، شتاب را به دست می‌آوریم:

$$a_B=\frac{\Delta v}{\Delta t} \Rightarrow a_B=\frac{v_{4s}-v_0}{4-0}=\frac{8-0}{4}=2\,m/s^2$$

حال معادلهٔ مکان ـ زمان متحرک B را می‌نویسیم:

$$x_B=\frac{1}{2}a_B.t^2+v_{0B}.t+x_{0B} \Rightarrow x_B=\frac{1}{2}(2)t^2+(0)t+(-16) \Rightarrow x_B=t^2-16$$

گام دوم: به کمک معادلهٔ مکان ـ زمان متحرک B، مکان برخورد دو متحرک در لحظهٔ $t=6\,s$ را به دست می‌آوریم:

$$x_B=t^2-16 \xrightarrow[x_A=x_B]{t=6\,s} x_A=x_B=6^2-16=20\,m$$

گام سوم: معادلهٔ مکان ـ زمان متحرک A را به دست می‌آوریم:

$$A:(\frac{v_{0A}+v_{6s}}{2})\Delta t=\Delta x \Rightarrow (\frac{0+v_{6s}}{2})6=(20-0) \Rightarrow 3v_{6s}=20 \Rightarrow v_{6s}=\frac{20}{3}\,m/s$$

$$a_A=\frac{\Delta v}{\Delta t}=\frac{v_{6s}-v_0}{6-0} \Rightarrow a_A=\frac{\frac{20}{3}-0}{6}=\frac{20}{18}=\frac{10}{9}\,m/s^2$$

$$x_A=\frac{1}{2}a_At^2+v_{0A}t+x_{0A} \Rightarrow x_A=\frac{1}{2}(\frac{10}{9})t^2+(0)t+0 \Rightarrow x_A=\frac{5}{9}t^2$$

گام چهارم: با توجه به نمودار مکان ـ زمان دو متحرک درمی‌یابیم که هیچ‌گاه امکان ندارد متحرک A، ۲۰ متر جلوتر از متحرک B باشد؛ بنابراین داریم:

$$x_B=x_A+20 \Rightarrow t^2-16=\frac{5}{9}t^2+20 \Rightarrow \frac{4}{9}t^2=36 \Rightarrow t^2=81 \Rightarrow t=9\,s$$

روش دوم: با توجه به این‌که دو متحرک به صورت شتابدار با شتاب ثابت حرکت می‌کنند، می‌توانیم یک حرکت نسبی شتابدار فرض کنیم: (فرض کنیم متحرک A ثابت و متحرک B با شتاب و سرعت نسبی حرکت می‌کند.)

$$\xrightarrow[a_B>a_A>0]{\text{شتاب دو متحرک هم‌جهت}} a_{\text{نسبی}}=a_B-a_A>0$$

$$x_{0\text{نسبی}}=x_{0B}-x_{0A}=-16-0=-16\,m$$

$$\xrightarrow{v_{0A}=v_{0B}=} v_{0\text{نسبی}}=0$$

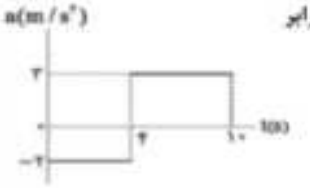
$$\xrightarrow[x_{\text{نسبی}}=]{t=6s} (\frac{v_{0\text{نسبی}}+v_{6\text{نسبی}}}{2})\times 6=(0-(-16)) \Rightarrow (0+v_{6\text{نسبی}})3=16 \Rightarrow v_{6\text{نسبی}}=\frac{16}{3}\,m/s$$

$$a_{\text{نسبی}}=\frac{\Delta v}{\Delta t} \Rightarrow a_{\text{نسبی}}=\frac{\frac{16}{3}-0}{6-0}=\frac{16}{18}=\frac{8}{9}\,m/s^2$$

$$\Rightarrow x_{\text{نسبی}}=\frac{1}{2}(\frac{8}{9})t^2+0(t)-16 \Rightarrow x_{\text{نسبی}}=\frac{4}{9}t^2-16 \xrightarrow{x_{\text{نسبی}}=20m} 20=\frac{4}{9}t^2-16 \Rightarrow \frac{4}{9}t^2=36 \Rightarrow t^2=81 \Rightarrow t=9s$$

تست و پاسخ ۳۹

نمودار شتاب ـ زمان متحرکی مطابق شکل داده‌شده است. اگر سرعت متوسط متحرک در مدت ۱۰ ثانیه برابر با $9\,m/s$ باشد، سرعت اولیهٔ متحرک چند متر بر ثانیه است؟



۱) ۸ ۲) ۱۰

۳) ۱۲ ۴) ۱۴

پاسخ: گزینه ۲

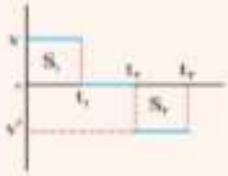
مشاوره معمولاً سؤالات نمودار شتاب ـ زمان یک مرحله اضافه‌تر از سؤالات مشابه با نمودار $v-t$ دارند و برای حل بهترین روش رسم نمودار $v-t$ است.

خودت حل کنی بهتره با توجه به سطح محصور نمودار شتاب ـ زمان تغییر سرعت و به کمک آن شکل کلی نمودار سرعت ـ زمان را رسم کنید. سپس به کمک سطح محصور نمودار $v-t$ در $10\,s$ که همان جابه‌جایی است، سرعت اولیه را به دست آورید.

درس‌نامه سطح محصور نمودار شتاب ـ زمان با محور زمان (S) نشان‌دهندهٔ تغییر سرعت متحرک (Δv) است.

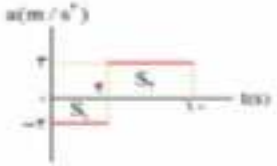
اگر سطح محصور نمودار شتاب ـ زمان با محور زمان بالای محور t باشد، $\Delta v=+S$ و اگر سطح محصور نمودار شتاب ـ زمان با محور زمان پایین محور t باشد، $\Delta v=-S$ است.

به عنوان مثال، در نمودار $a-t$ مقابل داریم:



$$\Delta v(0-t_3)=\underbrace{\Delta v(0-t_1)}_{(+S_1)}+\underbrace{\Delta v(t_1-t_2)}_{0}+\underbrace{\Delta v(t_2-t_3)}_{(-S_2)} \Rightarrow \Delta v(0-t_3)=S_1-S_2$$

پاسخ تشریحی **گام اول:** ابتدا به کمک سطح محصور نمودار شتاب ـ زمان، تغییر سرعت در هر بازهٔ زمانی را به دست می‌آوریم:



$$\Delta v_{(0\to 4)} = -S_1 = -(4\times 2) = -8\ m/s \Rightarrow v_4 - v_0 = -8 \Rightarrow v_4 = v_0 - 8\ (m/s)$$

$$\Delta v_{(4\to 10)} = S_2 = (10-4)(3) = 18\ m/s$$

$$\Rightarrow v_{10} - v_4 = 18 \Rightarrow v_{10} = v_4 + 18 \xrightarrow{v_4 = v_0 - 8} v_{10} = v_0 - 8 + 18 = v_0 + 10\ (m/s)$$

گام دوم: با داشتن سرعت متوسط در بازهٔ زمانی صفر تا ۱۰s، جابه‌جایی را در این بازهٔ زمانی به دست می‌آوریم:

$$v_{av(0\to 10)} = \frac{\Delta x}{\Delta t} \Rightarrow \Delta x = v_{av}\Delta t = 9\times 10 = 90\ m$$

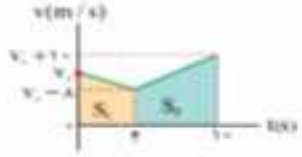
گام سوم: با استفاده از معادلهٔ مستقل از شتاب، جابه‌جایی در هر بازه را برحسب v_0 به دست آورده و مجموع جابه‌جایی در بازهٔ زمانی صفر تا ۴s و ۴s تا ۱۰s را برابر با جابه‌جایی کل قرار می‌دهیم:

$$\Delta x_{(0\to 4)} = (\frac{v_0 + v_4}{2})\Delta t \Rightarrow \Delta x_{(0\to 4)} = \frac{(v_0 + v_0 - 8)}{2}4 = 4v_0 - 16\ (m)$$

$$\Delta x_{(4\to 10)} = \frac{(v_4 + v_{10})}{2}\Delta t \Rightarrow \Delta x_{(4\to 10)} = \frac{(v_0 - 8 + v_0 + 10)}{2}(10-4) = 6v_0 + 6\ (m)$$

$$\Delta x_{(0\to 10)} = \Delta x_{(0\to 4)} + \Delta x_{(4\to 10)} \Rightarrow 90 = 4v_0 - 16 + 6v_0 + 6 \Rightarrow 90 = 10v_0 - 10 \Rightarrow 10v_0 = 100 \Rightarrow v_0 = 10\ m/s$$

روش دوم: ابتدا مشابه گام اول روش اول، v_4 و v_{10} را برحسب v_0 به دست می‌آوریم. با توجه به سطح محصور نمودار شتاب ـ زمان با محور t، تغییر سرعت در هر بازهٔ زمانی را به دست آورده و نمودار سرعت ـ زمان را رسم می‌کنیم. (با فرض $v_0 > 0$)



سطح محصور نمودار $v-t$ با محور زمان نشان‌دهندهٔ جابه‌جایی است.

$$\Delta x_{(0\to 10)} = v_{av}.\Delta t = 9\times 10 = 90\ m$$

$$\Delta x_{(0\to 10)} = S_1 + S_2 \Rightarrow 90 = ((\frac{v_0 + v_0 - 8}{2})4) + ((\frac{v_0 - 8 + v_0 + 10}{2})6) \Rightarrow 90 = 4v_0 - 16 + 6v_0 + 6$$

$$\Rightarrow 10v_0 = 100 \Rightarrow v_0 = 10\ m/s$$

تست و پاسخ ۳۰

حداکثر اندازهٔ شتاب تندشونده و کندشوندهٔ یک اتوبوس به ترتیب $1\ m/s^2$ و $5\ m/s^2$ است. اگر بیشینهٔ سرعت مجاز در یک خیابان $36\ km/h$ باشد، حداقل زمانی که این اتوبوس می‌تواند مسافت بین دو ایستگاه به فاصلهٔ ۵۰۰ متر را طی کند، چند ثانیه است؟

$\frac{36}{3.6} = 10\ m/s$

مدت زمانی که متحرک با حداکثر شتاب تندشونده به سرعت بیشینه برسد، با سرعت بیشینه حرکت کند و سپس با حداکثر شتاب کندشونده ترمز کند.

ابتدا و انتهای حرکت، سرعت صفر است.

۱) ۵۴ ۲) ۵۵

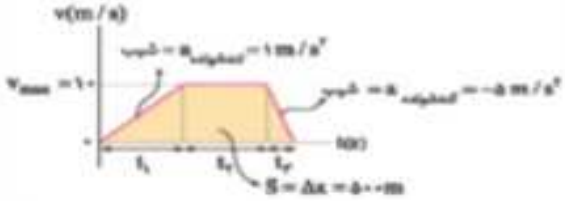
۳) ۵۶ ۴) ۵۸

پاسخ: گزینه ۳

مشاوره سؤال نیازمند این است که دانش‌آموز مفاهیم حرکت را به خوبی درک کرده باشد تا بتواند ادبیات سؤال را به زبان فیزیک و نمودار $v-t$ ترجمه کند.

خودت حل کنی بهتره با توجه به اطلاعات سؤال نمودار سرعت ـ زمان رسم کنید. سطح محصور نمودار $v-t$ را برابر با ۵۰۰ در نظر گرفته و مدت‌زمان کل را به دست آورید.

پاسخ تشریحی با توجه به شرایط مسئله، نمودار سرعت ـ زمان را رسم می‌کنیم:



$$v_{max} = ۳۶\ km/h \times \frac{۱\ m/s}{۳/۶\ km/h} = ۱۰\ m/s$$

$$a_{تندشونده} = \frac{v_{max} - ۰}{t_۱} \Rightarrow t_۱ = \frac{v_{max}}{a_{تندشونده}} = \frac{۱۰}{۱} = ۱۰\ s$$

$$a_{کندشونده} = \frac{۰ - v_{max}}{t_۳} \Rightarrow t_۳ = \frac{-v_{max}}{a_{کندشونده}} = \frac{-۱۰}{-۵} = ۲\ s$$

$$S = \left(\frac{(t_۱ + t_۲ + t_۳) + t_۳}{۲}\right) \times v_{max} \Rightarrow ۵۰۰ = \frac{(۱۰ + t_۲ + ۲) + t_۲}{۲} \times ۱۰ \Rightarrow ۱۰۰ = ۱۲ + ۲t_۲ \Rightarrow t_۲ = ۴۴\ s$$

$$\Rightarrow t_{کل} = t_۱ + t_۲ + t_۳ = ۱۰ + ۴۴ + ۲ = ۵۶\ s$$

تست و پاسخ ۳۱

متحرکی که روی محور x با شتاب ثابت $-۲\ m/s^۲$ در حال حرکت است، با سرعت $(-۲\ m/s)\vec{i}$ از مکان $x_۱ = +۳\ m$ عبور می‌کند. در چند متری مبدأ مکان، سرعت متحرک برابر $(-۶\ m/s)\vec{i}$ می‌شود؟

۱) ۴ ۲) ۵ ۳) ۱۰ ۴) ۱۲

پاسخ: گزینه ۲

مشاوره حرکت با شتاب ثابت یکی از مباحث مهم و پرتکرار در کنکور سراسری است و هر سال از این مبحث در کنکور سراسری سؤال می‌آید.

خودت حل کنی بهتره با استفاده از رابطهٔ مستقل از زمان، فاصلهٔ متحرک از مبدأ مکان را به دست بیاورید.

درس‌نامه رابطهٔ مستقل از زمان: اگر متحرکی بر روی مسیر مستقیم و با شتاب ثابت a حرکت کند و با سرعت $v_۱$ از مکان $x_۱$ و با سرعت $v_۲$ از مکان $x_۲$ عبور کند، آن‌گاه رابطهٔ روبه‌رو برقرار است (به این رابطه، مستقل از زمان می‌گویند، چون t توی رابطه نیست):

$$\underset{(m/s)}{v_۲^۲} - \underset{(m/s)}{v_۱^۲} = \underset{(m/s^۲)}{۲a}\,(\underset{(m)}{x_۲} - \underset{(m)}{x_۱})$$

پاسخ تشریحی با استفاده از رابطهٔ مستقل از زمان، مکان متحرک را هنگامی که سرعت آن $-۶\ m/s$ می‌شود، محاسبه کنیم:

$$v_۲^۲ - v_۱^۲ = ۲a\Delta x \xrightarrow[a=-۲m/s^۲,\ x_۱=۳m]{} (-۶)^۲ - (-۲)^۲ = ۲(-۲)(x_۲ - ۳)$$

$$\Rightarrow ۳۶ - ۴ = -۴(x_۲ - ۳) \Rightarrow -۸ = x_۲ - ۳ \Rightarrow x_۲ = -۵m$$

بنابراین سرعت متحرک در فاصلهٔ ۵متری از مبدأ مکان، برابر با $-۶\ m/s$ می‌شود.

تست و پاسخ ۳۲

متحرکی با شتاب ثابت روی محور x حرکت می‌کند. اگر جابه‌جایی این متحرک در سه ثانیهٔ اول و دو ثانیهٔ دوم به ترتیب $(-6\,m)\vec{i}$ و $(-28\,m)\vec{i}$ باشد، بزرگی شتاب متحرک چند متر بر مربع ثانیه است؟

۱) ۳ ۲) ۴ ۳) ۶ ۴) ۸

پاسخ: گزینه ۴

مشاوره در کنکور ریاضی ۱۴۰۱، از جابه‌جایی متحرک در ثانیهٔ nام پرسیدند. حالا ما در این سوال از جابه‌جایی متحرک در t ثانیهٔ nام سوال دادیم؛ یعنی به مرحله سخت‌تر!

خودت حل کنی بهتره کافی است رابطهٔ جابه‌جایی در سه ثانیهٔ اول و دو ثانیهٔ دوم را بنویسید و با کمک دستگاه، شتاب متحرک را به دست بیاورید و یا این‌که از رابطهٔ سرعت در لحظهٔ وسط استفاده کنید.

درس‌نامه ۱) جابه‌جایی متحرک در t ثانیهٔ nام از رابطهٔ زیر به دست می‌آید:

t nj ÂÁJ[?¼M]
(m) ?tn ÎÂ?Y

$$\bar{D}x = \frac{1}{2}\underline{a}(2n-1)t^2 + \underline{v_0}\,t$$

#odT¶ JIT{ (m/s²) — #odT¶ ÂÁ?¼H Saow (m/s)

۲) در حرکت با شتاب ثابت، سرعت متوسط در یک بازهٔ زمانی معین برابر با سرعت در لحظهٔ وسط آن بازهٔ زمانی است:

$$V_{av(t_1,t_2)} = V_{\left(\frac{t_1+t_2}{2}\right)}$$

۳) **شتاب متوسط:** اگر سرعت متحرکی در لحظهٔ t_1 برابر با V_1 و در لحظهٔ t_2 برابر با V_2 باشد، آن‌گاه شتاب متوسط آن از رابطهٔ زیر به دست می‌آید:

Saow RHoÂÁ[(m/s)

$$a_{av} = \frac{\Delta v}{\Delta t} = \frac{v_2 - v_1}{t_2 - t_1}$$

ÔwÁ¼T¶ JIT{ (m/s²) — ·H¶pIRk¶ (s)

پاسخ تشریحی روش اول: جابه‌جایی متحرک در سه ثانیهٔ اول و هم‌چنین در دو ثانیهٔ دوم را می‌نویسیم و به کمک دستگاه، تندی اولیهٔ متحرک را به دست می‌آوریم. تمام!

$$Dx = \frac{1}{2}a(2n-1)t^2 + v_0 t \Rightarrow \begin{cases} \vec{i}\,-6 = \frac{1}{2}a(2(1)-1)(3)^2 + 3v_0 \\ \vec{i}\,-28 = \frac{1}{2}a(2(2)-1)(2)^2 + 2v_0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \vec{i}\,-12 = 9a + 6v_0 \ (I) \\ \vec{i}\,-28 = 6a + 2v_0 \ ¾¾¾® \times 3 \quad 28 = -18a - 6v_0 \ (II) \end{cases}$$

$$¾^{I+II}_{}® 72 = -9a \Rightarrow a = -8\,m/s^2 \Rightarrow |a| = 8\,m/s^2$$

روش دوم: گام اول: چون حرکت با شتاب ثابت است، سرعت متوسط در ۳ ثانیهٔ اول برابر با سرعت در لحظهٔ وسط ۳ ثانیهٔ اول یعنی $t_1 = 1/5\,s$ است؛ بنابراین:

$$V_{1/5s} = V_{av(0,3s)} = \frac{Dx_1}{Dt_1} = \frac{-6\vec{i}}{3-0} = (-2\,m/s)\vec{i}$$

همچنین سرعت متوسط در ۲ ثانیهٔ دوم برابر با سرعت در لحظهٔ وسط ۲ ثانیهٔ دوم یعنی $t_2 = 3s$ است:

$$v_{2s} = v_{av(1s,3s)} = \frac{\Delta x_2}{\Delta t_2} = \frac{-28\vec{i}}{4-2} = (-14\,m/s)\vec{i}$$

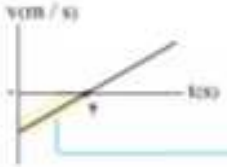
گام دوم: شتاب متحرک به صورت زیر به دست می‌آید:

$$a_{av} = a = \frac{\Delta v}{\Delta t} = \frac{v_{4s} - v_{1/5s}}{3-1/5} = \frac{-14\vec{i} - (-2\vec{i})}{1/5} = \frac{-12\vec{i}}{1/5} = (-8\,m/s^2)\vec{i} \Rightarrow |a| = 8\,m/s^2$$

تست و پاسخ ۳۳

نمودار سرعت ـ زمان متحرکی که روی محور x حرکت می‌کند، به صورت شکل زیر است. اگر متحرک در ۱۰ ثانیهٔ نخست حرکت، ۲۰ m در جهت محور x جابه‌جا شده باشد، مسافت طی‌شده توسط متحرک در مدتی که حرکت آن کندشونده است، چند متر است؟

مساحت محصور بین نمودار و محور t را دریابیم!



حرکت متحرک در ۴ ثانیهٔ اول، کند شونده است.

۱) ۳۶

۲) ۲۰

۳) ۱۶

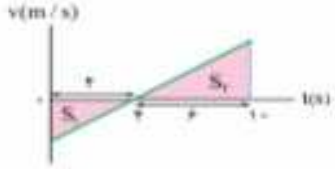
۴) ۸

پاسخ: گزینه ۳

مشاوره یکی از ابزارهای لازم برای حل مسائل فیزیک، هندسه است. تشابه مثلث‌ها را حتماً بلد باشید! اگر تشابه مثلث‌ها رو یادتون رفته، توی یادآوری ریاضی پراتون آوردیم.

خودت حل کنی بهتره ابتدا با استفاده از تشابه مثلث‌ها، نسبت مساحت محصور بین نمودار و محور t در بازهٔ زمانی صفر تا ۴ s به بازهٔ زمانی ۴ s تا ۱۰ s را به دست بیاورید. سپس با توجه به جابه‌جایی متحرک در ۱۰ ثانیهٔ اول حرکت، مقدار مسافت طی‌شده را در هنگامی که حرکت کندشونده است، محاسبه کنید.

پاسخ تشریحی جابه‌جایی متحرک در ۱۰ ثانیهٔ اول حرکت را داریم؛ بنابراین با توجه به نمودار سرعت ـ زمان، باید مساحت محصور بین نمودار و محور t در ۱۰ ثانیهٔ اول را به دست بیاوریم؛ پس با استفاده از تشابه مثلث‌ها می‌توانیم بنویسیم:



$$\frac{S_2}{S_1}=\left(\frac{6}{4}\right)^2 \Rightarrow S_2=\frac{9}{4}S_1$$

جابه‌جایی متحرک در ۱۰ ثانیهٔ اول حرکت برابر با ۲۰ متر و با توجه به نمودار برابر با S_2-S_1 است؛ بنابراین می‌توانیم بنویسیم:

$$S_2-S_1=20 \xrightarrow{S_2=\frac{9}{4}S_1} \frac{9}{4}S_1-S_1=20 \Rightarrow \frac{5}{4}S_1=20 \Rightarrow S_1=16\ m$$

با توجه به نمودار سرعت ـ زمان، تندی متحرک در بازهٔ زمانی صفر تا ۴ s کاهش یافته و در نتیجه حرکت متحرک در این مدت به صورت کندشونده است (یا می‌تونی بگی توی چهار ثانیهٔ اول، نمودار به محور t نزدیک می‌شه، پس حرکتش کندشونده هست.)؛ بنابراین متحرک به اندازهٔ $\ell_1=16\ m$ به صورت کندشونده حرکت کرده است.

تست و پاسخ ۳۴

متحرکی با شتاب ثابت روی محور x در حال حرکت است و در مبدأ زمان در جهت محور x از مبدأ مکان عبور می‌کند. اگر تندی متوسط متحرک در ۹ ثانیهٔ اول ۵ m/s و سرعت متوسط آن در این مدت $3\vec{i}\ (m/s)$ باشد، سرعت متحرک در لحظهٔ t = ۹ s چند متر بر ثانیه است؟

۱) $-6\vec{i}$ ۲) $12\vec{i}$

۳) $-12\vec{i}$ ۴) $6\vec{i}$

چون تندی متوسط متحرک از سرعت متوسط آن بیشتر است، پس متحرک تغییر جهت داده است.

پاسخ: گزینه ۱

مشاوره بسیاری از سؤالات این فصل با رسم نمودار سرعت ـ زمان قابل حل است. شما باید تسلط کافی بر رسم نمودار سرعت ـ زمان متحرک داشته باشید.

خودت حل کنی بهتره نمودار سرعت ـ زمان متحرک را رسم کنید (مواستون باشه چون در ۹ ثانیهٔ اول تندی متوسط متحرک از اندازهٔ سرعت متوسط اون بیشتره، پس متحرک تغییر جهت داره)، سپس با توجه به مساحت محصور بین نمودار و محور t و با کمک تشابه مثلث‌ها سرعت متحرک در لحظهٔ t = ۹ s را به دست بیاورید.

درس‌نامه ۱) **سرعت متوسط**: نسبت جابه‌جایی به مدت‌زمان حرکت است و از رابطهٔ زیر محاسبه می‌شود:

سرعت متوسط (m/s)

$$v_{av}=\frac{\Delta x}{\Delta t}$$

$\Delta x \rightarrow$ (m) جابه‌جایی

$\Delta t \rightarrow$ (s) مدت‌زمان

۲) **تندی متوسط**: نسبت مسافت پیموده‌شده به مدت‌زمان حرکت است و از رابطهٔ زیر محاسبه می‌شود:

تندی متوسط (m/s)

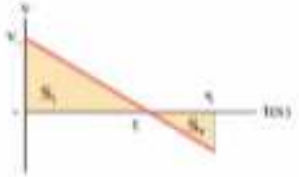
$$s_{av}=\frac{l}{\Delta t}$$

$l \rightarrow$ (m) مسافت پیموده‌شده

$\Delta t \rightarrow$ (s) مدت‌زمان

۳) درس‌نامهٔ (۲) و یادآوری ریاضی تست ۸۳ را بخوانید.

پاسخ تشریحی متحرک در مبدأ زمان در جهت محور x در حال حرکت است؛ بنابراین سرعت اولیهٔ متحرک مثبت است ($v_0>0$)؛ هم‌چنین چون تندی متوسط متحرک در ۹ ثانیهٔ اول حرکت از اندازهٔ سرعت متوسط آن در این مدت بیشتر است، پس متحرک در این مدت تغییر جهت می‌دهد؛ بنابراین نمودار سرعت ـ زمان آن به صورت شکل «الف» است:



(الف)

www.mapedu.ir

با توجه به تندی متوسط و سرعت متوسط متحرک در ۹ ثانیهٔ اول حرکت، می‌توانیم مسافت و جابه‌جایی آن را در این مدت به دست بیاوریم. برای این کار داریم:

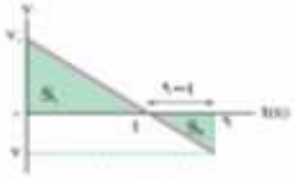
$$s_{av} = \frac{l}{\Delta t} \xrightarrow[\Delta t = 9\,s]{s_{av} = 5\,m/s} 5 = \frac{l}{9} \Rightarrow l = 45\,m$$

$$v_{av} = \frac{\Delta x}{\Delta t} \xrightarrow[\Delta t = 9\,s]{v_{av} = 3\,m/s} 3 = \frac{\Delta x}{9} \Rightarrow \Delta x = 27\,m$$

حالا با توجه به نمودار سرعت ـ زمان متحرک (شکل «الف»)، برای مسافت و جابه‌جایی آن در ۹ ثانیهٔ اول حرکت می‌توانیم بنویسیم:

$$\begin{cases} S_1 + S_2 = 45 \\ S_1 - S_2 = 27 \end{cases} \Rightarrow S_1 = 36, S_2 = 9$$

از طرفی با توجه به شکل «ب» و با استفاده از تشابه مثلث‌ها، می‌توانیم لحظهٔ t را محاسبه کنیم:



(ب)

$$\frac{S_1}{S_2} = \left(\frac{t}{9-t}\right)^2 \xrightarrow[S_2 = 9]{S_1 = 36} \frac{36}{9} = \left(\frac{t}{9-t}\right)^2 \xrightarrow{\text{جذر}} 2 = \frac{t}{9-t} \Rightarrow 18 - 2t = t \Rightarrow t = 6\,s$$

در آخر با استفاده از مساحت S_2، سرعت در لحظهٔ $t = 9\,s$ را به دست می‌آوریم:

$$S_2 = 9 \Rightarrow \frac{(9-6)|v|}{2} = 9 \Rightarrow |v| = 6\,m/s \xrightarrow{v<0} \vec{v} = -6\vec{i}\,(m/s)$$

تست و پاسخ ۳۵

معادلهٔ سرعت ـ زمان متحرکی در SI به صورت $v = 2t - 5$ است. سرعت متوسط متحرک در ۲ ثانیهٔ دوم حرکت چند متر بر ثانیه است؟

۱) ۲/۵ ۲) ۲

۳) ۱/۲۵ ۴) ۱

پاسخ: گزینه ۴

خودت حل کنی بهتره: ابتدا سرعت متحرک در ابتدا و انتهای ۲ ثانیهٔ دوم را به دست بیاورید و سپس میانگین آن‌ها را محاسبه کنید.

درس‌نامه: اگر متحرکی بر روی مسیری مستقیم و با شتاب ثابت حرکت کند، سرعت متوسط متحرک در یک بازهٔ زمانی معین برابر با میانگین سرعت متحرک در ابتدا و انتهای آن بازهٔ زمانی است:

$$v_{av} = \frac{v_1 + v_2}{2}$$

پاسخ تشریحی: **گام اول:** ۲ ثانیهٔ دوم یعنی بازهٔ زمانی ۲s تا ۴s. سرعت متحرک در لحظات ۲s و ۴s را به دست می‌آوریم:

$$t_1 = 2s \Rightarrow v_1 = (2 \times 2) - 5 = -1\,m/s$$

$$t_2 = 4s \Rightarrow v_2 = (2 \times 4) - 5 = 3\,m/s$$

گام دوم: سرعت متوسط متحرک در بازهٔ زمانی $t_1 = 2s$ تا $t_2 = 4s$، برابر میانگین سرعت متحرک در این لحظات است، یعنی:

$$v_{av} = \frac{v_1 + v_2}{2} = \frac{3 + (-1)}{2} = 1\,m/s$$

تست و پاسخ ۳۶

متحرکی که روی خط راست در حال حرکت است، در مبدأ زمان با شتاب ثابت شروع به توقف کرده و پس از ۹ s می‌ایستد. اگر مجموع مسافت طی‌شده توسط متحرک در ۳ ثانیهٔ ابتدایی و ۳ ثانیهٔ انتهایی ۹۰ m باشد، مسافت طی‌شده توسط متحرک در ۳ ثانیهٔ میانی چند متر است؟

(۰ s, ۳ s) (۶ s, ۹ s) (۳ s, ۶ s)

۱) ۳۰ ۲) ۴۰

۳) ۴۵ ۴) ۶۰

پاسخ: گزینه ۳

مشاوره یکی از مباحث مهم و پرتکرار این فصل، حرکت با شتاب ثابت است. حتماً حرکت با شتاب ثابت را جدی بگیرید!

خودت حل کنی بهتره معادلهٔ مکان ـ زمان در حرکت با شتاب ثابت را برای ۳ ثانیهٔ ابتدایی و ۳ ثانیهٔ انتهایی بنویسید و با استفاده از مجموع مسافت‌های طی‌شده در این مدت، مقدار مسافت طی‌شده در ۳ ثانیهٔ میانی را به دست بیاورید.

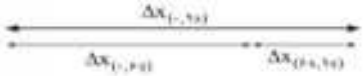
درس‌نامه معادلهٔ مکان ـ زمان متحرکی که با شتاب ثابت بر روی مسیری مستقیم حرکت می‌کند، به صورت زیر است:

$$\underset{\text{مکان متحرک (m)}}{x} = \frac{1}{2}\underset{\text{شتاب متحرک (m/s}^2)}{a}\,\underset{\text{زمان (s)}}{t^2} + \underset{\text{سرعت اولیهٔ متحرک (m/s)}}{v_0}t + \underset{\text{مکان اولیهٔ متحرک (m)}}{x_0} \Rightarrow \underset{\text{جابه‌جایی متحرک (m)}}{\Delta x} = \frac{1}{2}at^2 + v_0 t$$

پاسخ تشریحی ابتدا جابه‌جایی متحرک در ۳ ثانیهٔ ابتدایی را با استفاده از معادلهٔ مکان ـ زمان در حرکت با شتاب ثابت به دست می‌آوریم:

$$\Delta x = \frac{1}{2}at^2 + v_0 t \xrightarrow{t=3\,s} \Delta x_{(0\,s,3\,s)} = \frac{1}{2}a(3)^2 + 3v_0 \Rightarrow \Delta x_{(0\,s,3\,s)} = \frac{9}{2}a + 3v_0$$

متحرک به مدت ۹ ثانیه با شتاب ثابت حرکت کرده است؛ بنابراین ۳ ثانیهٔ انتهایی آن از لحظهٔ $t_1 = 6\,s$ تا $t_2 = 9\,s$ است. برای محاسبهٔ جابه‌جایی در این مدت، باید ابتدا جابه‌جایی در ۹ ثانیهٔ اول و نیز ۶ ثانیهٔ اول را به دست بیاوریم، سپس این دو جابه‌جایی را از یکدیگر کم کنیم:



$$\begin{cases} \Delta x_{(0\,s,9\,s)} = \frac{1}{2}a(9)^2 + 9v_0 \\ \Delta x_{(0\,s,6\,s)} = \frac{1}{2}a(6)^2 + 6v_0 \end{cases} \Rightarrow \Delta x_{(6\,s,9\,s)} = \Delta x_{(0\,s,9\,s)} - \Delta x_{(0\,s,6\,s)} = (\frac{81}{2}a + 9v_0) - (\frac{36}{2}a + 6v_0) = \frac{45}{2}a + 3v_0$$

از طرفی مجموع مسافت‌های طی‌شده در ۳ ثانیهٔ ابتدایی و ۳ ثانیهٔ انتهایی برابر با ۹۰ متر است؛ بنابراین داریم (توجه داشته باشید که چون متحرک بر روی خط راست حرکت کرده و تغییر جهت نداده است، پس مقدار مسافت طی‌شده با اندازهٔ جابه‌جایی برابر است):

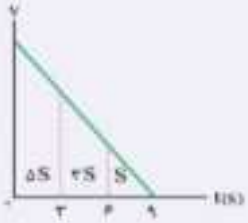
$$\Delta x_{(0\,s,3\,s)} + \Delta x_{(6\,s,9\,s)} = 90\,m \Rightarrow (\frac{9}{2}a + 3v_0) + (\frac{45}{2}a + 3v_0) = 90 \Rightarrow 27a + 6v_0 = 90$$

$$\xrightarrow{\div 2} 13/5a + 3v_0 = 45 \quad (1)$$

حالا برای محاسبهٔ مسافت طی‌شده در ۳ ثانیهٔ میانی (یعنی از لحظهٔ $t_1 = 3s$ تا $t_2 = 6s$)، کافی است جابه‌جایی در ۳ ثانیهٔ اول و نیز ۶ ثانیهٔ اول را به دست بیاوریم و از یکدیگر کم کنیم. برای این کار داریم:

$$\Delta x_{(3s,6s)} = \Delta x_{(0s,6s)} - \Delta x_{(0s,3s)} = (\frac{36}{2}a + 6v_0) - (\frac{9}{2}a + 3v_0) = 13/5a + 3v_0 \xrightarrow{(1)} \Delta x_{(3s,6s)} = 45m$$

تکنیک می‌توانیم نمودار سرعت ـ زمان متحرک را رسم کنیم. در این صورت با استفاده از تشابه مثلث‌ها و با توجه به مجموع مسافت‌های طی‌شده در ۳ ثانیهٔ ابتدایی و ۳ ثانیهٔ انتهایی می‌توانیم بنویسیم:



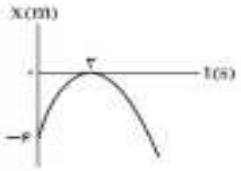
$$\Delta x_{(0s,3s)} + \Delta x_{(6s,9s)} = 90 \Rightarrow 5S + S = 90 \Rightarrow 6S = 90 \Rightarrow S = 15$$

بنابراین مسافت طی‌شده در ۳ ثانیهٔ میانی (یعنی از ۳ s تا ۶ s) برابر است با:

$$l = \Delta x_{(3s,6s)} = 3S \xrightarrow{S=15} l = 3 \times 15 = 45m$$

تست و پاسخ ۳۷

مطابق شکل زیر، نمودار مکان ـ زمان متحرکی به صورت سهمی است. سرعت متحرک در لحظهٔ $t = 6s$ چند متر بر ثانیه است؟



۱) $2\vec{i}$

۲) $4\vec{i}$

۳) $-2\vec{i}$

۴) $-4\vec{i}$

پاسخ: گزینه ۴

خودت حل کنی بهتره به کمک رابطهٔ مستقل از شتاب و داده‌های نمودار در بازهٔ زمانی (۰،۳s)، سرعت اولیهٔ متحرک را به دست آورید. حالا باید دست به دامن تقارن سهمی شوید تا سرعت متحرک در لحظهٔ ۶s به دست آید.

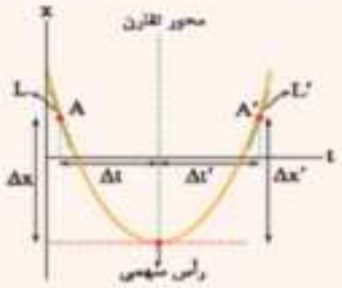
درس‌نامه ۱) در حرکت با شتاب ثابت، در یک بازهٔ زمانی معین رابطهٔ زیر برقرار است:

سرعت در ابتدای بازه — سرعت در انتهای بازه

$$v_{av} = \frac{\Delta x}{\Delta t} = \frac{v + v_0}{2}$$ (رابطهٔ مستقل از شتاب)

۲) **تقارن در نمودارهای سهمی‌شکل**

نمودارهای سهمی‌شکل حول خط‌چینی که از نقطهٔ اکسترمم سهمی (رأس سهمی) می‌گذرد، متقارن‌اند. در نمودار $x - t$ شکل زیر دو نقطهٔ متقارن A و A' را نشان داده‌ایم که برای این دو نقطه موارد روبه‌رو برقرار است:



$$\begin{cases} \Delta t = \Delta t' \\ \Delta x = \Delta x' \\ \text{اندازهٔ شیب } L = \text{اندازهٔ شیب } L' \Rightarrow v = v' \end{cases}$$

پاسخ تشریحی **گام اول:** مماس بر نمودار در لحظهٔ $t = 3s$ افقی است بنابراین در این لحظه سرعت متحرک برابر صفر است. برای بازهٔ زمانی $(0, 3s)$ داریم:

$$\frac{\Delta x}{\Delta t} = \frac{v + v_0}{2} \Rightarrow \frac{0-(-6)}{3-0} = \frac{0+v_0}{2} \Rightarrow v_0 = 4\,m/s$$

گام دوم: نمودار به صورت سهمی است بنابراین با توجه به تقارن نمودار اندازهٔ سرعت متحرک در لحظات ۰ و ۶s برابر است:

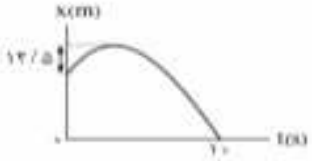
$$|v_{6s}| = v_0 = 4\,m/s$$

شیب مماس بر نمودار در لحظهٔ ۶s منفی است بنابراین سرعت در لحظهٔ ۶s منفی است:

$$v_{6s} = -4\vec{i}$$

تست و پاسخ ۳۸

نمودار مکان ـ زمان متحرکی که با شتاب ثابت روی محور x حرکت می‌کند، در ۱۰ ثانیهٔ نخست حرکتش به شکل زیر است. اگر تندی متوسط متحرک در این مدت، $\frac{5}{4}$ برابر اندازهٔ سرعت متوسط آن در همین بازهٔ زمانی باشد، اندازهٔ شتاب متحرک چند متر بر مربع ثانیه است؟



۱) ۱

۲) ۲

۳) ۳

۴) ۴

پس مسافت طی شده توسط متحرک $\frac{5}{4}$ برابر اندازهٔ جابه‌جایی آن است.

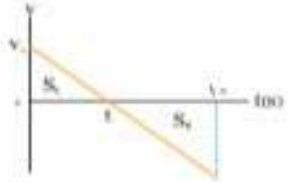
پاسخ: گزینه ۴

مشاوره رسم نمودار سرعت ـ زمان از روی نمودار مکان ـ زمان، یکی از مهارت‌هایی است که باید بلد باشید. برای این کار باید سرعت در هر لحظه را با کمک شیب نمودار مکان ـ زمان به دست بیاورید.

خودت حل کنی بهتره نمودار سرعت ـ زمان متحرک را رسم کنید و با استفاده از تشابه مثلث‌ها و مساحت محصور بین نمودار و محور t، سرعت اولیهٔ آن را محاسبه کنید و در آخر مقدار شتاب متوسط متحرک را با کمک رابطهٔ $a_{av} = \frac{\Delta v}{\Delta t}$ به دست بیاورید.

درس‌نامه درس‌نامهٔ (۳) و یادآوری ریاضی تست ۸۳ و درس‌نامه‌های (۱) و (۲) تست ۸۴ و درس‌نامهٔ (۳) تست ۸۲ را بخوانید.

پاسخ تشریحی با توجه به نمودار مکان ـ زمان، متحرک ابتدا در جهت محور x، سپس در خلاف جهت محور x حرکت کرده است؛ بنابراین نمودار سرعت ـ زمان آن در ۱۰ ثانیهٔ اول حرکت، به صورت زیر است:



چون تندی متوسط متحرک در ۱۰ ثانیهٔ اول حرکت، $\frac{5}{4}$ برابر سرعت متوسط آن در همین مدت است، پس می‌توانیم نتیجه بگیریم که مسافت طی‌شده توسط متحرک در این ۱۰ ثانیه، $\frac{5}{4}$ برابر اندازهٔ جابه‌جایی متحرک در این مدت است. زیرا:

$$s_{av} = \frac{5}{4}|v_{av}| \xrightarrow[v_{av} = \frac{\Delta x}{\Delta t}]{s_{av} = \frac{l}{\Delta t}} \frac{l}{\Delta t} = \frac{5}{4}\frac{|\Delta x|}{\Delta t} \Rightarrow l = \frac{5}{4}|\Delta x|$$

بنابراین با توجه به مساحت محصور بین نمودار و محور t می‌توانیم بنویسیم:

$$l = \frac{5}{4}|\Delta x| \Rightarrow S_1 + S_2 = \frac{5}{4}|S_1 - S_2| \xrightarrow{S_1 - S_2 < 0} S_1 + S_2 = \frac{5}{4}(S_2 - S_1) \Rightarrow \frac{S_2}{4} = \frac{9}{4}S_1 \Rightarrow S_2 = 9S_1$$

حواستون باشه با توجه به نمودار مکان ـ زمان، جابه‌جایی متحرک در ۱۰ ثانیهٔ اول منفی است به همین دلیل $\Delta x = S_1 - S_2 < 0$ در نظر گرفتیم.

حالا با استفاده از تشابه مثلث‌ها می‌توانیم مقدار t را به دست بیاوریم:

$$\frac{S_2}{S_1} = 9 \Rightarrow \left(\frac{10-t}{t}\right)^2 = 9 \xrightarrow{\text{جذر}} \frac{10-t}{t} = 3 \Rightarrow 4t = 10 \Rightarrow t = 2/5\,s$$

توجه کنید که متحرک در لحظهٔ t تغییر جهت می‌دهد، چون سرعت آن در این لحظه صفر شده و تغییر علامت می‌دهد.

از طرفی با توجه به نمودار مکان ـ زمان، متحرک از لحظهٔ شروع تا لحظه‌ای که تغییر جهت می‌دهد (لحظهٔ t)، به اندازهٔ $12/5\,m$ جابه‌جا می‌شود. پس در نمودار سرعت ـ زمان آن، $S_1 = 12/5$ بوده و داریم:

$$S_1 = 12/5 \Rightarrow \frac{v_0 \times 2/5}{2} = 12/5 \Rightarrow v_0 = 10\,m/s$$

در آخر شتاب متوسط متحرک را با استفاده از رابطهٔ $a_{av} = \frac{\Delta v}{\Delta t}$ به دست می‌آوریم:

$$a_{av} = \frac{\Delta v}{\Delta t} = \frac{0-10}{2/5-0} = -4\,m/s^2 \Rightarrow |a_{av}| = 4\,m/s^2$$

تست و پاسخ ۳۹

نمودار سرعت ـ زمان متحرکی که در راستای محور x حرکت می‌کند، به شکل زیر است. اگر اندازهٔ سرعت متوسط متحرک در مدتی که در جهت مثبت محور x حرکت می‌کند، $8\,m/s$ باشد، تندی متوسط آن از مبدأ زمان تا اولین لحظه‌ای که جهت حرکتش تغییر می‌کند، چند متر بر ثانیه است؟

$(5\,s, t')$

۱) ۸

۲) ۱۰

۳) ۱۲

۴) ۱۶

متحرک در لحظهٔ $t = 5\,s$ تغییر جهت می‌دهد.

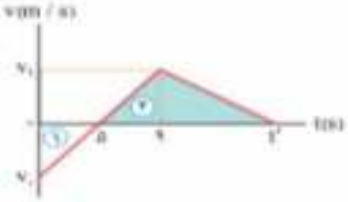
پاسخ: گزینه ۲

مشاوره **گاهی‌اوقات در کنکور سراسری، به طور مستقیم از نمودار سرعت ـ زمان سؤال می‌دهند. این سؤال هم در این دسته از سؤال‌ها قرار دارد.**

خوبست حل‌کنی بهتره سرعت متوسط متحرک را برای بازهٔ زمانی‌ای که سرعت آن مثبت است، بنویسید، سپس با استفاده از تشابه مثلث‌ها، سرعت اولیهٔ متحرک را پیدا کرده و تندی متوسط در ۵ ثانیهٔ اول را محاسبه کنید.

درس‌نامه درس‌نامه‌های (۱) و (۲) تست ۸۴ و درس‌نامهٔ (۲) تست ۸۳ را بخوانید.

پاسخ تشریحی وقتی متحرک در جهت محور x حرکت می‌کند، سرعت آن مثبت است؛ بنابراین با توجه به نمودار سرعت ـ زمان، متحرک از لحظهٔ $t = 5\,s$ تا لحظهٔ t' در جهت محور x حرکت می‌کند. از طرفی سرعت متوسط آن در این مدت برابر با $8\,m/s$ است، پس با کمک مساحت محصور بین نمودار و محور t می‌توانیم بنویسیم:



$$v_{av} = \frac{\Delta x}{\Delta t} \xrightarrow[\Delta t = t'-5]{v_{av}=8\,m/s} 8 = \frac{(t'-5)(v_1)}{2} \Rightarrow v_1 = 16\,m/s$$

حالا با استفاده از تشابه مثلث‌های (۱) و (۲)، می‌توانیم مقدار v_0 را به دست بیاوریم:

$$\frac{16}{|v_0|}=\frac{9-5}{5}\Rightarrow |v_0|=20\,m/s \xrightarrow{v_0<0} v_0=-20\,m/s$$

با توجه به نمودار سرعت ـ زمان، سرعت متحرک در لحظهٔ $t=5\,s$ صفر شده و تغییر علامت می‌دهد؛ بنابراین $t=5\,s$، اولین لحظه‌ای است که متحرک تغییر جهت می‌دهد و تندی متوسط آن در ۵ ثانیهٔ اول حرکت برابر است با:

$$s_{av}=\frac{l}{\Delta t}\Rightarrow s_{av}=\frac{\frac{5\times 20}{2}}{5}\Rightarrow s_{av}=10\,m/s$$

تست و پاسخ ۴۰

خودرویی با شتاب ثابت a روی محور x شروع به حرکت می‌کند و پس از مدتی حرکت خود را با سرعت ثابت ادامه می‌دهد و در نهایت با شتابی به اندازهٔ ۲a ترمز کرده و متوقف می‌شود. اگر مدت‌زمانی که سرعت خودرو ثابت است با مدت‌زمانی که حرکت آن کندشونده است، برابر باشد، تندی متوسط خودرو در طی این حرکت چند برابر تندی بیشینهٔ آن است؟

۱) $\frac{5}{4}$ ۲) $\frac{5}{8}$ ۳) $\frac{7}{10}$ ۴) $\frac{7}{5}$

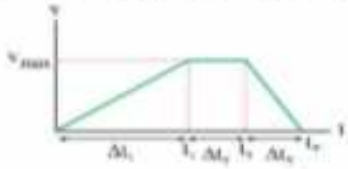
پاسخ: گزینه ۲

مشاوره **صورت سؤال را یک بار دیگر بخوانید! انگار مراحل رسم نمودار سرعت ـ زمان متحرک را به شما می‌گوید. پس منتظر چه هستید؟ سریع دست به قلم شوید و نمودار سرعت ـ زمان آن را رسم کنید.**

خودت حل کنی بهتره نمودار سرعت ـ زمان خودرو را رسم کنید و با توجه به شتاب خودرو در هر حالت، بازه‌های زمانی هر یک از حالت‌ها را با یکدیگر مقایسه کنید و در آخر تندی متوسط خودرو را با استفاده از مساحت محصور بین نمودار و محور t و مدت‌زمان حرکت به دست بیاورید.

درس‌نامه درس‌نامه‌های (۱) و (۲) تست ۸۳ و درس‌نامهٔ (۲) تست ۸۴ را بخوانید.

پاسخ تشریحی خودرو با شتاب ثابت a شروع به حرکت می‌کند و پس از مدتی با سرعت ثابت به حرکت خود ادامه داده و در آخر با شتاب ثابت با اندازهٔ ۲a ترمز کرده و می‌ایستد. بنابراین نمودار سرعت ـ زمان آن به صورت زیر است:



مدتی که سرعت خودرو ثابت است با مدتی که حرکت آن کندشونده است، برابر است؛ یعنی: $\Delta t_2=\Delta t_3$

از طرفی خودرو با شتاب ثابت a شروع به حرکت می‌کند و با شتاب ثابت با اندازهٔ ۲a ترمز کرده و می‌ایستد. بنابراین می‌توانیم بنویسیم:

$$|a_3|=2a_1\Rightarrow\frac{|\Delta v_3|}{\Delta t_3}=2\frac{\Delta v_1}{\Delta t_1}\xrightarrow{\Delta v_1=|\Delta v_3|}\Delta t_1=2\Delta t_3$$

از طرفی چون $\Delta t_2=\Delta t_3$ است، پس داریم: $\Delta t_1=2\Delta t_2=2\Delta t_3$

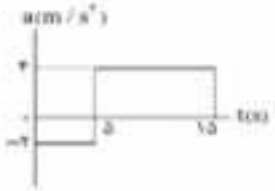
در آخر با استفاده از مساحت محصور بین نمودار سرعت ـ زمان و محور t و مدت‌زمان حرکت، تندی متوسط خودرو را در کل مسیر به دست می‌آوریم:

$$s_{av}=\frac{l}{\Delta t}\Rightarrow s_{av}=\frac{\frac{v_{max}\times\Delta t_1}{2}+v_{max}\Delta t_2+\frac{v_{max}\Delta t_3}{2}}{\Delta t_1+\Delta t_2+\Delta t_3}\xrightarrow[\Delta t_2=\Delta t_3]{\Delta t_1=2\Delta t_3}s_{av}=\frac{v_{max}\Delta t_3+v_{max}\Delta t_3+\frac{v_{max}\Delta t_3}{2}}{2\Delta t_3+\Delta t_3+\Delta t_3}$$

$$\Rightarrow s_{av}=\frac{\frac{5}{2}v_{max}\Delta t_3}{4\Delta t_3}\Rightarrow s_{av}=\frac{5}{8}v_{max}$$

تست و پاسخ ۴۱

نمودار شتاب ـ زمان متحرکی که در راستای محور x حرکت می‌کند، به شکل زیر است. اگر سرعت متحرک در لحظهٔ $t = ۱۵\,s$ برابر $۲۸\,m/s)\hat{i}$ باشد، اندازهٔ سرعت متوسط آن در بازهٔ زمانی صفر تا ۱۵s، چند متر بر ثانیه است؟



۱) $\frac{۲۶}{۱۵}$

۲) ۳

۳) ۳/۴

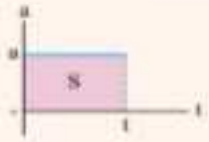
۴) ۵/۴

پاسخ: گزینه ۲

مشاوره رسم نمودار سرعت ـ زمان از روی نمودار شتاب ـ زمان، شاه‌کلید حل این‌جور سؤال‌هاست. برای رسم نمودار سرعت ـ زمان متحرک، باید سرعت اولیهٔ آن را پیدا کنید.

خودت حل کنی بهتره نمودار سرعت ـ زمان متحرک را با توجه به نمودار شتاب ـ زمان آن رسم کنید و با توجه به مساحت محصور بین نمودار سرعت ـ زمان و محور t، سرعت متوسط متحرک را در مدت‌زمان خواسته‌شده به دست بیاورید.

درس‌نامه ۱) مساحت محصور بین نمودار شتاب ـ زمان و محور t برابر با اندازهٔ تغییرات سرعت است. (شکل «الف»)



(الف)

$$|\Delta v| = S$$

۲) اگر نمودار شتاب ـ زمان بالای محور t باشد، علامت تغییرات سرعت، مثبت و اگر پایین محور t باشد، علامت تغییرات سرعت، منفی است. (شکل «ب»)

(ب)

$$\Delta v_1 = S_1$$
$$\Delta v_2 = -S_2$$

۳) معادلهٔ سرعت ـ زمان متحرکی که بر روی خط راست و با شتاب ثابت حرکت می‌کند، به صورت زیر است:

$$\underbrace{v}_{\text{سرعت متحرک در لحظهٔ t (m/s)}} = \underbrace{a}_{\text{شتاب متحرک (m/s²)}}\,\underbrace{t}_{\text{زمان (s)}} + \underbrace{v_0}_{\text{سرعت اولیهٔ متحرک (m/s)}}$$

۴) یادآوری ریاضی و درس‌نامهٔ (۲) تست ۸۳ و درس‌نامهٔ (۱) تست ۸۴ را بخوانید.

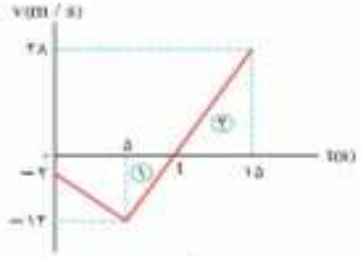
پاسخ تشریحی سرعت متحرک در لحظهٔ $t = ۱۵\,s$ برابر با $۲۸\,m/s$ است. اگر سرعت اولیهٔ متحرک برابر با v_0 باشد، با توجه به مساحت محصور بین نمودار شتاب ـ زمان و محور t می‌توانیم بنویسیم:

$$v_0 - (۲ \times ۵) + (۴ \times ۱۰) = ۲۸ \Rightarrow v_0 = -۲\,m/s$$

شتاب متحرک در لحظهٔ $t = ۵\,s$ تغییر می‌کند؛ بنابراین سرعت متحرک در این لحظه را با کمک معادلهٔ سرعت ـ زمان محاسبه می‌کنیم:

$$v = at + v_۰ \xrightarrow[t=۵\,s,\ v_۰=-۲\,m/s]{a=-۲\,m/s^۲} v = (-۲)(۵) + (-۲) \Rightarrow v = -۱۲\,m/s$$

حالا می‌توانیم نمودار سرعت ـ زمان متحرک را رسم کنیم. (شکل «الف»)

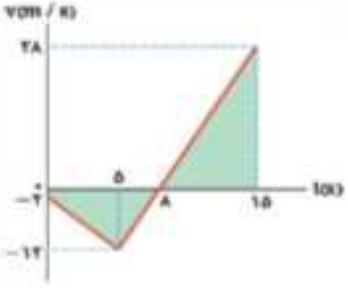


(الف)

متحرک در لحظهٔ t تغییر جهت می‌دهد (چون توی این لحظه سرعتش صفر شده و بعدش تغییر علامت می‌ده). با استفاده از تشابه مثلث‌های ① و ② می‌توانیم لحظهٔ t را به دست بیاوریم:

$$\frac{۲۸}{۱۲} = \frac{۱۵-t}{t-۵} \Rightarrow ۷t - ۳۵ = ۴۵ - ۳t \Rightarrow ۱۰t = ۸۰ \Rightarrow t = ۸\,s$$

برای محاسبهٔ اندازهٔ سرعت متوسط در بازهٔ زمانی صفر تا ۱۵s با توجه به شکل «ب» مساحت محصور بین نمودار سرعت ـ زمان و محور t، جابه‌جایی متحرک در این بازهٔ زمانی را به دست می‌آوریم:



(ب)

$$\Delta x = (-\frac{(۲+۱۲)(۵)}{۲}) + (-\frac{(۸-۵)(۱۲)}{۲}) + (\frac{(۱۵-۸)(۲۸)}{۲})$$
$$\Rightarrow \Delta x = -۳۵ - ۱۸ + ۹۸ \Rightarrow \Delta x = ۴۵\,m$$

و در آخر سرعت متوسط متحرک در این مدت را محاسبه می‌کنیم:

$$v_{av} = \frac{\Delta x}{\Delta t} \xrightarrow[\Delta t=۱۵s]{\Delta x=۴۵\,m} v_{av} = \frac{۴۵}{۱۵} \Rightarrow v_{av} = ۳\,m/s$$

تست و پاسخ ۴۲

خودروی A با سرعت ثابت $۵۴\,km/h$ در یک مسیر مستقیم به سمت خودروی ساکن B در حال حرکت است. در لحظه‌ای که خودروی A به فاصلهٔ d از خودروی B می‌رسد، خودروی B با شتاب ثابت $۳\,m/s^۲$ در جهت حرکت خودروی A شروع به حرکت می‌کند. اگر دو خودرو فقط یک بار به هم برسند، d برابر چند متر است؟

۱) ۲۲/۵
۲) ۴۵
۳) ۳۷/۵
۴) ۷۵

پاسخ: گزینه ۳

مشاوره سوال های مربوط به دو متحرک، همیشه روی میز طراحان کنکور قرار دارد. برای حل این‌جور سوال‌ها کافی است معادلهٔ حرکت آن‌ها را بنویسید.

خودت حل کنی بهتره معادلهٔ مکان ـ زمان دو خودروی A و B را بنویسید و برابر با یکدیگر قرار بدهید.

درس‌نامه ۱) معادلهٔ مکان ـ زمان متحرکی که با سرعت ثابت حرکت می‌کند به صورت زیر است:

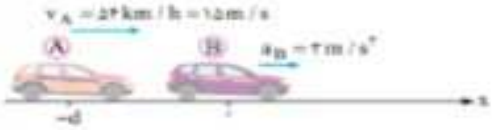
$$\text{مکان متحرک (m)} \leftarrow x = \underset{\text{سرعت متحرک (m/s)}}{v}\ \underset{\text{زمان (s)}}{t} + x_0 \rightarrow \text{مکان اولیه (m)}$$

۲) درس‌نامهٔ تست ۸۶ را بخوانید.

یادآوری برای تبدیل km / h به m / s و برعکس به صورت زیر عمل می‌کنیم:

$$km/h \underset{\times 3/6}{\overset{\div 3/6}{\rightleftarrows}} m/s$$

پاسخ تشریحی خودروی A با سرعت ثابت و خودروی B با شتاب ثابت حرکت می‌کند؛ بنابراین معادلهٔ مکان ـ زمان هر دو خودروی A و B را با توجه به شکل زیر می‌نویسیم:



$$\begin{cases} x_A = v_A t + x_{0A} \\ x_B = \frac{1}{2} a_B t^2 + v_{0B} t + x_{0B} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_A = 15t - d \\ x_B = \frac{1}{2} \times 3t^2 \end{cases}$$

هنگامی که دو خودروی A و B به یکدیگر می‌رسند، مکان‌های آن‌ها با یکدیگر برابر می‌شود؛ پس می‌توانیم بنویسیم:

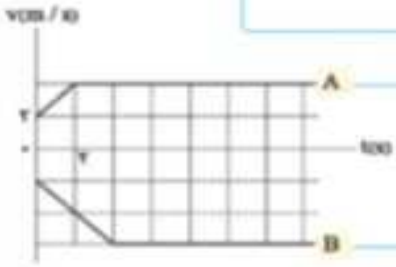
$$x_A = x_B \Rightarrow 15t - d = \frac{3}{2}t^2 \Rightarrow \frac{3}{2}t^2 - 15t + d = 0 \quad (1)$$

چون دو خودروی A و B فقط یک بار به یکدیگر می‌رسند، پس معادلهٔ (۱) باید ریشهٔ مضاعف داشته باشد؛ پس $\Delta = 0$ بوده و داریم:

$$\Delta = b^2 - 4ac \xrightarrow[a=\frac{3}{2},\ c=d]{b=-15} (-15)^2 - 4(\frac{3}{2})(d) = 0 \Rightarrow 6d = 225 \Rightarrow d = \frac{225}{6} = 37/5\ m$$

تست و پاسخ ۴۳

نمودار سرعت ـ زمان دو متحرک A و B که روی محور x حرکت می‌کنند، به شکل زیر است. اگر بردار مکان دو متحرک در مبدأ زمان به ترتیب $(10\ m)\vec{i}$ و $(140\ m)\vec{i}$ باشد، در چه لحظه‌ای برحسب ثانیه دو متحرک به یکدیگر می‌رسند؟



مکان اولیهٔ دو متحرک A و B

دو متحرک A و B به سمت یکدیگر حرکت می‌کنند.

۱) ۱۲
۲) ۱۳
۳) ۱۴
۴) ۱۵

پاسخ: گزینه ۳

مشاوره وقتی نمودار سرعت ـ زمان دو متحرک را به شما می‌دهند، به این توجه کنید که دو متحرک در یک جهت حرکت می‌کنند یا به سوی هم؟!

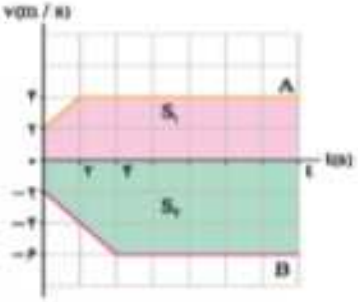
خودت حل کنی بهتره جابه‌جایی دو متحرک A و B را با استفاده از مساحت محصور بین نمودار و محور t به دست بیاورید و مجموع آن‌ها را برابر با ۱۳۰ متر قرار دهید تا لحظهٔ به هم رسیدن به دست بیاید.

درس‌نامه درس‌نامهٔ (۲) تست ۸۳ را بخوانید.

پاسخ تشریحی در طی مسیر، سرعت متحرک A مثبت و سرعت متحرک B منفی است. بنابراین متحرک A در جهت محور x و متحرک B در خلاف جهت محور x حرکت می‌کند؛ یعنی دو متحرک A و B به سمت یکدیگر حرکت می‌کنند. از طرفی دو متحرک A و B در مبدأ زمان به ترتیب در فاصلهٔ ۱۰متری و ۱۴۰متری از مبدأ مکان ($x = 0\,m$) قرار دارند. (شکل «الف»)

(الف)

با توجه به شکل «الف»، برای این‌که دو متحرک A و B به یکدیگر برسند، باید مجموعاً به اندازهٔ ۱۳۰ متر به سمت یکدیگر جابه‌جا شوند. از طرفی می‌دانیم که مساحت محصور بین نمودار سرعت ـ زمان و محور t برابر با جابه‌جایی است؛ بنابراین با توجه به شکل «ب»، مجموع اندازهٔ جابه‌جایی‌های طی‌شده توسط دو متحرک A و B را برابر با ۱۳۰ متر قرار می‌دهیم:



(ب)

$$S_1 + |S_2| = 130$$

$$\Rightarrow \frac{(2+4)(2)}{2} + 4(t-2) + \frac{(2+6)(4)}{2} + 6(t-4) = 130 \Rightarrow 6 + 4t - 8 + 16 + 6t - 24 = 130$$

$$\Rightarrow 10t = 140 \Rightarrow t = 14\,s$$

تست و پاسخ ۴۴

نمودار مکان ـ زمان دو متحرک A و B که با شتاب ثابت روی محور x حرکت می‌کنند، به شکل زیر است. فاصلهٔ دو متحرک در لحظهٔ $t = 6\,s$ چند برابر فاصلهٔ دو متحرک در لحظهٔ $t = 2\,s$ است؟

۱) ۲

۲) ۳

۳) ۴

۴) ۹

پاسخ: گزینه ۲

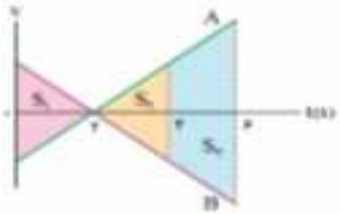
مشاوره اگر این سؤال را توانستید حل کنید، یعنی این فصل را به درستی یاد گرفتید!

خودت حل کنی بهتره نمودار سرعت ـ زمان دو متحرک A و B را رسم کنید و با استفاده از تشابه مثلث‌ها و با توجه به تقارن سهمی، فاصلهٔ دو متحرک در لحظهٔ $t = 6\,s$ را نسبت به فاصلهٔ آن‌ها در لحظهٔ $t = 2\,s$ به دست بیاورید.

درس‌نامه ۰۰ درس‌نامهٔ (۲) تست ۸۷، درس‌نامهٔ (۲) تست ۸۵، درس‌نامهٔ (۳) و یادآوری ریاضی تست ۸۳ را بخوانید.

پاسخ تشریحی با توجه به نمودار مکان ـ زمان دو متحرک A و B، متحرک A ابتدا در خلاف جهت محور x، سپس در جهت محور x و متحرک B ابتدا در جهت محور x، سپس خلاف جهت محور x حرکت کرده است و با توجه به این‌که رأس هر دو سهمی، لحظهٔ $t = ۲\,s$ است، پس مکان هر دو متحرک A و B در لحظه‌های $t = ۰\,s$ و $t = ۴\,s$ یکسان بوده و در این دو لحظه به یکدیگر می‌رسند؛ بنابراین در نمودار سرعت ـ زمان این دو متحرک (شکل زیر)، مساحت $S_۱$ با مساحت $S_۲$ برابر است $(S_۱ = S_۲)$، چون مجموع اندازه‌های جابه‌جایی دو متحرک از صفر تا ۴ ثانیه، برابر با مجموع اندازه‌های جابه‌جایی آن‌ها از ۲ ثانیه تا ۴ ثانیه است.

با توجه به نمودار سرعت ـ زمان دو متحرک A و B، فاصلهٔ آن‌ها در لحظهٔ $t = ۶\,s$ برابر با مساحت $S_۳$ است؛ چون در لحظهٔ $t = ۴\,s$ به هم می‌رسند و پس از آن از یکدیگر دور می‌شوند، بنابراین با استفاده از تشابه مثلث‌ها می‌توانیم بنویسیم:



$$\frac{S_۲ + S_۳}{S_۱} = (\frac{۴}{۲})^۲ \Rightarrow S_۲ + S_۳ = ۴S_۱ \xrightarrow{S_۲=S_۱} S_۳ = ۳S_۱$$

بنابراین فاصلهٔ دو متحرک A و B در لحظهٔ $t = ۶\,s$، سه برابر فاصلهٔ آن‌ها در لحظهٔ $t = ۲\,s$ است.

تست و پاسخ ۴۵

سرعت دو متحرک A و B که در جهت محور x حرکت می‌کنند، در بازهٔ زمانی صفر تا T از ۷ به ۳۷ می‌رسد. اگر نمودارهای شتاب ـ زمان دو متحرک در این بازهٔ زمانی به شکل‌های زیر باشد، کدام مورد دربارهٔ مقایسهٔ اندازهٔ سرعت متوسط دو متحرک (v_{av}) در این مدت درست است؟

(A) (B)

۱) $v_{av,A} > ۲۷ > v_{av,B}$

۲) $v_{av,B} > ۲۷ > v_{av,A}$

۳) $v_{av,A} = v_{av,B} > ۲۷$

۴) $v_{av,A} = v_{av,B} = ۲۷$

پاسخ: گزینه ۱

مشاوره یک سؤال خلاقانه برای تو، برای من، برای همه برای ...؟

خودت حل کنی بهتره نمودار سرعت ـ زمان دو متحرک A و B را با توجه به نمودار شتاب ـ زمان آن‌ها رسم کنید و با توجه به مساحت محصور بین نمودار سرعت ـ زمان و محور t، اندازهٔ جابه‌جایی‌های دو متحرک A و B و در نتیجه سرعت متوسط آن‌ها را با یکدیگر مقایسه کنید.

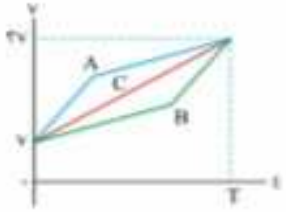
درس‌نامه ۰۰ ۱) شیب خط مماس بر نمودار سرعت ـ زمان متحرک در هر لحظه بیانگر شتاب متحرک در آن لحظه است.

شیب خط L $= a_{(t_۱)}$

۲) درس‌نامهٔ (۱) تست ۸۷ را بخوانید.

پاسخ تشریحی هر دو متحرک A و B در بازهٔ زمانی صفر تا T از سرعت ۷ به سرعت ۳۷ می‌رسند. از طرفی شتاب دو متحرک A و B از دو مرحله تشکیل شده است. در مرحلهٔ اول شتاب متحرک A از شتاب متحرک B بیشتر است؛ بنابراین شیب نمودار سرعت ـ زمان متحرک A از متحرک B بیشتر است. همچنین مدت‌زمان حرکت متحرک A در این مرحله از مدت‌زمان حرکت متحرک B کمتر است. در مرحلهٔ

دوم شتاب متحرک A کمتر از شتاب متحرک B است؛ بنابراین شیب نمودار سرعت ـ زمان متحرک A کمتر از متحرک B است. همچنین مدت‌زمان حرکت متحرک A بیشتر از مدت‌زمان حرکت متحرک B در این مرحله است. برای مقایسهٔ بهتر سرعت متوسط این دو متحرک، فرض می‌کنیم متحرکی با شتاب ثابت (متحرک C) از سرعت ۷ به سرعت ۳۷ می‌رسد. در این صورت نمودار سرعت ـ زمان این سه متحرک به صورت مقابل می‌شود:



با توجه به نمودار سرعت ـ زمان، چون در بازهٔ زمانی صفر تا T مساحت محصور بین نمودار و محور t متحرک A بیشتر از متحرک C و همچنین متحرک C بیشتر از متحرک B است، پس جابه‌جایی متحرک A بیشتر از متحرک C و متحرک C بیشتر از متحرک B است. یعنی:

$$\Delta x_A > \Delta x_C > \Delta x_B$$

از طرفی چون برای هر سه متحرک $\Delta t = T$ است، داریم:

$$\frac{\Delta x_A}{T} > \frac{\Delta x_C}{T} > \frac{\Delta x_B}{T}$$

همچنین چون $v_{av} = \frac{\Delta x}{\Delta t}$ است، پس می‌توانیم بنویسیم:

$$v_{av,A} > v_{av,C} > v_{av,B}$$

و در آخر چون متحرک C با شتاب ثابت از سرعت ۷ به سرعت ۳۷ رسیده است، می‌توانیم بنویسیم:

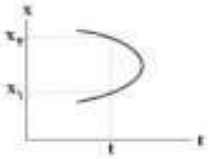
$$\xrightarrow{v_{av,C}=\frac{۷+۳۷}{۲}} v_{av,A} > ۳۷ > v_{av,B}$$

آزمون‌های سراسری

گاج

www.mapedu.ir

۱ ۲ شکل‌های رسم‌شده در گزینه‌های (۱) و (۴)، نمی‌توانند مربوط به نمودار مکان ـ زمان یک متحرک باشند، زیرا متحرک **در یک لحظهٔ مشخص در بیش از یک مکان قرار دارد.**



در گزینهٔ (۳)، متحرک با گذشت زمان به مبدأ مکان ($x=0$) نزدیک می‌شود. بنابراین فقط گزینهٔ (۲) صحیح است. همان‌طور که در شکل گزینهٔ (۲) می‌بینید، مقدار x با گذشت زمان افزایش می‌یابد. بنابراین متحرک از مبدأ مکان دور می‌شود.

۲ ۲ ابتدا بردار مکان اولیهٔ متحرک را به دست می‌آوریم:

$$x = 2\cos(\frac{\pi}{2}t) \xrightarrow{t=0} x = 2m$$

بردار مکان، قرینهٔ بردار مکان اولیه باشد $\Rightarrow x = -2m$

در ادامه مکان متحرک را در هر یک از گزینه‌ها به دست می‌آوریم تا ببینیم در کدام گزینه، مکان متحرک، قرینهٔ مکان اولیه نیست.

بررسی گزینه‌ها:

۱) پایان ثانیهٔ دوم: $t = 2s \Rightarrow x = -2m$ ✗

۲) پایان ثانیهٔ چهارم: $t = 4s \Rightarrow x = 2m$ ✓

۳) پایان سه ثانیهٔ دوم: $t = 6s \Rightarrow x = -2m$ ✗

۴) پایان دو ثانیهٔ پنجم: $t = 10s \Rightarrow x = -2m$ ✗

۳ ۴ با توجه به رابطهٔ مربوط به سرعت متوسط، جابه‌جایی در ۵ ثانیهٔ اول حرکت و ۵ ثانیهٔ دوم حرکت را به دست می‌آوریم:

$$v_{av} = \frac{\Delta x}{\Delta t}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \text{در ۵ ثانیهٔ اول حرکت}: -2/5 = \frac{\Delta x_1}{5} \Rightarrow \Delta x_1 = -12/5m \\ \text{در ۵ ثانیهٔ دوم حرکت}: 1/5 = \frac{\Delta x_2}{5} \Rightarrow \Delta x_2 = 7/5m \end{cases}$$

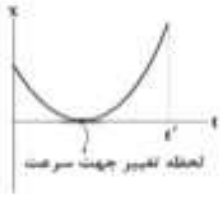
حال می‌توان نوشت:

$$\text{در ۱۰ ثانیهٔ اول حرکت}: v_{av} = \frac{\Delta x_{کل}}{\Delta t} = \frac{\Delta x_1 + \Delta x_2}{\Delta t}$$

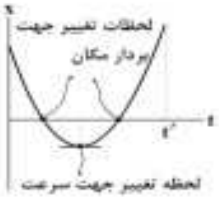
$$\Rightarrow v_{av} = \frac{-12/5 + 7/5}{10} = -0/5\frac{m}{s} \Rightarrow \vec{v}_{av} = -0/5\vec{i}(\frac{m}{s})$$

۴ ۴ **بررسی گزینه‌ها:**

۱) در این گزینه، بردار مکان تغییر جهت نمی‌دهد و بردار سرعت، یک بار تغییر جهت می‌دهد.

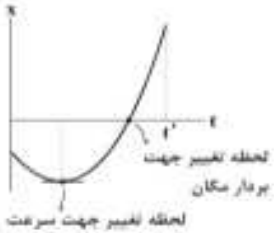


۲) در این گزینه، بردار مکان، دو بار و بردار سرعت، یک بار تغییر جهت می‌دهند.



۳) در این گزینه، بردار سرعت تغییر جهت نمی‌دهد و بردار مکان، یک بار تغییر جهت می‌دهد.

۴) در این گزینه، بردارهای مکان و سرعت، هر کدام یک بار تغییر جهت می‌دهند.



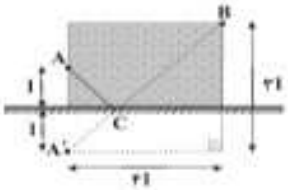
بنابراین گزینهٔ (۴) صحیح است.

۵ ۳ برای آن‌که سرعت متوسط متحرک در یک بازهٔ زمانی، در خلاف جهت محور x باشد، کافی است جابه‌جایی در آن بازه، منفی باشد. در ادامه نشان می‌دهیم که در ثانیهٔ اول حرکت ($0 < t < 1s$)، جابه‌جایی، منفی است:

$$\begin{cases} t_1 = 0 \Rightarrow x_1 = -10m \\ t_2 = 1s \Rightarrow x_2 = -13m \end{cases} \Rightarrow \Delta x = x_2 - x_1 = -3m$$

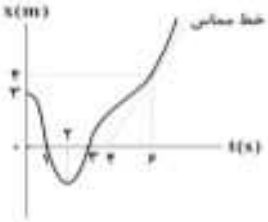
به عنوان تمرین نشان دهید در سایر بازه‌ها، جابه‌جایی منفی نیست.

۶ ۴ کم‌ترین مسافت برای انجام حرکت مدنظر سؤال، در حالتی رخ می‌دهد که تصویر نقطهٔ A نسبت به زمین (یعنی A') با نقطهٔ B و نقطهٔ C در یک امتداد واقع شوند (چرا؟). با توجه به این موضوع داریم:



$$\text{کم‌ترین مسافت} = \text{فاصلهٔ } A' \text{ تا } B = \sqrt{(3l)^2 + (4l)^2} = 5l$$

۷ **۱** **گام اول:** سرعت متحرک در لحظهٔ $t=6s$ را به دست می‌آوریم:



$t=6s: v=$ شیب خط مماس $=\frac{4-0}{6-4}=2\frac{m}{s}$

از طرفی چون تندی متوسط متحرک در بازهٔ زمانی $2s\le t\le 6s$ برابر تندی متحرک در لحظهٔ $t=6s$ است، بنابراین تندی متوسط هم در بازهٔ زمانی $2s\le t\le 6s$ برابر با $2\frac{m}{s}$ است.

گام دوم: مسافت طی‌شده در بازهٔ $2s\le t\le 6s$ برابر است با:

$$s_{av}=\frac{l}{\Delta t}\Rightarrow 2=\frac{l}{4}\Rightarrow l=8m$$

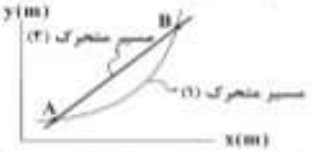
بنابراین متحرک در لحظهٔ $t=2s$، ۸متر عقب‌تر از لحظهٔ $t=6s$ است. با توجه به این‌که در لحظهٔ $t=6s$، مکان متحرک برابر با $x=4m$ است، پس مکان متحرک در لحظهٔ $t=2s$ برابر با $x=-4m$ است.

گام سوم: در نهایت سرعت متوسط متحرک در ۲ ثانیهٔ اول حرکت برابر است با:

$$v_{av}=\frac{\Delta x}{\Delta t}=\frac{-4-3}{2}=\frac{-7}{2}=-3/5\frac{m}{s}$$

$$\Rightarrow \vec{v}_{av}=-3/5\vec{i}\,(\frac{m}{s})$$

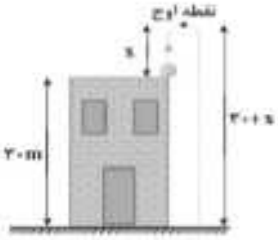
۸ **۱** در این سؤال، نقاط ابتدا و انتهای مسیر برای دو متحرک، یکسان است، بنابراین جابه‌جایی دو متحرک، یکسان می‌باشد. با توجه به یکسان بودن مدت زمان این جابه‌جایی برای دو متحرک، سرعت متوسط دو متحرک در این بازهٔ زمانی یکسان می‌باشد ($v_{av_1}=v_{av_2}$).



از طرفی با توجه به مسیر حرکت، مسافت طی‌شده توسط متحرک (۱)، بیشتر از مسافت طی‌شده توسط متحرک (۲) است، بنابراین می‌توان نوشت:

$$s_{av}=\frac{l}{\Delta t}\xrightarrow[\Delta t_1=\Delta t_2]{l_1>l_2} s_{av_1}>s_{av_2}$$

۹ **۲** مطابق شکل زیر، فرض می‌کنیم فاصلهٔ نقطهٔ اوج گلوله (حداکثر ارتفاع گلوله از سطح زمین) تا لبهٔ ساختمان برابر x باشد، در این صورت می‌توان نوشت:



$d=30m$: فاصلهٔ نقطهٔ اول و آخر = اندازهٔ جابه‌جایی

$l=x+(30+x)=30+2x$: مسافت

در ادامه چون تندی متوسط گلوله، ۵۰ درصد بزرگ‌تر از اندازهٔ سرعت متوسط آن است، مسافت طی‌شده نیز ۵۰ درصد بیشتر از اندازهٔ جابه‌جایی است، بنابراین می‌توان نوشت:

$$\frac{l}{d}=\frac{150}{100}\Rightarrow\frac{30+2x}{30}=\frac{3}{2}\Rightarrow x=7/5m$$

بنابراین حداکثر ارتفاع گلوله از سطح زمین برابر است با:

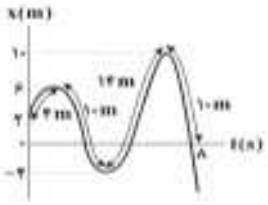
$30+x=30+7/5=37/5m$

۱۰ **۱** سرعت متوسط متحرک برابر است با:

$$\begin{cases}t=0: & x_1=2m\\ t=8s: & x_2=0\end{cases}\Rightarrow \Delta x=-2m$$

$$\Rightarrow v_{av}=\frac{\Delta x}{\Delta t}=\frac{-2}{8}=-\frac{1}{4}\frac{m}{s}$$

تندی متوسط متحرک برابر است با:



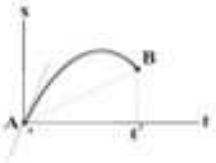
$$l=4+10+14+10=38m$$

$$s_{av}=\frac{l}{\Delta t}=\frac{38}{8}=\frac{19}{4}\frac{m}{s}$$

بنابراین اختلاف تندی متوسط و بزرگی سرعت متوسط برابر است با:

$$s_{av}-|v_{av}|=\frac{19}{4}-\frac{1}{2}=\frac{18}{4}=\frac{9}{2}\frac{m}{s}$$

۱۱ **۳** با توجه به شکل زیر مشخص است که شیب خط واصل بین دو نقطهٔ A و B از نمودار مکان ـ زمان، کم‌تر از شیب خط مماس بر نمودار در لحظهٔ $t=0$ است، بنابراین اندازهٔ سرعت متوسط از لحظهٔ صفر تا t'، کم‌تر از $v_0=8\frac{m}{s}$ است. پس تنها گزینهٔ (۳) می‌تواند صحیح باشد.



۱۲ **۳** **بررسی عبارت‌ها:**

الف) در ثانیهٔ دوم ($1s\le t\le 2s$) نمودار مکان ـ زمان، افقی است و مکان جسم، ثابت است، بنابراین در ثانیهٔ دوم، متحرک ساکن است. (✓)

ب) در بازهٔ زمانی $0\le t\le 3s$، متحرک ابتدا ۲ متر در خلاف جهت محور x حرکت کرده و سپس ۲ متر در جهت محور x حرکت می‌کند، بنابراین مسافت طی‌شده برابر ۴ متر است و داریم:

$$0\le t\le 3s:\quad s_{av}=\frac{l}{\Delta t}=\frac{4}{3}\frac{m}{s}$$

همچنین در بازهٔ زمانی $3s\le t\le 5s$، مسافت طی‌شده برابر یک متر است و داریم:

$$3s\le t\le 5s:\quad s_{av}=\frac{l}{\Delta t}=\frac{1}{2}\frac{m}{s}$$

بنابراین تندی متوسط در بازهٔ صفر تا $t=3s$ بزرگ‌تر است. (✗)

ج) با توجه به این‌که اندازهٔ جابه‌جایی در ثانیه‌های ششم و هشتم متفاوت است، اندازهٔ سرعت متوسط هم در این بازه‌ها متفاوت خواهد بود. این موضوع از روی شیب خط واصل بین نقاط ابتدا و انتهای بازه نیز مشخص است. (✗)

د) در کل حرکت، ۴ ثانیه نمودار در حال نزدیک شدن به محور افقی است، بنابراین ۴ ثانیه متحرک به سمت مبدأ مکان حرکت کرده است. (✓)

۱۳ **۲** اگر طول پیست برابر l باشد، برای دور اول می‌توان نوشت:

$$s_{av} = \frac{l}{\Delta t} \Rightarrow ۲۰ = \frac{l}{\Delta t_۱} \Rightarrow \Delta t_۱ = \frac{l}{۲۰}$$

اگر تندی متحرک در دور دوم برابر v باشد، می‌توان نوشت:

$$s_{av} = \frac{l}{\Delta t} \Rightarrow v = \frac{l}{\Delta t_۲} \Rightarrow \Delta t_۲ = \frac{l}{v}$$

حال با توجه به اطلاعات سؤال برای دو دور اول مسابقه داریم:

$$s_{av_{کل}} = \frac{l_{کل}}{\Delta t_{کل}} \Rightarrow \boxed{۳۰} = \frac{۲l}{\frac{l}{۲۰}+\frac{l}{v}} \Rightarrow ۱۵ = \frac{۱}{\frac{۱}{۲۰}+\frac{۱}{v}}$$

$$۲۰+\frac{۵۰}{۱۰۰}\times ۲۰$$

$$\Rightarrow \frac{۱}{۲۰}+\frac{۱}{v} = \frac{۱}{۱۵} \Rightarrow \frac{۱}{v} = \frac{۱}{۱۵}-\frac{۱}{۲۰} = \frac{۴-۳}{۶۰} = \frac{۱}{۶۰}$$

$$\Rightarrow v = ۶۰\frac{m}{s}$$

۱۴ **۱** این گلوله وقتی از A تا A′ حرکت می‌کند، مسافتی به اندازهٔ $\frac{۱}{۶}$ محیط دایره را طی می‌کند. از طرفی با توجه به هندسه، جابه‌جایی برابر R است، بنابراین می‌توان نوشت:

$$\frac{|v_{av}|}{s_{av}} = \frac{\frac{d}{\Delta t}}{\frac{l}{\Delta t}} = \frac{d}{l} = \frac{R}{\frac{۲\pi R}{۶}} = \frac{۳}{\pi}$$

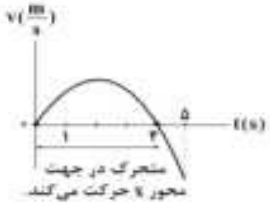
$$\Rightarrow \frac{|v_{av}|}{\frac{\pi}{۶}} = \frac{۳}{\pi} \Rightarrow |v_{av}| = \frac{۱}{۲} = ۰/۵\frac{m}{s}$$

دقت شود جابه‌جایی متحرک در جهت مثبت محور x است، بنابراین $\vec{v}_{av} = ۰/۵\vec{i}(\frac{m}{s})$ می‌باشد.

۱۵ **۱** در حالتی که متحرک در خلاف جهت محور x حرکت می‌کند، علامت سرعت متحرک، منفی است. با توجه به نمودار سرعت ـ زمان رسم‌شده، در بازهٔ زمانی $۴s \le t \le ۵s$، علامت سرعت متحرک منفی است.

$$v = -t^۲ + ۴t = -t(t-۴)$$

$$\Rightarrow \text{ریشه‌ها}: \begin{cases} t_۱ = ۰ \\ t_۲ = ۴s \end{cases}$$

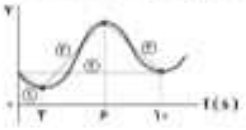


در نتیجه در $\frac{۱}{۵}$ از ۵ ثانیهٔ اول حرکت، متحرک در خلاف جهت محور x حرکت می‌کند.

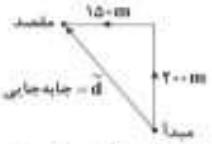
۱۶ **۳** سرعت، یک کمیت برداری است، بنابراین زمانی سرعت‌ها در دو زمان مختلف با هم برابر هستند که هم از لحاظ اندازه و هم از لحاظ جهت با یک‌دیگر برابر باشند. در این سؤال در لحظات $t_۱$ و $t_۳$، سرعت‌های متحرک با هم برابر هستند، بنابراین شتاب متوسط این متحرک در این بازهٔ زمانی برابر صفر است.

$$\vec{a}_{av} = \frac{\Delta\vec{v}}{\Delta t} = \frac{\vec{v}_۳ - \vec{v}_۱}{t_۳ - t_۱} \xrightarrow{\vec{v}_۳ = \vec{v}_۱} \vec{a}_{av} = ۰$$

۱۷ **۴** شیب خط واصل بین دو نقطه از نمودار سرعت ـ زمان، برابر شتاب متوسط متحرک در آن بازهٔ زمانی است. با توجه به نمودار زیر، اندازهٔ شیب خط (۴) بیشتر از سه خط دیگر است، بنابراین اندازهٔ شتاب متوسط متحرک در بازهٔ زمانی $۲s \le t \le ۶s$ بیشتر از سایر گزینه‌ها است.



۱۸ **۴** متحرک ابتدا با تندی $۲۰\frac{m}{s}$، به مدت ۱۰ ثانیه به سمت شمال می‌رود، بنابراین ۲۰۰ متر به سمت شمال حرکت کرده است. در ادامه به مدت ۱۵s با تندی $۱۰\frac{m}{s}$ به سمت غرب می‌رود، بنابراین ۱۵۰ متر به سمت غرب حرکت کرده است. شکل زیر، مسیر حرکت این متحرک را نشان می‌دهد، بنابراین:



$$\text{جابه‌جایی} = d = \sqrt{۱۵۰^۲ + ۲۰۰^۲} = ۲۵۰m$$

با در نظر گرفتن ۵ ثانیه توقف در مسیر، کل زمان حرکت برابر ۳۰ ثانیه است، بنابراین می‌توان اندازهٔ سرعت متوسط متحرک را به صورت زیر محاسبه کرد:

$$v_{av} = \frac{d}{\Delta t} = \frac{۲۵۰}{۳۰} = \frac{۲۵}{۳}\frac{m}{s}$$

۱۹ **۲** فرض می‌کنیم تغییرات سرعت متحرک در بازهٔ زمانی $t_۱ = ۵s$ تا $t_۲ = ۱۰s$ برابر $\Delta v_۱$ و در بازهٔ زمانی $t_۲ = ۱۰s$ تا $t_۳ = ۱۲s$ برابر $\Delta v_۲$ و در بازهٔ $t_۱ = ۵s$ تا $t_۳ = ۱۲s$ برابر $\Delta v_{کل}$ باشد. با توجه به رابطهٔ $a_{av} = \frac{\Delta v}{\Delta t}$ می‌توان نوشت:

$$t_۲ = ۱۰s \text{ تا } t_۱ = ۵s \text{ در بازهٔ زمانی}: -۲ = \frac{\Delta v_۱}{۱۰-۵} \Rightarrow \Delta v_۱ = -۱۰\frac{m}{s}$$

$$t_۳ = ۱۲s \text{ تا } t_۱ = ۵s \text{ در بازهٔ زمانی}: ۴ = \frac{\Delta v_{کل}}{۱۲-۵} \Rightarrow \Delta v_{کل} = ۲۸\frac{m}{s}$$

از طرفی $\Delta v_{کل} = \Delta v_۱ + \Delta v_۲$ است، بنابراین می‌توان نوشت:

$$\Delta v_{کل} = \Delta v_۱ + \Delta v_۲$$

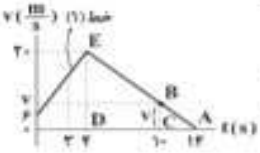
$$\Rightarrow ۲۸ = -۱۰ + \Delta v_۲ \Rightarrow \Delta v_۲ = ۳۸\frac{m}{s}$$

$$t_۳ = ۱۲s \text{ تا } t_۲ = ۱۰s \text{ در بازهٔ زمانی}: a_{av_۲} = \frac{\Delta v_۲}{\Delta t} = \frac{۳۸}{۱۲-۱۰} = ۱۹\frac{m}{s^۲}$$

$$\Rightarrow \vec{a}_{av_۲} = +۱۹\vec{i}(\frac{m}{s^۲})$$

www.mapedu.ir

۲۰ ۱ ابتدا مطابق شکل مقابل و با استفاده از تشابه دو مثلث $\overset{\Delta}{ABC}$ و $\overset{\Delta}{AED}$، سرعت متحرک را در لحظهٔ $t=10s$ محاسبه می‌کنیم:



$$\frac{v}{20}=\frac{14-10}{14-4}\Rightarrow v=8\,\frac{m}{s}$$

در ادامه برای محاسبهٔ شتاب متوسط متحرک در ۱۰ ثانیهٔ اول حرکتش می‌توان نوشت:

$$a_{av}=\frac{\Delta v}{\Delta t}=\frac{8-6}{10-0}=\frac{2}{10}=0/2\,\frac{m}{s^2}$$

از طرفی شتاب متحرک در لحظهٔ $t=3s$، برابر شیب خط (۱) است، بنابراین داریم:

$$a=(1)\text{ شیب خط}=\frac{20-6}{4-0}=\frac{14}{4}=3/5\,\frac{m}{s^2}$$

بنابراین نسبت خواسته‌شده برابر است با:

$$\frac{a_{av}}{a}=\frac{0/2}{3/5}=\frac{2}{35}$$

۲۱ ۳ ابتدا دقت کنید چون متحرک دوباره به نقطهٔ شروع حرکت باز می‌گردد، بنابراین جابه‌جایی آن صفر است و در نتیجه سرعت متوسط متحرک هم صفر می‌باشد. در ادامه برای محاسبهٔ تندی متوسط داریم:

$$\begin{cases} l=l_{\text{رفت}}+l_{\text{برگشت}}=800+800=1600\,km \\ \Delta t=t_{\text{رفت}}+t_{\text{برگشت}}=t_{\text{رفت}}+\dfrac{l_{\text{برگشت}}}{v_{\text{برگشت}}}=10+\dfrac{800}{100}=18\,h \end{cases}$$

$$\Rightarrow s_{av}=\frac{l}{\Delta t}=\frac{1600}{18}=\frac{800}{9}\,\frac{km}{h}$$

۲۲ ۳ در بازهٔ زمانی t_2 تا t_3، تندی متحرک در تمامی لحظات بیشتر از بازه‌های زمانی دیگر است، بنابراین تندی متوسط هم در بازهٔ زمانی t_2 تا t_3 بیشتر از بازه‌های زمانی دیگر است.

۲۳ ۳ در مدت‌زمان ۴۰s، دو قطار در مجموع مسافتی به اندازهٔ مجموع طول قطارها را طی می‌کنند تا به طور کامل از کنار یک‌دیگر عبور کنند، بنابراین می‌توان نوشت:

$$\begin{cases} l_A=v_A\Delta t: \text{مسافتی که قطار A طی می‌کند} \\ l_B=v_B\Delta t: \text{مسافتی که قطار B طی می‌کند} \end{cases}$$

$$\Rightarrow l_{\text{کل}}=(v_A+v_B)\Delta t: \text{مسافت کل}$$

$$\xrightarrow{l_{\text{کل}}=l_A+l_B} l_A+l_B=(10+4)\times 40=560\,m$$

اگر طول هر واگن یا لوکوموتیو را برابر d در نظر بگیریم، طول قطار A (L_A) برابر 9d و طول قطار B (L_B) برابر 7d است، بنابراین داریم:

$$L_A+L_B=560\Rightarrow 16d=560\Rightarrow d=35\,m$$

۲۴ ۴ **بررسی عبارت‌ها:**

الف) هنگامی که متحرک در مکان‌های منفی قرار دارد، بردار مکان آن در خلاف جهت محور x است و هنگامی که در مکان‌های مثبت قرار دارد، بردار مکان آن در جهت محور x است، بنابراین بردار مکان متحرک ابتدا در خلاف جهت محور x و سپس در جهت محور x می‌باشد و در نتیجه این عبارت نادرست است.

ب) بردار سرعت متحرک در مکان A در جهت مثبت محور x ($\vec{v}_A>0$) و بردار سرعت متحرک در مکان C در خلاف جهت محور x است ($\vec{v}_C<0$)، بنابراین تغییرات سرعت متحرک منفی بوده و در نتیجه بردار شتاب متوسط متحرک در این بازهٔ زمانی، در خلاف جهت محور x است.

$$\vec{a}_{av}=\frac{\Delta\vec{v}}{\Delta t}=\frac{\overset{\text{منفی}}{\boxed{\vec{v}_C}}-\overset{\text{مثبت}}{\boxed{\vec{v}_A}}}{\Delta t}\Rightarrow \vec{a}_{av}<0$$

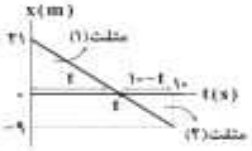
ج) متحرک ابتدا ۲۸ متر در جهت مثبت محور x حرکت می‌کند، سپس تغییر جهت داده و ۱۲ متر در خلاف جهت محور x حرکت می‌کند، بنابراین مسافت طی‌شده برابر ۴۰ متر است و تندی متوسط متحرک در این بازهٔ زمانی برابر است با:

$$s_{av}=\frac{l}{\Delta t}=\frac{40}{10}=4\,\frac{m}{s}$$

د) متحرک در هنگام عبور از مبدأ مکان ($x=0$)، در حال حرکت در جهت مثبت محور x است و در نتیجه بردار سرعت آن در جهت مثبت محور x می‌باشد.

با توجه به این توضیحات، فقط عبارت «الف» نادرست است.

۲۵ ۳ برای حل کردن این سؤال، ابتدا محلی را که نمودار، محور افقی را قطع می‌کند، پیدا می‌کنیم:



$$\frac{t}{10-t}=\frac{21}{9}\Rightarrow t=7s:\text{تشابه مثلث‌های (۱) و (۲)}$$

بنابراین علامت x در لحظهٔ $t=7s$ عوض می‌شود و در نتیجه بردار مکان متحرک در این لحظه تغییر جهت می‌دهد.

از طرفی دقت کنید که نمودار داده‌شده یک خط با شیب ثابت است، بنابراین سرعت متوسط در همهٔ بازه‌های زمانی، یکسان است و برای محاسبهٔ سرعت متوسط در ۲ ثانیهٔ دوم حرکت، کافی است شیب نمودار را محاسبه کنیم:

$$\vec{v}_{av}=\frac{-9-21}{10}=\frac{-30}{10}=-3\,\frac{m}{s}\Rightarrow |v_{av}|=3\,\frac{m}{s}$$

۲۶ ۱ اگر مدت‌زمان حرکت متحرک A برابر t ثانیه باشد، مدت‌زمان حرکت متحرک B برابر $t-3$ ثانیه است، زیرا متحرک B پس از ۳ ثانیه شروع به حرکت کرده است. در ادامه معادلهٔ مکان ـ زمان دو متحرک A و B را می‌نویسیم:

$$x=vt+x_0\Rightarrow\begin{cases} x_A=v_At\Rightarrow x_A=20t \\ x_B=v_B(t-3)\Rightarrow x_B=25(t-3) \end{cases}$$

دقت کنید: تندی حرکت متحرک B برابر $90\,\frac{km}{h}$ است که معادل $25\,\frac{m}{s}$ می‌باشد.

www.mapedu.ir

در ادامه مکان دو متحرک را در لحظهٔ $t=5s$ به دست می‌آوریم:

$$\begin{cases} x_A = 20t \Rightarrow x_A = 20\times 5 = 100m \\ x_B = 25(t-3) \Rightarrow x_B = 25(5-3) = 50m \end{cases} \Rightarrow x_A - x_B = 50m$$

۲۷ ۱ در لحظهٔ $t=8s$ متحرک از مبدأ مکان می‌گذرد، بنابراین داریم:

$$x = bt - 40 \xrightarrow[x=0]{t=8s} 0 = 8b - 40 \Rightarrow b = 5$$

در ادامه لحظاتی که فاصلهٔ متحرک تا مبدأ مکان برابر ۵۰ متر است را به دست می‌آوریم:

$$|x| = 50 \Rightarrow |5t-40| = 50 \Rightarrow 5t - 40 = \pm 50 \Rightarrow \begin{cases} t_1 = 18s \ ✓ \\ t_2 = -2s \ ✗ \end{cases}$$

۲۸ ۳ برای مقایسهٔ زمان رفت و برگشت به صورت زیر عمل می‌کنیم:

$$t = \frac{l}{v} \Rightarrow t \propto \frac{1}{v} \Rightarrow \frac{t_{رفت}}{t_{برگشت}} = \frac{v_{برگشت}}{v_{رفت}}$$

$$\xrightarrow{t_{برگشت} = \frac{75}{100} t_{رفت}} \frac{t_{رفت}}{\frac{75}{100} t_{رفت}} = \frac{v_0 + 5}{v_0}$$

$$\Rightarrow \frac{v_0+5}{v_0} = \frac{\cancel{100}^{4}}{\cancel{75}_{3}} \Rightarrow 4v_0 = 3v_0 + 15 \Rightarrow v_0 = 15\frac{m}{s}$$

۲۹ ۱ فاصلهٔ دو متحرک در ابتدا برابر ۴۰ متر بوده است که در مدت ۸s به صفر رسیده است. بنابراین متحرک A در هر ثانیه ۵ متر به متحرک B نزدیک شده است. تا در نهایت در لحظهٔ $t=8s$ به آن رسیده است و از متحرک B عبور کرده است. برای آن‌که فاصلهٔ دو متحرک برابر ۱۰ متر شود، دو حالت امکان‌پذیر است:

۱) متحرک A، ۳۰ متر از فاصله را جبران کند تا فاصله به ۱۰ متر برسد. در این حالت با توجه به این‌که در هر ثانیه ۵ متر فاصله تغییر می‌کند، ۶ ثانیه زمان لازم است تا ۳۰ متر فاصله جبران شود، بنابراین اولین بار در لحظهٔ $t_1 = 6s$، فاصلهٔ دو متحرک به $10m$ می‌رسد.

۲) متحرک A، ۴۰ متر فاصله را جبران کند و سپس ۱۰ متر از متحرک B جلو بیفتد. با توجه به این‌که متحرک A در هر ثانیه ۵ متر از فاصله را جبران می‌کند، پس از ۸s دو متحرک به هم می‌رسند و سپس ۲ ثانیهٔ دیگر زمان لازم است که متحرک A به اندازهٔ ۱۰ متر جلو بیفتد. بنابراین در لحظهٔ $t_2 = 10s$، فاصلهٔ دو متحرک برای بار دوم برابر $10m$ می‌شود.

$$\begin{cases} t_1 = 6s \\ t_2 = 10s \end{cases} \Rightarrow |t_2 - t_1| = |10-6| = 4s$$

۳۰ ۱ بزرگی سرعت در لحظهٔ $t=0$ برابر $4\frac{m}{s}$ است، بنابراین می‌توان نوشت:

$$v = t^2 + bt + c \xrightarrow[v=4\frac{m}{s}]{t=0} 4 = 0 + 0 + c \Rightarrow c = 4$$

شتاب متوسط متحرک در ثانیهٔ اول حرکت برابر $-3\frac{m}{s^2}$ است، بنابراین می‌توان نوشت:

$$\begin{cases} t=0: v = 0+0+4 = 4 \\ t=1s: v = 1+b+4 = 5+b \end{cases} \Rightarrow \Delta\bar{v} = 1+b$$

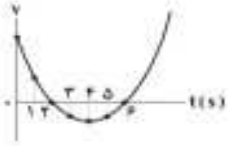
$$\bar{a}_{av} = \frac{\Delta\bar{v}}{\Delta t} \Rightarrow -3 = \frac{1+b}{1} \Rightarrow b = -4$$

بنابراین معادلهٔ سرعت ـ زمان متحرک به صورت $v = t^2 - 4t + 4$ است.

$$v = t^2 - 4t + 4 = (t-2)^2 \geq 0$$

عبارت فوق همواره بزرگ‌تر یا مساوی صفر است و تغییر علامت نمی‌دهد، بنابراین متحرک هیچ‌گاه تغییر جهت نمی‌دهد.

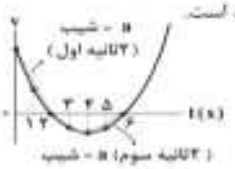
۳۱ ۳ ابتدا دقت کنید که با توجه به تقارن سهمی، رأس آن در لحظهٔ $t=4s$ قرار دارد، بنابراین نمودار سرعت ـ زمان به شکل مقابل است.



بررسی گزینه‌ها:

۱) در بازهٔ زمانی $3s < t < 4s$، شیب نمودار، منفی و در نتیجه شتاب متحرک هم منفی است و در بازهٔ زمانی $4s \leq t \leq 6s$، شیب نمودار، مثبت و در نتیجه شتاب متحرک هم مثبت است، بنابراین در ۳ ثانیهٔ دوم حرکت، ابتدا شتاب منفی است و سپس مثبت می‌شود، بنابراین عبارت گزینهٔ (۱) نادرست است.

۲) در ۲ ثانیهٔ اول حرکت، اندازهٔ سرعت کم می شود و حرکت کندشونده است و در ۲ ثانیهٔ دوم، اندازهٔ سرعت در حال افزایش است و در نتیجه حرکت تندشونده می‌باشد، بنابراین در ۴ ثانیهٔ اول حرکت، ابتدا حرکت کندشونده و سپس تندشونده است، بنابراین گزینهٔ (۲) نادرست است.



۳) مطابق شکل مقابل، اندازهٔ شیب خط واصل نقاط نمودار در ۲ ثانیهٔ اول حرکت، بزرگ‌تر از ۲ ثانیهٔ سوم حرکت است و عبارت گزینهٔ (۳) صحیح است.

دقت کنید: در ۲ ثانیهٔ اول حرکت، شتاب، منفی و در ۲ ثانیهٔ سوم حرکت، شتاب، مثبت است.

۴) در بازهٔ زمانی $2s < t < 6s$، سرعت حرکت، منفی است و در نتیجه متحرک در خلاف جهت محور x حرکت کرده است، بنابراین متحرک در مجموع ۴ ثانیه در خلاف جهت محور x حرکت می‌کند، بنابراین عبارت گزینهٔ (۴) نادرست است.

www.mapedu.ir

۳۲ **۳** **گام اول:** با مقایسهٔ معادلهٔ سرعت ـ زمان داده‌شده با معادلهٔ سرعت ـ زمان در حرکت با شتاب ثابت داریم:

$$\begin{cases} v = 4t - 8 \\ v = at + v_0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a = 4\,\frac{m}{s^2} \\ v_0 = -8\,\frac{m}{s} \end{cases}$$

بنابراین معادلهٔ مکان ـ زمان این متحرک به صورت زیر خواهد بود:

$$x = \frac{1}{2}at^2 + v_0 t + x_0 \xrightarrow[v_0 = -8\,\frac{m}{s}]{a = 4\,\frac{m}{s^2}} x = 2t^2 - 8t + x_0$$

گام دوم: در لحظهٔ $t = 1s$، متحرک از مکان $x = -16m$ عبور می‌کند، بنابراین می‌توان نوشت:

$$x = 2t^2 - 8t + x_0 \xrightarrow[x = -16m]{t = 1s} -16 = 2 - 8 + x_0 \Rightarrow x_0 = -10m$$

گام سوم: حال که معادلهٔ مکان ـ زمان را می‌دانیم، لحظه‌ای را که متحرک از مبدأ مکان می‌گذرد، به دست می‌آوریم:

$$x = 2t^2 - 8t - 10 \Rightarrow 0 = 2t^2 - 8t - 10 \Rightarrow t^2 - 4t - 5 = 0$$

$$\xrightarrow{\text{حل معادلهٔ درجهٔ ۲}} \begin{cases} t_1 = -1s \ \times \\ t_2 = 5s \ \checkmark \end{cases}$$

۳۳ **۲** متحرک در مبدأ زمان با تندی $4\,\frac{m}{s}$ در خلاف جهت محور x حرکت می‌کند، پس سرعت اولیهٔ آن برابر با $-4\,\frac{m}{s}$ می‌باشد (گزینه‌های (۳) و (۴) نادرست هستند). در ادامه سرعت متحرک را در زمان‌های مشخص‌شده به دست می‌آوریم:

در بازهٔ زمانی $0 \le t \le 8s$، شتاب متحرک برابر $4\,\frac{m}{s^2}$ است، پس داریم:

$$t = 8s:\ v = at + v_0 \Rightarrow v = 4 \times 8 + (-4) = 28\,\frac{m}{s}$$

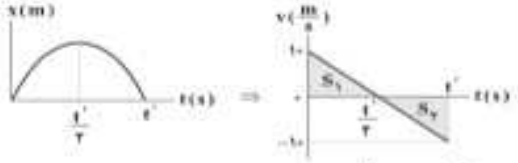
در بازهٔ زمانی $8s \le t \le 12s$، شتاب متحرک، صفر است و سرعت ثابت می‌ماند.

در بازهٔ زمانی $12s \le t \le 20s$، شتاب متحرک برابر $-2\,\frac{m}{s^2}$ است و سرعت متحرک در ابتدای بازه برابر $28\,\frac{m}{s}$ می‌باشد، بنابراین:

$$t = 20s:\ v = at + v_0 \Rightarrow v = -2 \times \underbrace{\boxed{8}}_{\text{طول بازهٔ زمانی } t=12s \text{ تا } t=20s} + 28 = 12\,\frac{m}{s}$$

بنابراین سرعت در لحظهٔ $t = 20s$، مثبت است و گزینه (۲) صحیح است.

۳۴ **۳** با توجه به نمودار مکان ـ زمان داده‌شده، نمودار سرعت ـ زمان متحرک به صورت زیر است:



$$l = |S_1| + |S_2| = \frac{10 \times \frac{t'}{2}}{2} + \frac{10 \times \frac{t'}{2}}{2} = 5t' \ :\text{مسافت طی‌شده}$$

بنابراین تندی متوسط متحرک از لحظهٔ شروع حرکت تا لحظهٔ t' برابر است با:

$$s_{av} = \frac{l}{\Delta t} = \frac{5t'}{t'} = 5\,\frac{m}{s}$$

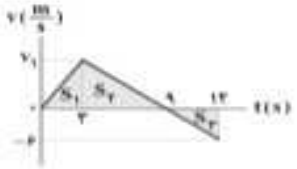
دقت کنید: چون نمودار مکان ـ زمان به شکل سهمی است، نمودار سرعت ـ زمان به صورت یک خط می‌باشد.

۳۵ **۱** متحرک هنگامی‌که تغییر جهت می‌دهد، در بیشترین فاصلهٔ خود در جهت مثبت محور x از مبدأ مکان قرار دارد، بنابراین در لحظهٔ $t = 3s$ سرعت متحرک صفر شده است، پس داریم:

$$v = at + \overset{6\,\frac{m}{s}}{\boxed{v_0}} \xrightarrow[v=0]{t=3s} 0 = 3a + 6 \Rightarrow a = -2\,\frac{m}{s^2}$$

با توجه به این‌که شتاب حرکت، ثابت است، شتاب متوسط در هر بازهٔ زمانی برابر $-2\,\frac{m}{s^2}$ است، بنابراین بردار شتاب متحرک در SI به صورت $\vec{a} = -2\vec{i}$ خواهد بود.

۳۶ **۳** **گام اول:** هنگامی‌که متحرک در خلاف جهت محور x حرکت می‌کند، سرعت آن منفی است، بنابراین با توجه به این‌که متحرک ۳ ثانیه در خلاف جهت محور x حرکت کرده است، می‌توان گفت که سرعت آن به مدت ۳ ثانیه از لحظهٔ $t = 9s$ تا $t = 12s$ منفی بوده است و در نتیجه نمودار سرعت ـ زمان به صورت زیر خواهد بود:



گام دوم: با استفاده از تشابه مثلث‌های S_2 و S_3 داریم:

$$\frac{v_1}{6} = \frac{9-3}{12-9} \Rightarrow v_1 = 12\,\frac{m}{s}$$

گام سوم: با محاسبهٔ مساحت مثلث‌ها، جابه‌جایی متحرک قابل محاسبه است، بنابراین:

$$\begin{cases} S_1 = \frac{12\times 3}{2} = 18\,m \\ S_2 = \frac{12\times 6}{2} = 36\,m \Rightarrow \Delta x = S_1 + S_2 - S_3 = 45\,m \\ S_3 = \frac{6\times 3}{2} = 9\,m \end{cases}$$

گام چهارم: در نهایت برای محاسبهٔ سرعت متوسط می‌توان نوشت:

$$v_{av} = \frac{\Delta x}{\Delta t} = \frac{45}{12} = \frac{15}{4}\,\frac{m}{s}$$

۳۷ **۱** با استفاده از معادلهٔ سرعت ـ جابه‌جایی در حرکت با شتاب ثابت می‌توان نوشت:

$$\begin{cases} x_1 = 10\,m \\ v_1 = 10\,\frac{m}{s} \end{cases} , \quad \begin{cases} x_2 = -30\,m \\ v_2 = 30\,\frac{m}{s} \end{cases}$$

$$v_2^2 - v_1^2 = 2a\Delta x \Rightarrow 30^2 - 10^2 = 2a(-30-10)$$

$$\Rightarrow 800 = 2a\times(-40) \Rightarrow a = -10\,\frac{m}{s^2}$$

سرعت متحرک در مکان $x_3 = -5\,m$ برابر است با:

$$v_3^2 - v_1^2 = 2a(x_3 - x_1) \Rightarrow v_3^2 - 10^2 = 2\times(-10)\times(-5-10)$$

$$\Rightarrow v_3^2 - 100 = 300 \Rightarrow v_3^2 = 400 \Rightarrow |v_3| = 20\,\frac{m}{s}$$

۳۸ **۲** حرکت متحرک با شتاب ثابت است. بنابراین معادلهٔ مکان ـ زمان آن برابر است با:

$$x = \frac{1}{2}at^2 + v_0 t + x_0 \xrightarrow[v_0 = 2\,\frac{m}{s}]{x_0 = -20\,m} x = \frac{1}{2}at^2 + 2t - 20$$

بردار مکان متحرک در لحظهٔ $t = 4s$ تغییر جهت می‌دهد، بنابراین متحرک در لحظهٔ $t = 4s$ از مبدأ مکان عبور می‌کند و می‌توان نوشت:

$$x = \frac{1}{2}at^2 + 2t - 20 \xrightarrow[x=0]{t=4s} 0 = 8a + 8 - 20 \Rightarrow a = 2\,\frac{m}{s^2}$$

در ادامه کافی است لحظاتی را پیدا کنیم که در آن لحظات مکان متحرک برابر با $x = \pm 16\,m$ است. بنابراین:

$$x = \frac{1}{2}at^2 + 2t - 20 \xrightarrow{a = 2\,\frac{m}{s^2}} x = 2t^2 + 2t - 20$$

$$\xrightarrow{x = \pm 16\,m} 2t^2 + 2t - 20 = \pm 16$$

با جایگذاری گزینه‌ها در عبارت فوق، می‌بینیم که لحظهٔ $t = 3s$ در معادله صدق می‌کند و پاسخ این سؤال گزینهٔ (۲) است.

۳۹ **۴** تنها عبارت «د» نادرست است.

بررسی عبارت‌ها:

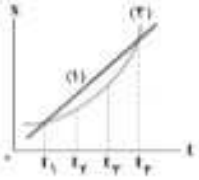
الف) با توجه به نمودار مکان ـ زمان داده‌شده، این دو نمودار در لحظات t_1 و t_2 یک‌دیگر را قطع می‌کنند، بنابراین در این دو لحظه، هر دو خودرو در یک مکان قرار دارند و از کنار هم می‌گذرند.

ب) همان‌طور که می‌دانیم، شیب خط مماس بر نمودار مکان ـ زمان در هر لحظه، برابر با سرعت متحرک در آن لحظه می‌باشد. با توجه به نمودار داده‌شده، شیب خط مماس بر هر دو نمودار در لحظهٔ t_2 تقریباً با هم یکسان بوده و در نتیجه سرعت این دو خودرو در لحظهٔ t_2 می‌تواند با هم برابر شود.

ج) جابه‌جایی هر دو خودرو در بازهٔ زمانی t_1 تا t_2 با هم برابر است، بنابراین سرعت متوسط این دو خودرو در این بازهٔ زمانی با هم برابر می‌باشد.

$$v_{av} = \frac{\Delta x}{\Delta t} \xrightarrow{\Delta x \text{ و } \Delta t \text{ یکسان است}} v_{av} \text{ یکسان می‌باشد.}$$

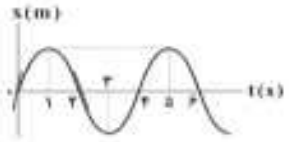
د) خودروی (۱) به صورت یکنواخت حرکت کرده و شتاب متوسط آن در تمامی بازه‌های زمانی صفر است. از طرفی سرعت خودروی (۲)، در زمان‌های t_1 و t_2 با هم برابر نمی‌باشد (چون شیب خط مماس بر نمودار مکان ـ زمان در این دو نقطه یکسان نیست)، بنابراین شتاب متوسط خودروی (۲) مخالف صفر بوده و برابر شتاب متوسط خودروی (۱) نمی‌باشد.



ه) با توجه به تغییر جهت ندادن دو خودرو در بازهٔ زمانی t_1 تا t_2، تندی متوسط این دو خودرو نیز مانند سرعت متوسط آن‌ها در بازهٔ زمانی t_1 تا t_2 با هم برابر است.

بنابراین تنها یک عبارت، از عبارت‌های بیان‌شده نادرست است.

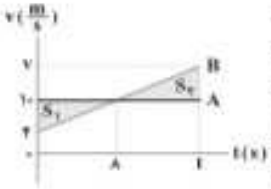
۴۰ **۲** مطابق نمودار مکان ـ زمان زیر، در لحظهٔ $t = 0$، شیب خط مماس بر نمودار، مثبت و در لحظهٔ $t = 2s$، شیب خط مماس بر نمودار، منفی است، بنابراین سرعت متحرک در لحظهٔ $t = 0$، مثبت و در لحظهٔ $t = 2s$، منفی است، بنابراین شتاب متوسط در ۲ ثانیهٔ اول برابر است با:



$$a_{av} = \frac{\overset{\text{منفی}}{v_2} - \overset{\text{مثبت}}{v_1}}{\underset{\text{مثبت}}{\Delta t}} \Rightarrow a_{av} < 0 \quad \text{شتاب متوسط در ۲ ثانیهٔ اول}$$

بنابراین شتاب متوسط در ۲ ثانیهٔ اول منفی بوده و در نتیجه بردار آن در خلاف جهت محور x است. با روشی مشابه می‌توانید نشان دهید که شتاب متوسط در سایر گزینه‌ها منفی نیست.

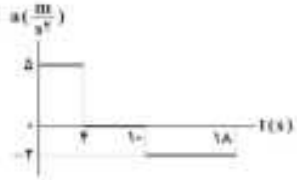
۴۱ ۴ می‌دانیم مساحت زیر نمودار سرعت ـ زمان برابر با جابه‌جایی متحرک است، بنابراین برای آن‌که دو متحرک به هم برسند، کافی است لحظه‌ای را پیدا کنیم که مساحت مثلث‌های S_1 و S_2 یکسان باشد، بنابراین:



$$S_1 = S_2 \Rightarrow \begin{cases} ۸ = t - ۸ \Rightarrow t = ۱۶s \\ ۱۰ - ۴ = v - ۱۰ \Rightarrow v = ۱۶\frac{m}{s} \end{cases}$$

بنابراین دو متحرک در پایان ثانیهٔ **شانزدهم** به هم می‌رسند و تندی متحرک B در این لحظه برابر با ۱۶ متر بر ثانیه است.

۴۲ ۳ متحرک از مکان $x_0 = -۶۰m$ شروع به حرکت کرده است و برای آن‌که بردار مکان آن تغییر جهت دهد، متحرک باید ۶۰ متر در جهت محور x حرکت کند، بنابراین در ادامه هر مرحله از حرکت را بررسی می‌کنیم.



در بازهٔ زمانی $۰ \le t \le ۴s$، شتاب حرکت برابر $۵\frac{m}{s^2}$ است، بنابراین جابه‌جایی متحرک در این بازه برابر است با:

$$\Delta x = \frac{1}{2}at^2 + \cancel{v_0 t} = \frac{1}{2} \times ۵ \times ۴^2 = ۴۰m$$

بنابراین متحرک در لحظهٔ $t = ۴s$ به مکان $x = -۲۰m$ می‌رسد. دقت کنید سرعت متحرک در این لحظه برابر است با:

$$v = at + v_0 \Rightarrow v = ۴ \times ۵ = ۲۰\frac{m}{s}$$

در بازهٔ زمانی $۴s \le t \le ۱۰s$، شتاب حرکت صفر است و متحرک با سرعت ثابت $۲۰\frac{m}{s}$ حرکت می‌کند و باید ۲۰ متر جلو برود تا به مبدأ مکان برسد. بنابراین داریم: $\Delta x = v\Delta t \Rightarrow ۲۰ = ۲۰\Delta t \Rightarrow \Delta t = ۱s$

بنابراین متحرک یک ثانیه پس از لحظهٔ $t = ۴s$، یعنی در لحظهٔ $t = ۵s$ به مبدأ مکان می‌رسد و بردار مکان آن تغییر جهت می‌دهد.

برای تمرین بیشتر سعی کنید این سؤال را با کمک نمودار سرعت ـ زمان هم بررسی و حل کنید.

۴۳ ۲ **گام اول:** اتومبیل قبل از ترمز گرفتن به مدت ۰/۵s با تندی ثابت $۷۲\frac{km}{h}$ (معادل $۲۰\frac{m}{s}$) حرکت می‌کند، بنابراین داریم:

$\Delta x_1 = v\Delta t = ۲۰ \times ۰/۵ = ۱۰m$: مسافت طی‌شده با سرعت ثابت

گام دوم: فاصلهٔ متحرک تا مانع ابتدا ۱۲۰ متر است. قبل از ترمز گرفتن، متحرک ۱۰ متر به مانع نزدیک شده است و به فاصلهٔ ۱۱۰ متری آن رسیده است. با توجه به آن‌که متحرک در فاصلهٔ ۱۰ متری مانع متوقف شده است، می‌توان گفت ۱۰۰ متر در حال ترمز بوده و حرکت آن به صورت کندشونده بوده است و داریم:

$$\Delta x_{ترمز} = \frac{v_0^2}{|2a|} \Rightarrow ۱۰۰ = \frac{۲۰^2}{|2a|} \Rightarrow |a| = 2\frac{m}{s^2}$$

گام سوم: برای محاسبهٔ مدت‌زمان ترمز می‌توان نوشت:

$$\Delta t_{ترمز} = \frac{v_0}{|a|} = \frac{۲۰}{2} = ۱۰s$$

۴۴ ۳ در نمودار گزینهٔ (۳)، نمودار سرعت ـ زمان به تدریج از محور افقی فاصله می‌گیرد و در نتیجه اندازهٔ سرعت در حال افزایش است، بنابراین در نمودار گزینهٔ (۳) حرکت همواره تندشونده است.

بررسی سایر گزینه‌ها:

۱) حرکت، ابتدا تندشونده، سپس کندشونده و سپس تندشونده است.

۲) حرکت، ابتدا تندشونده، سپس کندشونده و سپس تندشونده است.

۴) حرکت، ابتدا کندشونده و سپس تندشونده است.

۴۵ ۱ با استفاده از معادلهٔ سرعت ـ جابه‌جایی در حرکت با شتاب ثابت، تندی حرکت را در مکان $x = ۱۲m$ به دست می‌آوریم:

$$\begin{cases} x_1 = ۱۲m \ , \ v_1 = ? \\ x_2 = ۲۵m \ , \ v_2 = ۱۴\frac{m}{s} \end{cases} \Rightarrow v_2^2 - v_1^2 = 2a\Delta x$$

$$\Rightarrow ۱۴^2 - v_1^2 = ۲ \times ۲ \times (۲۵ - ۱۲) \Rightarrow ۱۹۶ - v_1^2 = ۵۲ \Rightarrow v_1^2 = ۱۴۴$$

$$\Rightarrow |v_1| = ۱۲\frac{m}{s}$$

در ادامه بین مکان‌های $x = ۰$ و $x = ۱۲m$ از معادلهٔ سرعت ـ جابه‌جایی در حرکت با شتاب ثابت استفاده می‌کنیم، بنابراین:

$$\begin{cases} x_0 = ۰ \ , \ v_0 = ? \\ x_1 = ۱۲m \ , \ v_1 = ۱۲\frac{m}{s} \end{cases} \Rightarrow v_1^2 - v_0^2 = 2a\Delta x$$

$$\Rightarrow ۱۲^2 - v_0^2 = ۲ \times ۶ \times ۱۲ \Rightarrow ۱۴۴ - v_0^2 = ۱۴۴ \Rightarrow v_0 = ۰$$

www.mapedu.ir

۴۶ **۲** فرض می‌کنیم کل زمان سفر برابر t ساعت باشد. بنابراین با توجه به این‌که دوچرخه‌سوار، ۲ ساعت توقف کرده است، مدت $t-2$ ساعت را با تندی $40\frac{km}{h}$ حرکت کرده است. با توجه به این توضیحات می‌توان نوشت:

$$\begin{cases} \text{مسافت}: l = 40(t-2) \\ \text{زمان کل}: t \end{cases} \Rightarrow s_{av} = \frac{l}{t} = \frac{40(t-2)}{t}$$

$$\xrightarrow{s_{av} = 32\frac{km}{h}} 32 = \frac{40(t-2)}{t} \Rightarrow 32t = 40t - 80 \Rightarrow t = 10h$$

بنابراین فاصلهٔ بین دو شهر برابر است با:

$$l = 40(t-2) = 40(10-2) = 320km$$

۴۷ **۴** چون سرعت دو متحرک در ابتدا و انتهای بازه یکسان است، شتاب متوسط آن‌ها برابر است.

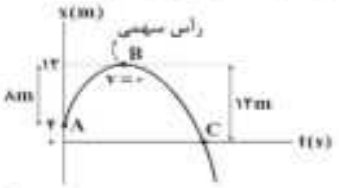
$$a_{av} = \frac{\Delta v}{\Delta t} \xrightarrow[\Delta t_A = \Delta t_B]{\Delta v_A = \Delta v_B} a_A = a_B$$

چون مساحت زیر نمودار متحرک A در بازهٔ زمانی t_1 تا t_2 بزرگ‌تر از مساحت زیر نمودار متحرک B است، جابه‌جایی و مسافت طی‌شده توسط متحرک A هم بیشتر از متحرک B است و در نتیجه تندی متوسط و سرعت متوسط متحرک A بزرگ‌تر از متحرک B است.

$$s_A > s_B \text{ ، } v_A > v_B$$

۴۸ **۲** مطابق نمودار زیر، یک بار بین نقاط A و B و بار دیگر بین نقاط B و C از معادلهٔ سرعت ـ جابه‌جایی در حرکت با شتاب ثابت استفاده می‌کنیم.

دقت کنید: در نقطهٔ B در رأس سهمی، سرعت حرکت برابر صفر است.



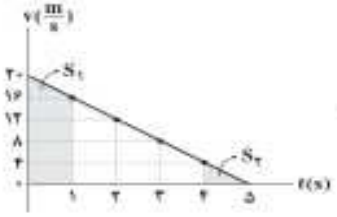
$$\begin{cases} v_B^2 - v_A^2 = 2a(x_B - x_A) \Rightarrow 0 - v_A^2 = 2a \times (-8) \Rightarrow v_A^2 = -16a \\ v_C^2 - v_B^2 = 2a(x_C - x_B) \Rightarrow v_C^2 - 0 = 2a \times (-12) \Rightarrow v_C^2 = -24a \end{cases}$$

$$\xrightarrow{\text{تقسیم رابطه‌های بالا}} \frac{v_A^2}{v_C^2} = \frac{-16a}{-24a} = \frac{2}{3} \Rightarrow \left|\frac{v_A}{v_C}\right| = \sqrt{\frac{2}{3}}$$

۴۹ **۱** **گام اول:** محاسبهٔ شتاب حرکت:

$$\begin{cases} v_0 = 72\frac{km}{h} = 20\frac{m}{s} \\ t = 5s \end{cases} \Rightarrow a = \frac{0-20}{5} = -4\frac{m}{s^2}$$

گام دوم: رسم نمودار سرعت ـ زمان



$$v = at + v_0 \Rightarrow v = -4t + 20$$

گام سوم: جابه‌جایی در ثانیه‌های اول و آخر حرکت به ترتیب برابر S_1 و S_2 است. بنابراین داریم:

$$\begin{cases} \Delta x_1 = S_1 = \frac{20+16}{2} \times 1 = 18m \\ \Delta x_2 = S_2 = \frac{4 \times 1}{2} = 2m \end{cases} \Rightarrow \Delta x_1 - \Delta x_2 = 18 - 2 = 16m$$

دقت کنید: مسافت طی‌شده و جابه‌جایی برای این متحرک هم‌اندازه هستند، زیرا متحرک تغییر جهت نداده است.

۵۰ **۲** جابه‌جایی‌های نشان داده‌شده، تشکیل یک تصاعد حسابی با قدرنسبت ۶ را داده‌اند. بنابراین حرکت با شتاب ثابت است و تنها گزینهٔ (۲) می‌تواند صحیح باشد. دقت شود که در حرکت با شتاب ثابت، جابه‌جایی‌های متحرک در T ثانیه‌های متوالی، تشکیل یک تصاعد حسابی با قدرنسبت aT^2 می‌دهند.

۵۱ **۱** سرعت اولیهٔ واگن برابر سرعت قطار یعنی v_0 است. سرعت واگن به تدریج کم می‌شود تا در نهایت پس از t ثانیه به صفر می‌رسد. بنابراین با استفاده از معادلهٔ مستقل از شتاب داریم:

$$\text{جابه‌جایی واگن}: \Delta x_1 = \frac{v_0 + 0}{2} t = \frac{v_0 t}{2}$$

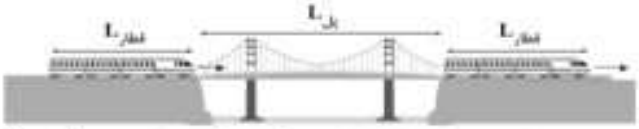
هم‌چنین حرکت قطار با سرعت ثابت v_0 انجام می‌شود، بنابراین جابه‌جایی قطار در همان مدت t ثانیه برابر است با:

$$\text{جابه‌جایی قطار}: \Delta x_2 = v_0 t$$

بنابراین نسبت خواسته‌شده برابر است با:

$$\frac{\Delta x_1}{\Delta x_2} = \frac{\frac{v_0 t}{2}}{v_0 t} = \frac{1}{2}$$

۵۲ **۱** مطابق شکل زیر، برای آن‌که قطار به طور کامل از روی پل عبور کند، باید مسافتی به اندازهٔ مجموع طول قطار و طول پل را طی کند.



$$L_{\text{پل}} + L_{\text{قطار}} = vt_1 \Rightarrow L_{\text{پل}} + L_{\text{قطار}} = 30 \times 20 = 600m \quad (1)$$

همچنین مطابق شکل صفحهٔ قبل، در مدت‌زمانی که قطار به طور کامل روی پل قرار دارد، مسافتی برابر اختلاف طول پل و قطار را می‌پیماید:

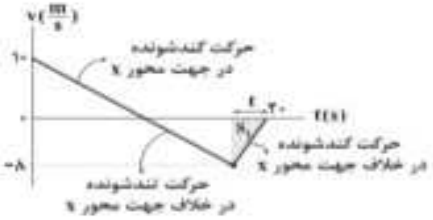
$$L_{پل} - L_{قطار} = vt_2 \Rightarrow L_{پل} - L_{قطار} = 30 \times 8 = 240\,m \quad (2)$$

با جمع کردن دو طرف رابطه‌های (۱) و (۲) داریم:

$$(L_{پل} + L_{قطار}) + (L_{پل} - L_{قطار}) = 600 + 240$$

$$\Rightarrow 2L_{پل} = 840 \Rightarrow L_{پل} = 420\,m$$

۵۳ **۴** در قسمت نشان داده‌شده در نمودار زیر، حرکت متحرک به صورت کندشونده و در خلاف جهت محور x است. برای محاسبهٔ تندی متوسط در این بازه، ابتدا مساحت S_1 را محاسبه می‌کنیم:



$$\text{مسافت}: l = S_1 = \frac{\Delta t}{2} = 4t$$

$$\text{تندی متوسط}: s_{av} = \frac{l}{t} = \frac{4t}{t} = 4\,\frac{m}{s}$$

دقت کنید: نیازی به محاسبهٔ زمان t نداریم.

۵۴ **۳** **گام اول:** ابتدا بین لحظات $t = 4s$ و $t = 7s$ از معادلهٔ مستقل از شتاب برای بررسی حرکت استفاده می‌کنیم.

دقت کنید: در لحظهٔ $t = 4s$ (رأس سهمی)، سرعت حرکت صفر است.

$$\Delta x = \frac{0 + v}{2} \times 3 \Rightarrow 18 = \frac{3v}{2} \Rightarrow v = 12\,\frac{m}{s}$$

بنابراین سرعت متحرک در لحظهٔ $t = 7s$ برابر با $12\,\frac{m}{s}$ است.

گام دوم: سرعت متحرک از لحظهٔ $t = 4s$ تا $t = 7s$ در مدت ۳ ثانیه از صفر به $12\,\frac{m}{s}$ رسیده است، پس شتاب حرکت متحرک برابر است با:

$$a = \frac{\Delta v}{\Delta t} = \frac{12 - 0}{7 - 4} = 4\,\frac{m}{s^2}$$

گام سوم: با توجه به مفهوم شتاب، می‌توانیم سرعت اولیهٔ متحرک را محاسبه کنیم:

$$\begin{cases} t = 4s : v_1 = 0 \\ t = 0 : v_0 = ? \end{cases} \Rightarrow a = \frac{v_1 - v_0}{4} \Rightarrow 4 = \frac{-v_0}{4} \Rightarrow v_0 = -16\,\frac{m}{s}$$

گام چهارم: سرعت متوسط متحرک در ۴ ثانیهٔ اول حرکتش برابر با میانگین سرعت ابتدا و انتهای بازه است.

$$v_{av} = \frac{v_0 + v_1}{2} = \frac{-16 + 0}{2} = -8\,\frac{m}{s}$$

با توجه به این که در ۴ ثانیهٔ اول تغییر جهت نداریم، تندی متوسط هم برابر $8\,\frac{m}{s}$ است.

۵۵ **۲** مسافت توقف هر اتومبیل را محاسبه می‌کنیم:

$$\text{اتومبیل A}: \begin{cases} v_{0A} = \overset{72\,\frac{km}{h}}{\overset{\uparrow}{[20]}}\,\frac{m}{s} \Rightarrow \Delta x_A = \frac{v_{0A}^2}{2|a|} = \frac{400}{10} = 40\,m \\ |a| = 5\,\frac{m}{s^2} \end{cases}$$

$$\text{اتومبیل B}: \begin{cases} v_{0B} = \overset{108\,\frac{km}{h}}{\overset{\uparrow}{[30]}}\,\frac{m}{s} \Rightarrow \Delta x_B = \frac{v_{0B}^2}{2|a|} = \frac{900}{10} = 90\,m \\ |a| = 5\,\frac{m}{s^2} \end{cases}$$

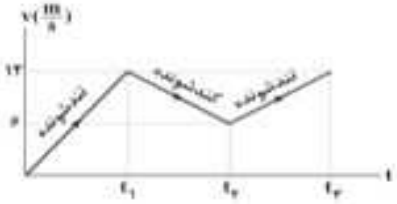
بنابراین دو اتومبیل در مجموع ۱۳۰ متر به هم نزدیک می‌شوند و در فاصلهٔ ۲۰ متری از هم متوقف می‌شوند.

۵۶ **۱** نمودار سرعت ـ زمان حرکت این متحرک پس از محاسبهٔ سرعت در انتهای هر یک از بازه‌های زمانی، به صورت زیر است:

$$\text{ثانیهٔ اول حرکت}: v_{av} = \frac{0 + v_1}{2} = 6 \Rightarrow v_1 = 12\,\frac{m}{s}$$

$$\text{ثانیهٔ دوم حرکت}: v_{av} = \frac{v_1 + v_2}{2} = 9 \xrightarrow{v_1 = 12\,\frac{m}{s}} v_2 = 6\,\frac{m}{s}$$

$$\text{ثانیهٔ سوم حرکت}: v_{av} = \frac{v_2 + v_3}{2} = 9 \xrightarrow{v_2 = 6\,\frac{m}{s}} v_3 = 12\,\frac{m}{s}$$



بنابراین گزینهٔ (۱) صحیح است.

۵۷ **۱** علامت سرعت در لحظهٔ $t = 3s$ تغییر کرده است، بنابراین در لحظهٔ $t = 3s$، سرعت متحرک برابر صفر است.

$$v = at + v_0 \xrightarrow[v=0]{t=3s} 0 = 3a + v_0 \Rightarrow v_0 = -3a$$

علامت مکان متحرک در لحظهٔ $t = 2s$ عوض شده است، بنابراین در لحظهٔ $t = 2s$، مکان متحرک برابر صفر است.

$$x = \frac{1}{2}at^2 + v_0 t + x_0 \xrightarrow[x=0]{x_0 = 4m\,,\ t = 2s} 0 = 2a + 2v_0 + 4$$

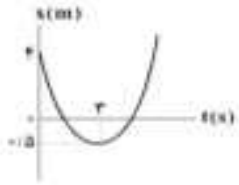
$$\xrightarrow{v_0 = -3a} 0 = 2a + 2(-3a) + 4 \Rightarrow -4a + 4 = 0 \Rightarrow a = 1\,\frac{m}{s^2}$$

بنابراین معادلهٔ مکان ـ زمان این متحرک برابر است با:

$$x=\frac{1}{2}at^2+v_0t+x_0$$

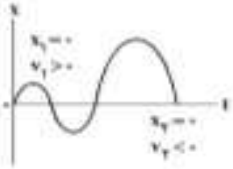
$$\xrightarrow[v_0=-3\frac{m}{s},\ x_0=4m]{a=1\frac{m}{s^2}} x=\frac{1}{2}t^2-3t+4$$

در ادامه با توجه به نمودار مقابل، بیشترین فاصلهٔ متحرک از مبدأ هنگامی که در مکان‌های منفی قرار دارد، برابر $0/5m$ است.



راس سهمی: $t=3s \Rightarrow x=-0/5m$

۵۸ **۲** با توجه به مکان و سرعت لحظه‌ای متحرک در لحظات $t_1=0$ و $t_2=20s$، در مورد سرعت متوسط و شتاب متوسط متحرک می‌توان نوشت:



$$v_{av}=\frac{x_2-x_1}{t_2-t_1}=0$$

$$a_{av}=\frac{v_2-v_1}{t_2-t_1}<0$$

بنابراین گزینهٔ (۲) صحیح است.

۵۹ **۱** سطح زیر نمودار شتاب ـ زمان برابر با تغییرات سرعت متحرک است. اگر سرعت متحرک در لحظهٔ $t=25s$ با سرعت متحرک در لحظهٔ t' یکسان باشد، مجموع مساحت زیر نمودار سرعت ـ زمان در این بازهٔ زمانی صفر است و داریم:

$$\Delta v=|S_1|-|S_2|=0$$

$$\Rightarrow 2\times(10-t')-1\times(25-10)=0 \Rightarrow t'=2/5s$$

۶۰ **۱** معادلهٔ مکان ـ زمان متحرک‌ها را می‌نویسیم:

$$x=vt+x_0 \Rightarrow \begin{cases} x_A=15t \\ x_B=-10t+200 \end{cases}$$

لحظهٔ به هم رسیدن: $x_A=x_B \Rightarrow 15t=-10t+200 \Rightarrow t=8s$

برای آن‌که فاصلهٔ دو متحرک برابر با ۵۰ متر باشد، می‌توان نوشت:

$$|x_A-x_B|=50 \Rightarrow |15t-(-10t+200)|=50$$

$$\Rightarrow |25t-200|=50 \Rightarrow 25t-200=\pm 50 \Rightarrow \begin{cases} t_1=6s \\ t_2=10s \end{cases}$$

بنابراین فاصلهٔ دو متحرک در بازهٔ زمانی $6s<t<10s$ به مدت ۴ ثانیه کم‌تر از ۵۰ متر است، اما از آن‌جا که صورت سؤال بازهٔ زمانی پس از عبور دو متحرک از کنار یک‌دیگر را خواسته است، بازهٔ زمانی $8s<t<10s$ پاسخ سؤال است و گزینهٔ (۱) صحیح می‌باشد.

۶۱ **۲** سرعت متحرک همواره مثبت است، بنابراین متحرک در طی حرکت تغییر جهت نمی‌دهد و همواره در جهت محور x حرکت می‌کند، بنابراین عبارت‌های «الف» و «ج» نادرست هستند و عبارت «ب» درست است.

با توجه به این‌که تندی متحرک در همهٔ لحظات بازهٔ زمانی $6s$ تا $10s$ بزرگ‌تر از تندی حرکت آن در همهٔ لحظات ۲ ثانیهٔ اول حرکت است و متحرک تغییر جهت نمی‌دهد، تندی متوسط متحرک در بازهٔ زمانی $6s$ تا $10s$ حتماً بزرگ‌تر از تندی متوسط متحرک در ۲ ثانیهٔ اول حرکتش است.

۶۲ **۲** در مدت‌زمانی که قطار به طور کامل از روی پل می‌گذرد، جابه‌جایی آن برابر است با:

طول قطار + طول پل = جابه‌جایی

بنابراین برای این دو قطار می‌توان نوشت:

$$\Delta x=v\Delta t \Rightarrow \begin{cases} \text{قطار اول}: \underbrace{x}_{\text{طول پل}}+\underbrace{L}_{\text{طول قطار اول}}=vt \\ \text{قطار دوم}: \underbrace{x}_{\text{طول پل}}+\underbrace{2L}_{\text{طول قطار دوم}}=v(\frac{3}{2}t) \end{cases}$$

$$\xrightarrow[\text{دو رابطه بر هم}]{\text{تقسیم کردن}} \frac{x+L}{x+2L}=\frac{vt}{\frac{3}{2}vt}$$

$$\Rightarrow \frac{x+L}{x+2L}=\frac{2}{3} \Rightarrow 3x+3L=2x+2L \Rightarrow \text{طول پل}: x=L$$

۶۳ **۲** برای آن‌که تندی متوسط و سرعت متوسط متحرک هم‌اندازه باشند، متحرک باید بدون تغییر جهت روی خط راست حرکت کند. با توجه به معادلهٔ $p=2t-5$، علامت p و v در لحظهٔ $t=2/5s$ عوض می‌شود. بنابراین در هر بازهٔ زمانی که شامل لحظهٔ $t=2/5s$ نباشد، سرعت و تندی متوسط هم‌اندازه خواهند بود. در بین گزینه‌های داده‌شده، همهٔ گزینه‌ها به‌جز سه ثانیهٔ دوم ($3s<t<6s$) شامل لحظهٔ تغییر جهت می‌باشند، بنابراین پاسخ این سؤال سه ثانیهٔ دوم حرکت (یعنی گزینهٔ (۲)) می‌باشد.

۶۴ **۳** جابه‌جایی متحرک B در مدت ۶۰ ثانیه را Δx فرض می‌کنیم. پس می‌توان نوشت:

$$\Delta x=\frac{1}{2}at^2 \xrightarrow{t=60s} \Delta x=\frac{1}{2}\times a\times(60)^2 \Rightarrow \Delta x=1800a$$

Δx، معادل جابه‌جایی متحرک A در فاصلهٔ زمانی $t=15s$ تا $t=60s$ است، پس:

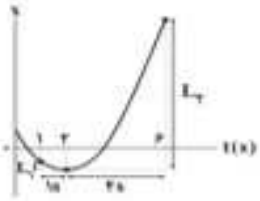
$$v_A=\frac{\Delta x}{\Delta t} \Rightarrow v_A=\frac{1800a}{60-15} \Rightarrow v_A=40a$$

با توجه به این‌که جرم دو متحرک برابر است، برای آن‌که تکانهٔ آن‌ها برابر باشد، کافی است دو جسم سرعت یکسانی داشته باشند و می‌توان نوشت:

$$v_A=v_B \Rightarrow 40a=at+\cancel{v_0} \Rightarrow t=40s$$

۶۵ **۳** در لحظهٔ t_1، تندی جسم (۲)، صفر می‌شود و در نتیجه تکانهٔ آن هم صفر خواهد شد. در حالی‌که در این لحظه، تندی جسم (۱) بزرگ‌تر از صفر است و در نتیجه اندازهٔ تکانهٔ آن هم بیشتر از صفر خواهد شد. بنابراین گزینهٔ (۳) صحیح است.

۶۶ **۳** مطابق شکل زیر، مسافت طی‌شده در بازهٔ زمانی $t=1s$ تا $t=2s$ و $t=2s$ تا $t=6s$ را به ترتیب L_1 و L_2 می‌نامیم. با توجه به این‌که سرعت متحرک در لحظهٔ $t=2s$ (رأس سهمی)، صفر است، برای محاسبهٔ L_1 و L_2 می‌توانیم از رابطهٔ $\Delta x=\frac{1}{2}at^2$ استفاده کنیم.



$$L_1=\frac{1}{2}at^2=\frac{1}{2}a\times 1^2=\frac{1}{2}a$$

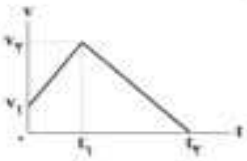
$$L_2=\frac{1}{2}at^2=\frac{1}{2}a\times 4^2=8a$$

در بازهٔ زمانی $t=1s$ تا $t=6s$، جابه‌جایی متحرک برابر با L_2-L_1 است و مسافت طی‌شده برابر با L_2+L_1 می‌باشد. بنابراین داریم:

$$\frac{s_{av}}{v_{av}}=\frac{\text{مسافت}}{\text{جابه‌جایی}}=\frac{L_2+L_1}{L_2-L_1}\Rightarrow\frac{s_{av}}{6}=\frac{8a+\frac{1}{2}a}{8a-\frac{1}{2}a}=\frac{17}{15}$$

$$\Rightarrow s_{av}=6/8\frac{m}{s}$$

۶۷ **۲** فرض می‌کنیم سرعت متحرک در لحظات $t=0$ و $t=t_1$ به ترتیب v_1 و v_2 باشد. در این صورت می‌توان نوشت:



بازهٔ زمانی $t=0$ تا $t=t_1$:
$$\begin{cases} v_{av}=\frac{v_1+v_2}{2} \\ a_{av}=\frac{v_2-v_1}{t_1} \end{cases}$$

بازهٔ زمانی $t=t_1$ تا $t=t_2$:
$$\begin{cases} v'_{av}=\frac{v_2}{2} \\ a'_{av}=\frac{-v_2}{t_2-t_1} \end{cases}$$

طبق اطلاعات سؤال داریم:

$$v_{av}=\frac{150}{100}v'_{av}=\frac{3}{2}v'_{av}\Rightarrow\frac{v_1+v_2}{2}=\frac{3}{2}\times\frac{v_2}{2}\Rightarrow v_2=2v_1$$

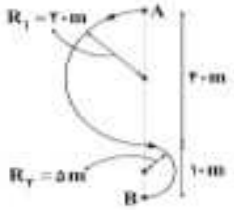
در ادامه با توجه به این‌که شتاب متوسط در دو بازهٔ زمانی، هم‌اندازه است، داریم:

$$|a_{av}|=|a'_{av}|\Rightarrow\frac{v_2-v_1}{t_1}=\frac{v_2}{t_2-t_1}$$

$$\xrightarrow{v_2=2v_1}\frac{2v_1-v_1}{t_1}=\frac{2v_1}{t_2-t_1}\Rightarrow\frac{1}{t_1}=\frac{2}{t_2-t_1}\Rightarrow t_2-t_1=2t_1$$

$$\Rightarrow t_2=3t_1\Rightarrow\frac{t_2}{t_1}=3$$

۶۸ **۱** طول پاره‌خطی که به صورت مستقیم A را به B وصل می‌کند، برابر با جابه‌جایی دوچرخه‌سوار است و مجموع طول دو نیم‌دایره برابر با مسافت طی‌شده می‌باشد. بنابراین:



اندازهٔ جابه‌جایی: $d=20+10=50m$

مسافت: $l=\pi R_1+\pi R_2\Rightarrow l=25\pi(m)$

بنابراین نسبت اندازهٔ سرعت متوسط به تندی متوسط برابر است با:

$$\frac{v_{av}}{s_{av}}=\frac{d}{l}=\frac{50}{25\pi}=\frac{2}{\pi}$$

۶۹ **۴** با توجه به این‌که در ۲ ثانیهٔ سوم حرکت ($4s<t<6s$)، سرعت متوسط متحرک صفر شده است، می‌توان فهمید که نمودار مکان ـ زمان به شکل یک سهمی است که رأس آن در لحظهٔ $t=5s$ قرار دارد. بنابراین نمودار مکان ـ زمان متحرک می‌تواند به شکل زیر باشد:

بررسی گزینه‌ها:

۱) مکان متحرک در لحظات $t=3s$ و $t=7s$ یکسان است، پس سرعت متوسط متحرک در بازهٔ زمانی $3s<t<7s$ برابر صفر خواهد بود.

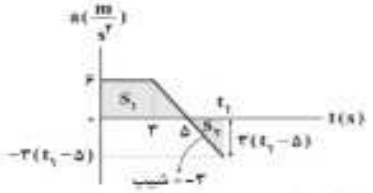
۲) مسافت طی‌شده در ۲ ثانیهٔ دوم ($2s<t<4s$) و ۲ ثانیهٔ چهارم ($6s<t<8s$) برابر است، پس تندی متوسط متحرک هم در این دو بازه یکسان خواهد بود.

۳) در ۳ ثانیهٔ اول حرکت، متحرک تغییر جهت نمی‌دهد، بنابراین جابه‌جایی و مسافت طی‌شده، هم‌اندازه هستند.

۴) با توجه به تقارن سهمی حول رأس آن در لحظهٔ $t=5s$، می‌توان فهمید که تندی حرکت در لحظات $t=6s$ و $t=4s$ با هم برابر است.

www.mapedu.ir

۷۰ **۳** اگر شتاب متوسط متحرک در t_1 ثانیهٔ ابتدایی، صفر باشد، می‌توان نتیجه گرفت که در این بازه Δv برابر صفر است و در نتیجه مساحت زیر نمودار شتاب ـ زمان در t_1 ثانیهٔ اول، صفر می‌باشد. با توجه به این توضیحات می‌توان نوشت:

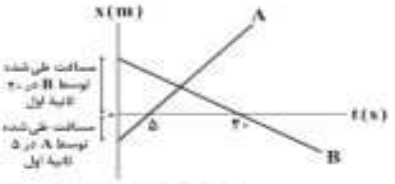


$$S_1 - S_2 = 0 \Rightarrow \frac{3+5}{2}\times 6 - \frac{3\times(t_1-5)\times(t_1-5)}{2} = 0$$

$$\Rightarrow 3\times(t_1-5)^2 = 48 \Rightarrow (t_1-5)^2 = 16 \Rightarrow t_1 = 9s$$

بنابراین $\frac{t_1}{3}$ ثانیهٔ ابتدایی حرکت، همان ۳ ثانیهٔ ابتدایی حرکت است و چون در ۳ ثانیهٔ ابتدایی حرکت، شتاب متحرک ثابت و برابر $6\frac{m}{s^2}$ است، شتاب متوسط متحرک هم برابر $6\frac{m}{s^2}$ می‌باشد.

۷۱ **۲** ابتدا با توجه به نمودار داده‌شده می‌توان فهمید که مسافت طی‌شده توسط متحرک A در ۵ ثانیهٔ اول به اضافهٔ مسافت طی‌شده توسط متحرک B در ۲۰ ثانیهٔ اول، برابر با فاصلهٔ اولیهٔ دو متحرک، یعنی ۲۲۰ متر است. بنابراین می‌توان نوشت:



$$v_A \times 5 + |v_B| \times 20 = 220$$

$$\xrightarrow{v_A = \frac{150}{100}|v_B| = \frac{3}{2}|v_B|} \frac{3}{2}|v_B|\times 5 + 20|v_B| = 220$$

$$\Rightarrow 27/5|v_B| = 220 \Rightarrow |v_B| = 8\frac{m}{s} \Rightarrow v_B = -8\frac{m}{s}$$

$$\Rightarrow v_A = \frac{3}{2}|v_B| = 12\frac{m}{s}$$

در ادامه برای محاسبهٔ فاصله می‌توان نوشت:

$$\begin{cases} x_A = v_A t + x_{0A} \\ x_B = v_B t + x_{0B} \end{cases}$$

$$\Rightarrow \text{فاصله}: |x_A - x_B| = |(v_A - v_B)\times t + (x_{0A} - x_{0B})|$$

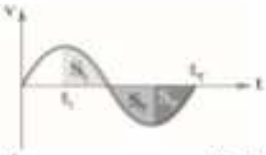
$$\Rightarrow |x_A - x_B| = |(12-(-8))\times t - 220| = |20t - 220|$$

بنابراین لحظه‌ای که فاصله به ۲۴۰ متر می‌رسد، داریم:

$$|20t - 220| = 240 \Rightarrow 20t - 220 = \pm 240 \Rightarrow \begin{cases} t = -1s & (\times) \\ t = 23s & (\checkmark) \end{cases}$$

بنابراین در پایان ثانیهٔ بیست و سوم، یعنی لحظهٔ $t = 23s$، فاصلهٔ دو متحرک از یک‌دیگر برابر ۲۴۰ متر می‌شود.

۷۲ **۴** با توجه به سینوسی بودن نمودار، مساحت‌های S_1، S_2 و S_3 با هم برابر هستند.



$$\begin{cases} \Delta x = S_1 - S_2 - S_3 \xrightarrow{S_1 = S_2 = S_3 = S} S - S - S = -S \\ l = S_1 + S_2 + S_3 = 3S \end{cases}$$

بنابراین:

$$\frac{\Delta x}{l} = \frac{-S}{3S} = -\frac{1}{3}$$

۷۳ **۴** می‌دانیم در نمودار $x-t$، شیب خط قاطع میان دو نقطه از نمودار، بیانگر سرعت متوسط بازهٔ زمانی نظیر آن دو نقطه است. بنابراین چون شیب خط‌های AB و BC یکی است، سرعت متوسط نیز در بازه‌های زمانی نظیر این پاره‌خط‌ها یکی است و در نتیجه برای دو بازهٔ زمانی Δt_1 و Δt_2 میزان سرعت متوسط با هم برابر است.

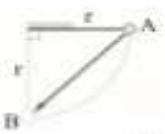
۷۴ **۴** مسافت طی‌شده توسط متحرک از نقطهٔ A تا نقطهٔ B برابر $\frac{1}{4}$ محیط دایره است.

بنابراین داریم:

$$\text{مسافت طی‌شده} = \frac{1}{4}(\text{محیط دایره}) \Rightarrow l = \frac{1}{4}(2\pi r)$$

$$\Rightarrow \frac{75}{100} = \frac{3(r)}{2} \Rightarrow r = \frac{1}{2}m$$

در ادامه، جابه‌جایی متحرک را که برابر فاصلهٔ نقطهٔ A از نقطهٔ B است، به صورت زیر به دست می‌آوریم:



$$\text{اندازهٔ جابه‌جایی} = \sqrt{r^2 + r^2} = r\sqrt{2}$$

$$\xrightarrow{r = \frac{1}{2}m} \text{اندازهٔ جابه‌جایی} = \frac{\sqrt{2}}{2}m$$

۷۵ **۳** ابتدا زمان‌های رفت و برگشت را به دست می‌آوریم:

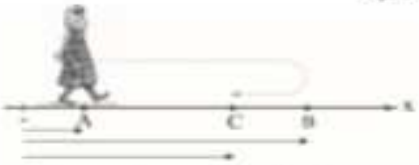
$$t_{\text{رفت}} = \frac{\Delta x_{\text{رفت}}}{v_{\text{رفت}}} = \frac{AB}{240} \quad , \quad t_{\text{برگشت}} = \frac{\Delta x_{\text{برگشت}}}{v_{\text{برگشت}}} = \frac{\frac{1}{4}AB}{180}$$

حال با استفاده از رابطهٔ سرعت متوسط می‌توان نوشت:

$$v_{av} = \frac{\Delta x}{\Delta t} = \frac{AB - \frac{1}{4}AB}{\frac{AB}{240} + \frac{\frac{1}{4}AB}{180}} = \frac{\frac{3}{4}AB}{\frac{AB}{180}} = \frac{3\times 180}{4} = 135\frac{km}{h}$$

www.mapedu.ir

۷۶ **۳** در شکل زیر، بردار مکان متحرک در چند نقطهٔ متفاوت رسم شده است. به این شکل دقت کنید.



همان‌طور که در این شکل می‌بینید بردار مکان همواره در جهت محور x است و جهت آن تغییر نمی‌کند و اندازهٔ آن ابتدا افزایش و سپس کاهش می‌یابد. بنابراین عبارت‌های (الف) و (ب) نادرست بوده و عبارت (ج) درست است. از طرف دیگر بردار جابه‌جایی از A به C بوده و در جهت محور x است و عبارت (د) نیز درست است.

۷۷ **۱** با توجه به صورت سؤال، بعد از گذشت ۶s برای اولین بار سرعت متوسط متحرک، صفر شده است. طبق رابطهٔ $v_{av}=\frac{\Delta x}{\Delta t}$، جابه‌جایی متحرک بعد از گذشت ۶s برای اولین بار صفر می‌شود. بنابراین متحرک در مدت‌زمان ۶s یک دور کامل می‌چرخد و از آن‌جایی که حرکت متحرک با تندی ثابت انجام می‌شود، می‌توانیم نتیجه بگیریم که در مدت ۳ ثانیه متحرک مسیری به اندازهٔ یک نیم‌دایره را طی می‌کند و داریم:

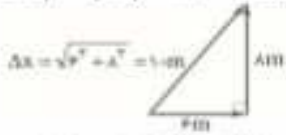
$$s_{av}=\frac{l}{\Delta t}=\frac{\text{محیط دایره}}{\Delta t}$$

$$\Rightarrow s_{av}=\frac{2\pi r}{\Delta t}=\frac{\pi r}{\Delta t}=\frac{3\times 2}{3}=2\frac{m}{s}$$

۷۸ **۲** ابتدا جابه‌جایی پرنده در هر بازهٔ زمانی و سپس جابه‌جایی کل را محاسبه می‌کنیم:

به طرف شرق $\Delta x_1=v_1\Delta t_1=3\times 2=6m$

به طرف شمال $\Delta x_2=v_2\Delta t_2=1\times 8=8m$



برای محاسبهٔ اختلاف اندازهٔ سرعت متوسط و تندی متوسط خواهیم داشت:

$$\begin{cases}|v_{av}|=\frac{|\Delta x|}{\Delta t}=\frac{10}{8+2}=1\frac{m}{s}\\ s_{av}=\frac{l}{\Delta t}=\frac{6+8}{8+2}=1/4\frac{m}{s}\end{cases}$$

$$\Rightarrow s_{av}-|v_{av}|=1/4-1=0/4\frac{m}{s}$$

۷۹ **۳** ابتدا لحظه‌ای که متحرک کم‌ترین فاصله از مبدأ را دارد و مکان آن در این لحظه را تعیین می‌کنیم:

$$x=t^2-6t+13=(t^2-6t+9)+4=(t-3)^2+4$$

$$\xrightarrow{x_{min}} t=3s\ ,\ x_{min}=4m$$

برای محاسبهٔ سرعت متوسط خواهیم داشت:

$$t=3s\ \text{و}\ t=0\Rightarrow v_{av}=\frac{\Delta x}{\Delta t}=\frac{x(3)-x(0)}{3-0}=\frac{4-13}{3}=-3\frac{m}{s}$$

۸۰ **۴** تغییر جهت متحرک هنگامی رخ می‌دهد که سرعت متحرک صفر شده و علامت سرعت عوض شود. در حالی‌که در نمودار صورت سؤال، شیب همواره مثبت است، بنابراین در بازهٔ زمانی داده‌شده متحرک تغییر جهت نمی‌دهد.

۸۱ **۲** دو ثانیهٔ سوم حرکت، یعنی از لحظهٔ $t_1=4s$ تا لحظهٔ $t_2=6s$، در نتیجه برای محاسبهٔ سرعت متوسط متحرک در این بازهٔ زمانی داریم:

$$\begin{cases}x_1=2(4)^2-6(4)-4=4m\\ x_2=2(6)^2-6(6)-4=32m\end{cases}$$

$$\Rightarrow v_{av}=\frac{x_2-x_1}{t_2-t_1}=\frac{32-4}{6-4}=14\frac{m}{s}$$

سه ثانیهٔ دوم حرکت، یعنی از لحظهٔ $t'_1=3s$ تا لحظهٔ $t'_2=6s$، در نتیجه داریم:

$$\begin{cases}x'_1=2(3)^2-6(3)-4=-4m\\ x'_2=32m\end{cases}$$

$$\Rightarrow v'_{av}=\frac{x'_2-x'_1}{t'_2-t'_1}=\frac{32-(-4)}{6-3}=12\frac{m}{s}$$

بنابراین:

$$\frac{v_{av}}{v'_{av}}=\frac{14}{12}=\frac{7}{6}$$

۸۲ **۳** شتاب متوسط از رابطهٔ $a_{av}=\frac{\Delta v}{\Delta t}$ محاسبه می‌شود؛ بنابراین در هر بازهٔ زمانی که Δv برابر صفر باشد، (سرعت اولیه و نهایی برابر باشند) شتاب متوسط صفر است. نمودار صورت سؤال یک نمودار مکان ـ زمان است و می‌دانیم در نمودار مکان ـ زمان شیب خط مماس بر نمودار در هر لحظه معرف اندازهٔ سرعت حرکت متحرک در آن لحظه است؛ با توجه به گزینه‌ها، تنها گزینه‌ای که در آن سرعت اولیه و نهایی (شیب نمودار در ابتدا و انتهای بازه) می‌توان گفت تقریباً با هم برابر هستند، گزینهٔ (۳) است. پس در این بازه شتاب متوسط صفر خواهد بود.

۸۳ **۲** متحرک از مکان $x=4m$ شروع به حرکت کرده و در مکان $x=-2m$ حرکت آن به پایان رسیده است. پس جابه‌جایی آن برابر $-6m$ است. برای محاسبه مسافت طی‌شده داریم:

$$l=1+2+8+1=12m$$

بنابراین:

$$\frac{l}{|\Delta x|}=\frac{12}{6}=2$$

۸۴ **۲** اگر طول مسیر بین دو نقطه را x فرض کنیم، داریم:

$$v_{av}=\frac{l_{\text{کل}}}{\Delta t_{\text{کل}}}=\frac{x+x+x+x}{\frac{x}{36}+\frac{x}{18}+\frac{x}{12}+\frac{x}{12}}=\frac{4x}{\frac{9x}{36}}=16\frac{km}{h}$$

www.mapedu.ir

۸۵ **۴** به شکل زیر دقت کنید. برای این‌که جابه‌جایی حداکثر شود، متحرک باید به نقطهٔ مقابل نقطهٔ شروع حرکت برسد.

برای رسیدن به نقطهٔ B، متحرک باید نصف محیط را طی کند یا بعد از رسیدن به نقطهٔ B، یک دور کامل دیگر بچرخد، پس مسافت طی‌شده باید مضرب فردی از نصف محیط باشد.

$l = st = 6t \ (I)$

$l = (2n-1)(\frac{1}{2} \times 2\pi R) \Rightarrow l = (2n-1)(3 \times 9) = (2n-1)27$

$\xrightarrow{(I)} 6t = (2n-1)27$

$n = 1 \Rightarrow t = \frac{27}{6} = 4/5s$

$n = 2 \Rightarrow t = \frac{3 \times 27}{6} = 13/5s$

$n = 3 \Rightarrow t = \frac{5 \times 27}{6} = 22/5s$

۸۶ **۴** **روش اول:** با استفاده از رابطهٔ $t_{\text{رأس سهمی}} = \frac{-b}{2a}$، رأس سهمی را به دست می‌آوریم:

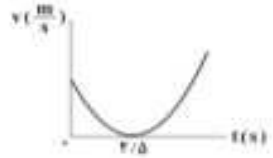
$$\begin{cases} v = 2t^2 - 10t + 12/5 \\ t_{\text{رأس سهمی}} = \frac{-b}{2a} \end{cases} \Rightarrow t_{\text{رأس سهمی}} = \frac{-(-10)}{2 \times 2} \Rightarrow t_{\text{رأس سهمی}} = 2/5s$$

چون ضریب t^2 عددی مثبت است، نتیجه می‌گیریم که دهانهٔ سهمی رو به بالاست، برای یافتن v در رأس سهمی هم $t_{\text{رأس سهمی}}$ را درون معادلهٔ سرعت ـ زمان قرار می‌دهیم:

$v(t_{\text{رأس سهمی}}) = v(t_{2/5}) = 2(2/5)^2 - 10(2/5) + 12/5$

$\Rightarrow v(t = 2/5) = 0$

با رسم سهمی از رأس $\left|\begin{matrix} 2/5 \\ 0 \end{matrix}\right.$ داریم:



با توجه به این‌که در تمام زمان‌ها علامت سرعت مثبت بوده است، متحرک تغییر جهت نداده است.

روش دوم: $t = 2/5s$ ریشهٔ مضاعف معادلهٔ سرعت ـ زمان است و این یعنی علامت سرعت متحرک هرگز تغییر نمی‌کند و این متحرک هیچ‌گاه تغییر جهت نمی‌دهد.

۸۷ **۴** توجه کنید که معادلهٔ مکان ـ زمان به شکل مربع کامل است و علامت بردار مکان هرگز تغییر نمی‌کند.

$x = t^2 - 6t + 9 = (t-3)^2 \geq 0$

۸۸ **۴** وقتی سرعت متوسط متحرکی در یک جابه‌جایی برابر v است، سرعت آن حداقل یک‌بار در این جابه‌جایی باید v شود.

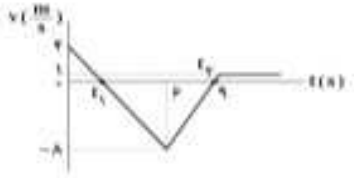
بررسی سایر گزینه‌ها:

۱) شاید اتومبیل در بین راه، توقف کرده باشد، چون نه از فاصلهٔ بین دو شهر اطلاعاتی داریم و نه از زمان حرکت، پس در این‌باره قطعی نمی‌توان چیزی گفت.

۲) اگر مسیر کاملاً مستقیم باشد و تغییر جهت ندهد، بیشترین تندی متوسط آن برابر $10 \frac{km}{h}$ می‌شود.

۳) در رابطه با زمان اطلاعاتی نداریم، پس فاصلهٔ دو شهر مشخص نیست.

۸۹ **۲** هنگامی تندی متوسط با سرعت متوسط برابر است که متحرک تغییر جهت ندهد. پس با استفاده از نمودار سرعت ـ زمان آن می‌توان زمان‌ها را به دست آورد:



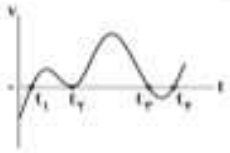
شتاب در مرحلهٔ اول: $a_1 = \frac{0-4}{t_1} = -2 \Rightarrow t_1 = 2s$

$t = 6s \Rightarrow v = -2 \times 6 + 4 = -8 \frac{m}{s}$

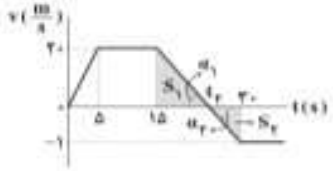
$a_2 = \frac{0-(-8)}{t_2 - 6} = 3 \Rightarrow t_2 - 6 = \frac{8}{3} \Rightarrow t_2 = \frac{26}{3} = 8/6s$

پس بین دو لحظهٔ t_1 و t_2 تندی متوسط با سرعت متوسط برابر است.

۹۰ **۳** جهت حرکت در لحظات t_1، t_2 و t_3 عوض می‌شود، اما در هر ۴ لحظه t_1، t_2، t_3 و t_4 متحرک متوقف می‌شود.



۹۱ **۳** شیب نمودار سرعت ـ زمان نمایشگر شتاب است و در بازهٔ زمانی ۱۵ تا ۳۰ ثانیه شیب خط منفی و در نهایت شتاب آن هم منفی است.



$\tan\alpha_1 = \tan\alpha_2 \Rightarrow \frac{20}{t_1 - 15} = \frac{10}{30 - t_1} \Rightarrow t_1 = 25s$

مجموع قدرمطلق مساحت زیر نمودار سرعت ـ زمان نشان‌دهندهٔ مسافت طی شده است، بنابراین:

$l = |S_1| + |S_2| = |\frac{10 \times 20}{2}| + |\frac{5 \times 10}{2}| = 125m$

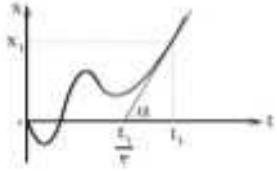
بنابراین تندی توسط در این بازه برابر است با:

$s_{av} = \frac{l}{\Delta t} = \frac{125}{15} = \frac{25}{3} \frac{m}{s}$

www.mapedu.ir

۹۲ **۴** سرعت لحظه‌ای برابر با شیب خط مماس بر نمودار در لحظهٔ موردنظر یا همان $\tan\alpha$ است.

$$v_1 = \tan\alpha = \frac{\text{ضلع مقابل}}{\text{ضلع مجاور}} = \frac{x_1}{t_1 - \frac{t_1}{3}} = \frac{3}{2}\frac{x_1}{t_1} \quad (1)$$



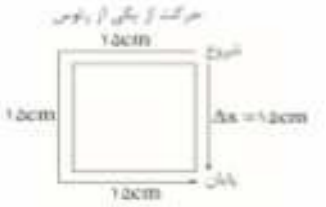
$$v_2 = v_{av} = \frac{\Delta x}{\Delta t} = \frac{x_1}{t_1} \quad (2)$$

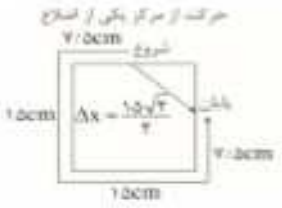
$$\xrightarrow{(1),(2)} \frac{v_2}{v_1} = \frac{\frac{x_1}{t_1}}{\frac{3}{2}\frac{x_1}{t_1}} = \frac{2}{3}$$

۹۳ **۴** مسافتی که متحرک در مدت ۹ ثانیه روی محیط این مربع طی می‌کند:

$$l = st \xrightarrow[t=9s]{s=5\frac{cm}{s}} l = 5\times 9 = 45cm$$

محیط این مسیر مربع‌شکل، ۶۰ سانتی‌متر است. بنابراین می‌توان نتیجه گرفت که این متحرک $\frac{3}{4}$ مسیر مربع‌شکل را طی می‌کند. اگر حرکت متحرک از یکی از رئوس شروع شود، پس از طی کردن سه ضلع، روی رأس مجاور توقف می‌کند و اگر متحرک از وسط یکی از اضلاع شروع به حرکت کند، پس از طی $\frac{3}{4}$ محیط، روی وسط ضلع مجاور قرار می‌گیرد:





با روابط ریاضی می‌توان اثبات کرد که کم‌ترین میزان جابه‌جایی هنگامی است که متحرک از مرکز ضلع شروع کند و بیش‌ترین میزان جابه‌جایی هنگامی است که متحرک از یکی از رئوس شروع به حرکت کند. بنابراین:

$$\Delta x_{min} \le \Delta x \le \Delta x_{max} \Rightarrow \frac{15\sqrt{2}}{2} \le \Delta x \le 15$$

$$\xrightarrow[\Delta t = 9s \text{ طرفین تقسیم بر}]{v_{av} = \frac{\Delta x}{\Delta t}} \frac{15\frac{\sqrt{2}}{2}}{9} \le v_{av} \le \frac{15}{9} \Rightarrow \frac{5}{6}\sqrt{2} \le v_{av} \le \frac{5}{3}$$

$$\xrightarrow{\sqrt{2}\approx 1.5} \frac{5}{4} \le v_{av} \le \frac{5}{3}$$

فقط گزینهٔ (۴) در این بازه قرار دارد.

۹۴ **۱** با توجه به رابطهٔ $v_{av} = \frac{\Delta x}{\Delta t}$ داریم:

$$(\vec{v}_{av})_B = -2(\vec{v}_{av})_A \xrightarrow{\Delta t_A = \Delta t_B} \Delta\vec{x}_B = -2(\Delta\vec{x}_A)$$

$$\Rightarrow (\vec{d}_B - 20\vec{i}) = -2(3\vec{i} - (-6\vec{i}))$$

$$\Rightarrow \vec{d}_B - 20\vec{i} = -18\vec{i} \Rightarrow \vec{d}_B = 2\vec{i}\,(m)$$

۹۵ **۱** همان‌طور که می‌دانید شیب خط مماس بر نمودار سرعت - زمان بیانگر شتاب لحظه‌ای حرکت است. در لحظات t_2 و t_3 شیب خط مماس بر نمودار مثبت بوده و در نتیجه شتاب متحرک در این لحظات در جهت محور x می‌باشد، اما در دو لحظهٔ t_1 و t_4 شیب خط مماس بر نمودار منفی بوده، بنابراین بردار شتاب در خلاف جهت محور x قرار دارد. از طرف دیگر در لحظهٔ t_1 اندازهٔ سرعت متحرک در حال کاهش است.

۹۶ **۳** **بررسی عبارت‌ها:**

الف) دوچرخه‌سوار در بازه‌های زمانی صفر تا ۲s و ۴s تا ۵s و ۸s تا ۹s در **کل به مدت ۴s در حال دور شدن از مبدأ است.** (✗)

ب) دوچرخه‌سوار در بازهٔ زمانی ۵s تا ۹s به مدت ۴s در خلاف جهت محور x حرکت می‌کند. (✓)

ج) دوچرخه‌سوار در لحظات $t_1 = 5s$ و $t_4 = 9s$ تغییر جهت می‌دهد. (✓)

۹۷ **۳** دو اتومبیل به سمت یکدیگر حرکت می‌کنند و پس از ۳۰ دقیقه، یعنی $\frac{1}{2}$ ساعت به هم می‌رسند، بنابراین داریم:

$$\Delta x_A + \Delta x_B = v_A t + v_B t = 60 \xrightarrow{t=\frac{1}{2}h} v_A + v_B = 120\frac{km}{h} \quad (I)$$

حال زمان رسیدن اتومبیل A را t فرض می‌کنیم و زمان رسیدن اتومبیل B را t+1 در نظر می‌گیریم، بنابراین:

$$\begin{cases} \Delta x_A = v_A t_A \Rightarrow 60 = v_A \times t \Rightarrow v_A = \frac{60}{t} \\ \Delta x_B = v_B t_B \Rightarrow 60 = v_B(t+1) \Rightarrow v_B = \frac{60}{t+1} \end{cases} \quad (II)$$

با استفاده از روابط (I) و (II) داریم:

$$v_A + v_B = 120 \Rightarrow \frac{60}{t} + \frac{60}{t+1} = 120 \Rightarrow \frac{1}{t} + \frac{1}{t+1} = 2$$

$$\Rightarrow \frac{t+1+t}{t(t+1)} = 2 \Rightarrow \frac{2t+1}{t^2+t} = 2 \Rightarrow 2t+1 = 2t^2+2t \Rightarrow 2t^2 = 1$$

$$\Rightarrow t^2 = \frac{1}{2} \Rightarrow t = \frac{\sqrt{2}}{2}h = 30\sqrt{2}\,min$$

۹۸ **۳** مساحت زیر نمودار سرعت ـ زمان متحرک، نشان‌دهندهٔ مقدار جابه‌جایی آن می‌باشد، در نتیجه: $S = \Delta x$

$$\Rightarrow S = \frac{2\times 2}{2} + 4\times 2 + \frac{4\times 4}{2} = 2+8+8 = 18m$$

بنابراین سرعت متوسط این متحرک برابر است با:

$$v_{av} = \frac{\Delta x}{\Delta t} = \frac{18}{10} = 1/8\frac{m}{s}$$

۹۹ **۱** سرعت برابر با شیب نمودار مکان ـ زمان یا همان $\tan 37^\circ$ است، بنابراین:

طول بازهٔ زمانی، 3s است، بنابراین سرعت متوسط این متحرک برابر است با:

$$v = v_{av} = \tan 37^\circ = \frac{3}{4}\frac{m}{s}$$

$$v_{av} = \frac{\Delta x}{\Delta t} \Rightarrow \frac{3}{4} = \frac{\Delta x}{3} \Rightarrow \Delta x = \frac{9}{4} = 2/25m$$

نکته: چون حرکت متحرک با سرعت ثابت است، جابه‌جایی آن در بازه‌های زمانی برابر، یکسان خواهد بود.

۱۰۰ **۲** ابتدا سرعت متحرک را محاسبه می‌کنیم:

$$v = \frac{\Delta x}{\Delta t} = \frac{x_2 - x_1}{t_2 - t_1} = \frac{75-(-20)}{20-4} = \frac{95}{16}\frac{m}{s}$$

معادلهٔ مکان ـ زمان این متحرک برابر است با:

$$x = vt + x_0 \Rightarrow x = \frac{95}{16}t + x_0 \xrightarrow[t=4s]{x=-20m} -20 = \frac{95}{16}\times 4 + x_0$$

$$\Rightarrow -20 = \frac{95}{4} + x_0 \Rightarrow x_0 = -20 - \frac{95}{4} = -43/75m$$

بنابراین:

$$51/25 = \frac{95}{16}t - 43/75 \Rightarrow 95 = \frac{95}{16}t \Rightarrow t = 16s$$

۱۰۱ **۱** جابه‌جایی قطار از لحظهٔ صفر تا لحظه‌ای که نیمی از قطار از روی پل عبور می‌کند، برابر ۳۵۰ متر $(300 + \frac{100}{2})$ می‌باشد، بنابراین تندی حرکت قطار برابر است با:

$$v = \frac{\Delta x}{\Delta t} = \frac{350}{7} = 50\frac{m}{s}$$

زمان مورد نیاز برای آن‌که نیمهٔ دیگر قطار نیز از روی پل عبور کند، برابر است با:

$$\Delta x = v\Delta t \Rightarrow 50 = 50\Delta t \Rightarrow \Delta t = 1s$$

بنابراین در لحظهٔ $t = 7s$ نیمی از قطار از پل عبور کرده است و ۱ ثانیه بعد قطار از روی پل عبور خواهد کرد و در نتیجه در لحظهٔ $t = 8s$ کل قطار از روی پل می‌گذرد.

۱۰۲ **۴** شیب خط مماس بر منحنی مسافت ـ زمان باید متناهی باشد، زیرا تندی بی‌نهایت معنا ندارد. (رد نمودار «الف»)

نمودار مسافت ـ زمان باید پیوسته باشد. (رد نمودار «ب»)

نمودار مسافت ـ زمان باید تابعی صعودی باشد، زیرا همواره مسافت در حال افزایش است. (رد نمودارهای «پ» و «ت»)

۱۰۳ **۳** نمودار مکان ـ زمان داده‌شده مربوط به حرکت با سرعت ثابت (یکنواخت) است، پس ابتدا سرعت متحرک را محاسبه می‌کنیم:

$$x = vt + x_0 \xrightarrow{x_0 = 2m} 16 = 2v + 2 \Rightarrow v = 3\frac{m}{s}$$

بنابراین:

$$x = vt + x_0 \Rightarrow x = 3t + 2$$

۱۰۴ **۳** با یک سؤال بسیار ساده روبه‌رو هستیم. کافی است به کمک رابطهٔ $\Delta x = v\Delta t$ تناسبی را به صورت زیر بنویسیم:

$$\Delta x = v\Delta t \Rightarrow \frac{\Delta x_1}{\Delta x_2} = \frac{v_1 \times \Delta t_1}{v_2 \times \Delta t_2} \Rightarrow \frac{L}{L+10} = \frac{v \times 6}{\frac{v}{2} \times 24}$$

$$\Rightarrow \frac{L}{L+10} = \frac{1}{2} \Rightarrow L = 10m$$

۱۰۵ **۳** با توجه به این‌که متحرک از حال سکون شروع به حرکت کرده است، باید در لحظهٔ $t_0 = 0$ شیب خط مماس بر نمودار برابر صفر شود، بنابراین گزینهٔ (۲) نادرست است. از طرف دیگر چون متحرک در خلاف جهت محور x حرکت می‌کند، بنابراین $v < 0$ است و باید شیب خط مماس بر نمودار بعد از لحظهٔ $t_0 = 0$ منفی باشد و در نتیجه نمودار رسم‌شده در گزینهٔ (۳) درست است.

۱۰۶ **۲** اگر شتاب دو متحرک را a_A و a_B فرض کنیم، داریم:

$$v_A = a_A t + v_{0A} = a_A t + 7$$

$$v_B = a_B t + v_{0B} = a_B t + 13$$

در لحظهٔ $t = 11s$ سرعت دو متحرک با هم برابر است.

$$v_A = v_B \xrightarrow{t=11s} 11a_A + 7 = 11a_B + 13$$

$$\Rightarrow a_A - a_B = \frac{6}{11}\frac{m}{s^2} \quad (1)$$

در لحظهٔ به هم رسیدن، مکان دو متحرک با هم برابر می‌شود. مکان اولیهٔ هر دو را $x_0 = 0$ فرض می‌کنیم.

لحظهٔ به هم رسیدن: $x_A = x_B$

$$\Rightarrow \frac{1}{2}a_A t^2 + v_{0A}t + x_{0A} = \frac{1}{2}a_B t^2 + v_{0B}t + x_{0B}$$

$$\xrightarrow[v_{0A} = 7\frac{m}{s},\ v_{0B} = 13\frac{m}{s}]{x_{0A} = x_{0B} = 0} \frac{1}{2}a_A t^2 + 7t = \frac{1}{2}a_B t^2 + 13t$$

$$\Rightarrow \frac{1}{2}(a_A - a_B)t^2 = 6t$$

$$\xrightarrow{(1)} \frac{1}{2} \times \frac{6}{11}t^2 = 6t \Rightarrow t = 22s$$

۱۰۷ **۴** ابتدا به کمک مقادیر درج‌شده در نمودار، شتاب حرکت را به دست می‌آوریم:

$$a = \frac{\Delta v}{\Delta t} = \frac{0-4}{2} = -2\frac{m}{s^2}$$

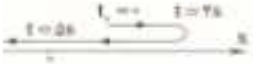
در ادامه معادلهٔ مکان ـ زمان متحرک را می‌نویسیم:

$$x = \frac{1}{2}at^2 + v_0 t + x_0 \Rightarrow x = \frac{1}{2}(-2)t^2 + 4t + 5$$

سپس مقدار x را برابر صفر قرار می‌دهیم و لحظهٔ عبور متحرک از مبدأ مکان را به دست می‌آوریم:

$$x = 0 \Rightarrow -t^2 + 4t + 5 = 0 \xrightarrow{a+c=b} \begin{cases} t = -1\ (\times) \\ t = 5s\ (\checkmark) \end{cases}$$

با توجه به نمودار سرعت ـ زمان صورت سؤال، متحرک از $x_0 = 5m$ در جهت محور x شروع به حرکت می‌کند و در لحظهٔ $t = 2s$ تغییر جهت داده و در لحظهٔ $t = 5s$ به مبدأ مکان می‌رسد. به شکل زیر دقت کنید.



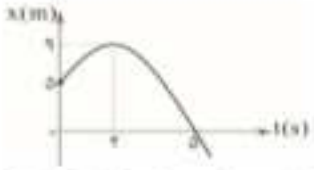
بنابراین در کل، متحرک ۵ ثانیه در سمت راست مبدأ مکان قرار دارد و بردار مکان آن به مدت ۵ ثانیه در جهت محور x می‌باشد.

۱۰۸ **۳** ابتدا به کمک معادلهٔ سرعت ـ زمان، اندازهٔ شتاب و سرعت اولیهٔ متحرک را به‌دست می‌آوریم:

$$\begin{cases} v = -2t + 4 \\ v = at + v_0 \end{cases} \Rightarrow a = -2\frac{m}{s^2},\ v_0 = 4\frac{m}{s}$$

در ادامه معادلهٔ مکان ـ زمان حرکت را به‌دست آورده و به کمک آن نمودار مکان ـ زمان حرکت را رسم می‌کنیم.

$$x = \frac{1}{2}at^2 + v_0 t + x_0 = -t^2 + 4t + 5$$



با توجه به نمودار رسم‌شده مطالب بیان‌شده در گزینه‌های (۱)، (۲) و (۴) درست هستند. اما مطلب بیان‌شده در گزینهٔ (۳) نادرست است و متحرک در لحظهٔ $t = 5s$ از مبدأ مکان عبور می‌کند.

۱۰۹ **۲** کافی است زمان حرکت هر متحرک را به کمک معادلهٔ مکان ـ زمان در حرکت با شتاب به دست آوریم:

$$\Delta x = \frac{1}{2}at^2 + v_0 t \xrightarrow{v_0 = 0} \Delta x = \frac{1}{2}at^2$$

$$\Rightarrow \begin{cases} 32 = \frac{1}{2}(2)t_A^2 \Rightarrow t_A = 4s \\ 32 = \frac{1}{2}(1)t_B^2 \Rightarrow t_B = 8s \end{cases}$$

بنابراین دو متحرک با اختلاف زمانی ۴ ثانیه به مقصد می‌رسند.

۱۱۰ **۴** می‌دانیم در حرکت متحرک روی خط راست اگر متحرک تغییر جهت ندهد، جابه‌جایی و مسافت طی‌شده و در نتیجه سرعت متوسط و تندی متوسط برابر است. حال لحظه‌ای که سرعت متحرک صفر می‌شود را به دست می‌آوریم:

$$v = t^2 - 4t + 4 \Rightarrow v = (t-2)^2$$

$t = 2s$ ریشهٔ مضاعف و v همواره مثبت و هیچ‌گاه تغییر جهت نمی‌دهد. بنابراین جابه‌جایی و مسافت طی‌شده با هم برابر هستند در نتیجه:

$$s_{av} = |\bar{v}_{av}|$$

۱۱۱ **۴** هر یک از شکل‌های رسم‌شده در گزینه‌ها را بررسی می‌کنیم:

بررسی گزینه‌ها:

۱) متحرک از ابتدا به صورت تندشونده حرکت می‌کند و در فواصل زمانی متوالی و یکسان، اندازهٔ جابه‌جایی متحرک در حال افزایش است.

۲) در سه ثانیهٔ اول، فواصل طی‌شده یکسان است و متحرک به صورت یکنواخت حرکت می‌کند و بعد از آن متحرک به صورت تندشونده به حرکت خود ادامه می‌دهد و فواصل طی‌شده در بازه‌های زمانی یکسان و متوالی، افزایش می‌یابد.

۳) متحرک در کل به صورت یکنواخت حرکت کرده است.

۴) در سه ثانیهٔ اول، حرکت یکنواخت می‌باشد و بعد از لحظهٔ $t = 3s$ متحرک به صورت کندشونده به حرکت خود ادامه می‌دهد و فواصل طی‌شده در بازه‌های زمانی یکسان و متوالی، کاهش می‌یابد.

۱۱۲ **۳** ابتدا لحظه‌ای را که متحرک B از مبدأ عبور می‌کند، به دست می‌آوریم:

$$x_B = 6t - 18 \xrightarrow{x_B = 0} 0 = 6t - 18 \Rightarrow t = 3s$$

در ادامه مکان متحرک A را در لحظهٔ $t = 3s$ به دست می‌آوریم:

$$x_A = t^2 - 2t + 4 \xrightarrow{t = 3s} x_A = 9 - 6 + 4 = 7m$$

بنابراین در لحظهٔ $t = 3s$ متحرک B در مکان $x = 0$ و متحرک A در مکان $x = 7m$ قرار دارند و **فاصلهٔ آن‌ها از یک‌دیگر 7m است.**

۱۱۳ **۳** در گزینهٔ (۱)، نمودار $x - t$ درجهٔ ۱ است، در حالی‌که در حرکت با شتاب ثابت، نمودار $x - t$ درجهٔ ۲ است. در گزینه‌های (۲) و (۴)، شتاب متحرک، متغیر است.

نمودار گزینهٔ (۳) مربوط به معادلهٔ سرعت ـ جابه‌جایی در حرکت با شتاب ثابت است.

$$v^2 - v_0^2 = 2ax \xrightarrow{v_0 = 0} v = \pm\sqrt{2ax}$$

۱۱۴ **۲** در لحظهٔ t_2 تندی متحرک صفر شده و علامت سرعت آن تغییر می‌کند و در نتیجه در لحظهٔ t_1 متحرک تغییر جهت می‌دهد، بنابراین عبارت‌های «الف» و «ب» نادرست هستند.

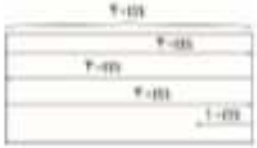
دقت کنید: با توجه به مجهول بودن مکان اولیهٔ حرکت نمی‌توان با توجه به نمودار دادشده در رابطه با تغییر جهت بردار مکان اظهار نظر کرد.

از طرف دیگر در لحظهٔ t_2 شیب خط مماس بر نمودار $v - t$ صفر بوده و $a = 0$ است و با توجه به این‌که علامت شتاب تغییر می‌کند، بردار شتاب تغییر جهت می‌دهد و عبارت «ج» درست است.

۱۱۵ **۳** مسافت طی‌شده توسط شناگر را در بازهٔ زمانی موردنظر به دست می‌آوریم:

$$s_{av} = \frac{l}{\Delta t} \Rightarrow 1/3 = \frac{l}{100} \Rightarrow l = 130m$$

با توجه به این‌که طول استخر 40m است، شناگر برای طی کردن مسافتی به اندازهٔ 130m باید مسیری را مطابق شکل زیر طی کند.



همان‌طور که در شکل بالا می‌بینید، بزرگی جابه‌جایی متحرک در 100s ابتدای حرکت برابر 30m است و داریم:

$$v_{av} = \frac{\Delta x}{\Delta t} = \frac{30}{100} = 0/3\frac{m}{s}$$

۱۱۶ **۲** ابتدا مسافت طی‌شده توسط متحرک را در 6 ثانیهٔ اول حرکت به دست می‌آوریم:

$$s_{av} = \frac{l}{\Delta t} \Rightarrow 5 = \frac{l}{6} \Rightarrow l = 30m$$

همان‌طور که در شکل زیر می‌بینید، دو مثلث هاشورخورده با یک‌دیگر مشابه هستند و ضلع مثلث S_2 دو برابر ضلع مثلث S_1 می‌باشد، بنابراین با توجه به نسبت تشابه دو مثلث می‌توانیم نتیجه بگیریم که مساحت مثلث S_2 چهار برابر مساحت مثلث S_1 است و داریم:

$$|S_1| + |S_2| = l$$

$$\xrightarrow{S_2 = 4S_1} 5|S_1| = l$$

$$\xrightarrow{l = 30m} S_1 = 6m$$

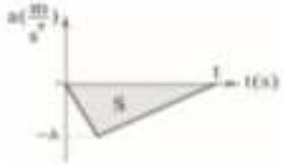
با مشخص شدن مقدار S_1 می‌توان جابه‌جایی و سرعت متوسط متحرک را در دو ثانیهٔ اول حرکتش به دست آورد.

$$|\Delta x| = |S_1| = 6m$$

$$|v_{av}| = \frac{|\Delta x|}{\Delta t} = \frac{6}{2} = 3\frac{m}{s}$$

www.mapedu.ir

۱۱۷ **۲** مساحت محصور بین نمودار شتاب ـ زمان و محور زمان، بیانگر اندازهٔ تغییرات سرعت متحرک است، بنابراین داریم:



$$|\Delta v| = S = \frac{8\times t}{2} = 4t$$

با کمک اندازهٔ تغییرات سرعت متحرک می‌توانیم اندازهٔ شتاب متوسط متحرک را در t ثانیهٔ اول حرکتش به دست آوریم:

$$|a_{av}| = \frac{|\Delta v|}{\Delta t} = \frac{4t}{t} = 4\frac{m}{s^2}$$

۱۱۸ **۳** سرعت متحرک B را به دست آورده و معادلهٔ مکان ـ زمان آن را می‌نویسیم:

$$v_B = \frac{\Delta x}{\Delta t} = \frac{0-6}{2} = -3\frac{m}{s}$$

$$x_B = v_B t + x_{0B} = -3t+6 \quad (1)$$

دو متحرک در لحظهٔ $t=3s$ به یک‌دیگر می‌رسند. با توجه به این مطلب می‌توان سرعت متحرک A را به دست آورد:

$$x_A = x_B \Rightarrow v_A t + x_{0A} = v_B t + x_{0B}$$

$$\xrightarrow{t=3s} 3(v_A) - 9 = -3(3)+6 \Rightarrow v_A = 2\frac{m}{s}$$

با مشخص شدن سرعت متحرک A، معادلهٔ مکان ـ زمان حرکت آن به صورت زیر به دست می‌آید:

$$x_A = v_A t + x_{0A} = 2t - 9 \quad (2)$$

با توجه به این‌که فاصلهٔ اولیهٔ دو متحرک از یک‌دیگر ۱۵m بوده است و در ابتدا دو متحرک در حال نزدیک شدن به یک‌دیگر بوده‌اند، نتیجه می‌گیریم که بعد از لحظهٔ $t=3s$ که دو متحرک شروع به دور شدن از یک‌دیگر می‌کنند، فاصلهٔ دو متحرک از یک‌دیگر می‌تواند به ۲۰m برسد و داریم:

$$x_A - x_B = 20 \xrightarrow{(1),(2)} (2t-9)-(-3t+6) = 20$$

$$\Rightarrow 5t - 15 = 20 \Rightarrow 5t = 35 \Rightarrow t = 7s$$

۱۱۹ **۲** **روش اول:** با استفاده از رابطهٔ سرعت متوسط داریم:

$$v_{av} = \frac{\Delta x}{\Delta t}$$

بازهٔ اول حرکت:
$$\begin{cases} \Delta t_1 = \frac{2}{3}\Delta t \\ \Delta x_1 = v_1 \Delta t_1 \Rightarrow \Delta x_1 = 50\times\frac{2}{3}\Delta t = \frac{100}{3}\Delta t \end{cases}$$

بازهٔ دوم حرکت:
$$\begin{cases} \Delta t_2 = \frac{1}{3}\Delta t \\ \Delta x_2 = v_2 \Delta t_2 \Rightarrow \Delta x_2 = 20\times\frac{1}{3}\Delta t = \frac{20}{3}\Delta t \end{cases}$$

$$\Rightarrow v_{av} = \frac{\frac{100}{3}\Delta t + \frac{20}{3}\Delta t}{\frac{2}{3}\Delta t + \frac{1}{3}\Delta t} \Rightarrow v_{av} = 40\frac{m}{s}$$

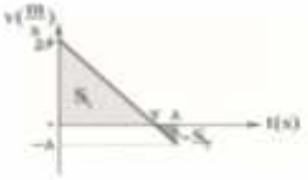
روش دوم: اگر متحرک $\frac{a}{n}$ زمان حرکت را با سرعت v_1 و $\frac{b}{n}$ زمان حرکت را با سرعت v_2 طی کند، به شرطی که $a+b=n$ باشد، سرعت متوسط از رابطهٔ $v_{av} = \frac{a}{n}v_1 + \frac{b}{n}v_2$ قابل محاسبه است.

$$v_{av} = \frac{a}{n}v_1 + \frac{b}{n}v_2 = \frac{2}{3}\times 50 + \frac{1}{3}\times 20 = \frac{100}{3} + \frac{20}{3} = \frac{120}{3} = 40\frac{m}{s}$$

۱۲۰ **۳** چون سرعت متوسط متحرک در ۲ ثانیهٔ چهارم حرکتش ($6s \le t \le 8s$) صفر است، طبق رابطهٔ $v_{av} = \frac{v_6 + v_8}{2}$، سرعت متحرک در لحظات $t_2 = 6s$ و $t_1 = 8s$ قرینهٔ یک‌دیگر است. بنابراین متحرک در لحظهٔ وسط این بازهٔ زمانی، ساکن می‌شود، یعنی سرعت متحرک در لحظهٔ $t=7s$ برابر صفر است.

$$v = at + v_0 \xrightarrow[v=0]{t=7s} 0 = (-8)(7) + v_0 \Rightarrow v_0 = +56\frac{m}{s}$$

$$v = -8t + 56 \xrightarrow{t=8s} v = (-8)(8) + 56 = -8\frac{m}{s}$$



بنابراین مسافت طی‌شده برابر است با:

$$l = S_1 + S_2 = \frac{7\times 56}{2} + \frac{1\times 8}{2} = 196 + 4 = 200m$$

تندی متوسط برابر است با:

$$s_{av} = \frac{l}{\Delta t} = \frac{200}{8} = 25\frac{m}{s}$$

www.mapedu.ir

۱۲۱ **۲** با نوشتن معادلهٔ سرعت متوسط در حرکت با شتاب ثابت در دو ثانیهٔ اول حرکت، سرعت اولیهٔ متحرک را به دست می‌آوریم:

$$\frac{\Delta x}{\Delta t}=\frac{v+v_0}{2}\xrightarrow{v=0}\frac{-10-(-2)}{2}=\frac{v_0}{2}\Rightarrow v_0=-8\frac{m}{s}$$

سپس شتاب حرکت متحرک را به دست می‌آوریم:

$$a=\frac{\Delta v}{\Delta t}=\frac{0-(-8)}{2}=4\frac{m}{s^2}$$

در ادامه می‌توانیم معادلهٔ مکان ـ زمان حرکت متحرک را به صورت زیر بنویسیم:

$$x=\frac{1}{2}at^2+v_0t+x_0=\frac{1}{2}(4)t^2-8t-2=2t^2-8t-2$$

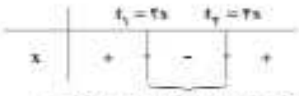
در ادامه مقدار x را برابر 8m قرار داده و زمان موردنظر را به دست می‌آوریم:

$$8=2t^2-8t-2\Rightarrow t^2-4t-5=0\Rightarrow\begin{cases}t=-1\ (\times)\\ t=5s\ (\checkmark)\end{cases}$$

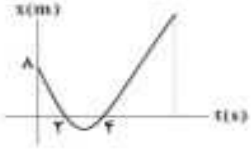
۱۲۲ **۱** **تذکر:** برای این‌که تعیین کنیم متحرک در چه لحظاتی در مکان‌های منفی (بردار مکان در خلاف جهت محور x) و در چه لحظاتی در مکان‌های مثبت (بردار مکان در جهت محور x) قرار دارد، باید معادلهٔ مکان ـ زمان را تعیین علامت کنیم.

با توجه به تذکر فوق، ابتدا ریشه‌های معادلهٔ مکان ـ زمان را یافته و سپس آن را تعیین علامت می‌کنیم:

$$\text{معادلهٔ مکان}: x=t^2-6t+8=0\Rightarrow(t-2)(t-4)=0\Rightarrow\begin{cases}t_1=2s\\ t_2=4s\end{cases}$$



متحرک در بین لحظات $t=2s$ تا $t=4s$ در مکان‌های منفی محور x قرار دارد.



بنابراین در مجموع متحرک به مدت ۲ ثانیه ($\Delta t=t_2-t_1=4-2=2s$) در مکان‌های منفی محور x قرار دارد و بردار مکان متحرک در خلاف جهت محور x قرار می‌گیرد.

۱۲۳ **۳** برای آن‌که سرعت متوسط در خلاف جهت محور x باشد، کافی است جابه‌جایی، منفی باشد. در ادامه نشان می‌دهیم که در دو ثانیهٔ اول ($0<t<2s$) حرکت، چگونه جابه‌جایی می‌تواند منفی باشد.

$$x=2t^2-bt-10$$

$$\begin{cases}t_1=0\Rightarrow x_1=-10m\\ t_2=2s\Rightarrow x_2=6-2b\end{cases}\Rightarrow\Delta x=x_2-x_1=16-2b$$

$$\Delta x<0\Rightarrow 16-2b<0\Rightarrow b>8$$

۱۲۴ **۲** با توجه به رابطهٔ مربوط به سرعت متوسط ($v_{av}=\frac{\Delta x}{\Delta t}$)، جابه‌جایی متحرک در ۵ ثانیهٔ اول و ۵ ثانیهٔ سوم و ۱۵ ثانیهٔ اول حرکت را به دست می‌آوریم:

$$\begin{cases}\text{در ۵ ثانیهٔ اول حرکت}: -5=\frac{\Delta x_1}{5}\Rightarrow\Delta x_1=-25m\\ \text{در ۵ ثانیهٔ سوم حرکت}: +3=\frac{\Delta x_3}{5}\Rightarrow\Delta x_3=15m\\ \text{در ۱۵ ثانیهٔ اول حرکت}: +2=\frac{\Delta x_{کل}}{15}\Rightarrow\Delta x_{کل}=+30m\end{cases}$$

جابه‌جایی در ۱۵ ثانیهٔ اول حرکت برابر مجموع جابه‌جایی در ۵ ثانیهٔ اول، ۵ ثانیهٔ دوم و ۵ ثانیهٔ سوم است، بنابراین جابه‌جایی در ۵ ثانیهٔ دوم حرکت برابر است با:

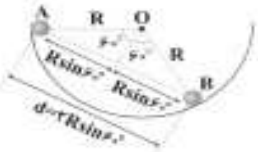
$$\Delta x_{کل}=\Delta x_1+\Delta x_2+\Delta x_3$$

$$\Rightarrow +30=-25+\Delta x_2+15\Rightarrow\Delta x_2=40m$$

$$\text{سرعت متوسط در ۱۰ ثانیهٔ اول حرکت}: v_{av}=\frac{\Delta x_1+\Delta x_2}{\Delta t}$$

$$\Rightarrow v_{av}=\frac{-25+40}{10}=+1/5\frac{m}{s}\Rightarrow\vec{v}_{av}=+1/5\vec{i}\left(\frac{m}{s}\right)$$

۱۲۵ **۴** این گلوله وقتی از نقطهٔ A تا نقطهٔ B حرکت می‌کند، مسافتی به اندازهٔ $\frac{1}{3}$ محیط دایره را طی می‌کند.



$$l=\frac{120^\circ}{360^\circ}\times\text{محیط دایره}=\frac{1}{3}\times2\pi R=\frac{2}{3}\pi R$$

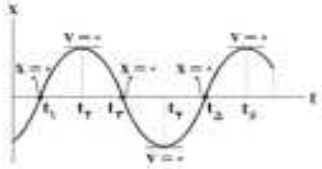
$$d=2R\sin60^\circ=\sqrt{3}R$$

بنابراین نسبت خواسته‌شده برابر است با:

$$\frac{|v_{av}|}{s_{av}}=\frac{\frac{d}{\Delta t}}{\frac{l}{\Delta t}}=\frac{d}{l}=\frac{\sqrt{3}R}{\frac{2}{3}\pi R}=\frac{3\sqrt{3}}{2\pi}$$

۱۲۶ **۲** با توجه به نمودار داده‌شده، متحرک در لحظات t_1، t_3 و t_5 از مکان $x=0$ (مبدأ مکان)، عبور کرده است و در این حالت اندازهٔ بردار مکان حداقل است ($\alpha=3$).

از طرفی با توجه به مماس‌های ترسیمی، سرعت متحرک در لحظات t_4، t_6 و t_8 برابر صفر شده (چرا؟) و تندی حرکت به حداقل می‌رسد ($\beta=3$).



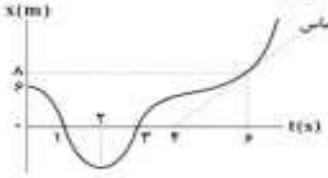
بنابراین نسبت خواسته‌شده برابر است با:

$$\frac{\alpha}{\beta}=\frac{3}{3}=1$$

۱۲۷ **۳** این سؤال را در گام‌های زیر حل می‌کنیم:

گام اول: محاسبهٔ سرعت متحرک در لحظهٔ $t=6s$:

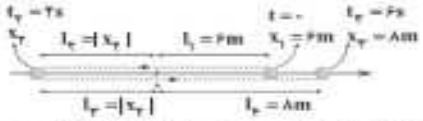
$$t=6s: v=\text{شیب خط مماس}=\frac{8}{6-4}=4\frac{m}{s}$$



بنابراین چون تندی متوسط متحرک در بازهٔ زمانی $0<t<6s$، $\frac{5}{4}$ برابر تندی در لحظهٔ $t=6s$ است، تندی متوسط در بازهٔ $0<t<6s$ برابر $5\frac{m}{s}$ است.

گام دوم: محاسبهٔ مسافت طی‌شده در بازهٔ زمانی $0<t<6s$:

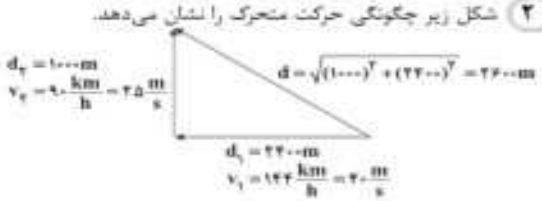
$$s_{av}=\frac{l}{\Delta t}\Rightarrow 5=\frac{l}{6}\Rightarrow l=30m$$



$$30=l_1+l_2+l_3+l_4\Rightarrow 30=6+|x_2|+|x_3|+8\Rightarrow |x_3|=8m$$

از طرفی باید دقت شود که در $t=2s$ عملاً متحرک در خلاف جهت محور x، بیشترین فاصله از مبدأ را دارد و این فاصله همان $8m$ است.

۱۲۸ **۳** شکل زیر چگونگی حرکت متحرک را نشان می‌دهد.



اندازهٔ جابه‌جایی و مسافت طی‌شده در کل حرکت برابر است با:

$$\text{مسافت}: l=d_1+d_2=2400+1000=3400m$$

$$\text{اندازهٔ جابه‌جایی}: d=\sqrt{d_1^2+d_2^2}=\sqrt{(1000)^2+(2400)^2}=2600m$$

هم‌چنین زمان کل حرکت برابر است با:

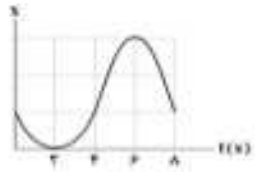
$$t=t_1+t_2=\frac{d_1}{v_1}+\frac{d_2}{v_2}=\frac{2400}{40}+\frac{1000}{25}=60+40=100s$$

پس اختلاف تندی متوسط و اندازهٔ سرعت متوسط به صورت زیر به دست می‌آید:

$$\begin{cases} s_{av}=\frac{l}{t}=\frac{3400}{100}=34\frac{m}{s} \\ |v_{av}|=\frac{d}{t}=\frac{2600}{100}=26\frac{m}{s} \end{cases}\Rightarrow s_{av}-|v_{av}|=34-26=8\frac{m}{s}$$

۱۲۹ **۳** در هر بازهٔ زمانی که تندی متوسط، بزرگ‌تر باشد، متحرک تندتر و سریع‌تر حرکت کرده است و بالعکس.

با توجه به نمودار داده‌شده، چون تندی متوسط متحرک (شیب خط واصل بین دو نقطه) در بازهٔ زمانی $4s$ تا $6s$ بیشتر از سایر گزینه‌ها است، بنابراین متحرک در این بازهٔ زمانی تندتر حرکت کرده است، بنابراین گزینهٔ (۳) صحیح است.

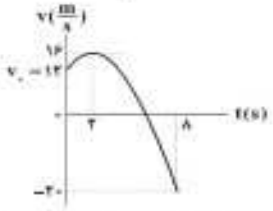


۱۳۰ **۴** با توجه به معادلهٔ سرعت ـ زمان داده‌شده، نمودار آن را رسم می‌کنیم:

$$v=-t^2+4t+12=-t^2+4t-4+4+12=-(t^2-4t+4)+16$$

$$\Rightarrow v=-(t-2)^2+16$$

$$\text{نقاط کمکی}:\begin{cases} t=0\Rightarrow v_0=12\frac{m}{s} \\ t=2s\Rightarrow v=16\frac{m}{s} \\ t=8s\Rightarrow v=-(8)^2+4\times 8+12=-20\frac{m}{s} \end{cases}$$



همان‌طور که مشاهده می‌کنیم، اندازهٔ سرعت در لحظهٔ $t=8s$ بیشتر از سایر لحظه‌هاست و در نتیجه بیشترین تندی متحرک در ۸ ثانیهٔ اول حرکت، در انتهای حرکت می باشد که برابر $20\frac{m}{s}$ است.

۱۳۱ **۳** تنها در بازهای تندی متوسط متحرک، صفر می‌شود که متحرک به طور کامل در یک محل متوقف شده باشد و نمودار مکان ـ زمان به صورت یک خط افقی باشد، با توجه به این موضوع در بازهٔ زمانی $2s<t<3s$ (ثانیهٔ سوم حرکت) و بازهٔ زمانی $5s<t<7s$ این موضوع رخ داده و تندی متوسط متحرک صفر است.

۱۳۲ **۲** در صورتی‌که یک حرکت در چند مرحله انجام شود، سرعت متوسط متحرک در کل مسیر حرکت برابر است با:

$$v_{av\,\text{کل}}=\frac{\text{جابه‌جایی کل}}{\text{کل زمان جابه‌جایی}}$$

برای این سؤال داریم:

$$\begin{cases} d_1=2\sqrt{2}\times\sqrt{2}=8km=8\times 10^3 m \\ \Delta t_1=1/5h=1/5\times 3600s \end{cases}$$

$$\begin{cases} d_2=5\sqrt{2}\times\sqrt{2}=10km=10\times 10^3 m \\ \Delta t_2=0/5h=0/5\times 3600s \end{cases}$$

بنابراین:

$$|v_{av}|=\frac{d_{\text{کل}}}{\Delta t_1+\Delta t_2}=\frac{(8+10)\times 10^3}{(1/5+0/5)\times 3600}=\frac{18\times 10^3}{2\times 3600}$$

$$\Rightarrow |v_{av}|=\frac{10^3}{400}=\frac{10}{4}=2/5\frac{m}{s}$$

دقت کنید: توجه شود که d (جابه‌جایی) فاصلهٔ بین محل شروع حرکت (M) و محل پایان حرکت (N) است که برابر d_1+d_2 است. در واقع چون حرکت روی مسیر مستقیم و بدون تغییر جهت انجام شده است، جابه‌جایی و مسافت طی‌شده هم‌اندازه هستند.

۱۳۳ **۳** با قرار دادن $t=0$ در معادلهٔ مکان ـ زمان، مکان اولیهٔ متحرک به دست می‌آید:

$$\text{معادلهٔ حرکت}: x=t^2-5t+8$$

$$\xrightarrow{t=0} x=(0)^2-5\times 0+8=8m$$

حال برای محاسبهٔ لحظهٔ عبور دوبارهٔ متحرک از $x=8m$، می‌توان نوشت:

$$x=t^2-5t+8\xrightarrow{x=8m} t^2-5t+8=8\Rightarrow t^2-5t=0$$

$$\Rightarrow t(t-5)=0\Rightarrow\begin{cases} t=0 \\ t=5s \end{cases}$$

بنابراین متحرک در پایان ثانیهٔ پنجم از حرکت، مجدداً از مکان اولیه‌اش عبور می‌کند.

www.mapedu.ir

۱۳۴ ۴ **بررسی عبارت‌ها:**

الف) با توجه به صفر بودن سرعت متوسط متحرک در این بازهٔ زمانی، فقط می‌توان فهمید که جابه‌جایی متحرک صفر بوده و متحرک به مکان شروع حرکت بازگشته است و اطلاعات دیگری راجع به چگونگی حرکت متحرک روی دایره به دست نمی‌آید، بنابراین عبارت «الف» می‌تواند درست یا نادرست باشد.

ب) با توجه به این‌که متحرک در حال حرکت بر روی مسیر دایره‌ای‌شکل است، مسافت طی‌شده بزرگ‌تر از صفر است و در نتیجه تندی متوسط هم بیشتر از صفر خواهد بود، پس این عبارت، نادرست است.

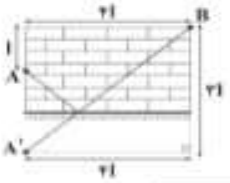
ج) در حرکت بر روی دایره، بردار سرعت متحرک دائماً تغییر جهت می‌دهد و این عبارت صحیح است.

۱۳۵ ۳ جابه‌جایی متحرک از A تا B مقدار مشخصی داشته و برابر است با:

$$d = AB = \sqrt{l^2 + (4l)^2} = \sqrt{17}\,l$$

از طرفی در حالتی سرعت متوسط این حرکت بیشینه می‌شود که متحرک در کم‌ترین زمان ممکن از A به زمین رفته و سپس به B منتقل شود و برای این منظور باید کم‌ترین مسافت ممکن را طی کند.

کم‌ترین مسافت در حالتی رخ می‌دهد که تصویر نقطهٔ A نسبت به زمین (یعنی A') با نقطهٔ B در یک امتداد واقع شوند (چرا؟)



$$\text{فاصلهٔ } A' \text{ تا } B = \sqrt{(3l)^2 + (4l)^2} = 5l$$

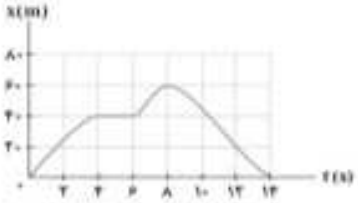
بنابراین:

$$\Delta t_{min} = \frac{l_{min}}{v} = \frac{5l}{v}$$

بیشترین اندازهٔ سرعت متوسط متحرک در این جابه‌جایی برابر است با:

$$(v_{av})_{max} = \frac{d}{\Delta t_{min}} = \frac{\sqrt{17}\,l}{\frac{5l}{v}} = \frac{\sqrt{17}}{5}\,v$$

۱۳۶ ۱ هرگاه متحرک در خلاف جهت محور x حرکت کند، علامت سرعت متحرک، منفی است. با توجه به نمودار رسم‌شده، در بازهٔ زمانی $8s < t < 12s$ علامت سرعت متحرک منفی است (با توجه به شیب مماس ترسیمی بر نمودار). بنابراین نسبت مدت‌زمانی که متحرک در خلاف جهت محور x حرکت می‌کند به کل ۱۲ ثانیه برابر است با: $\frac{6}{12} = \frac{3}{7}$



۱۳۷ ۳ **بررسی گزینه‌ها:**

$$1)\ \begin{cases} t_1 = 0 \Rightarrow v_1 = 4\,\frac{m}{s} \\ t_2 = 1s \Rightarrow v_2 = 0 \end{cases} \Rightarrow a_{av} = \frac{0-4}{1-0} = -4\,\frac{m}{s^2}$$

$$2)\ \begin{cases} t_1 = 0 \Rightarrow v_1 = 4\,\frac{m}{s} \\ t_2 = 2s \Rightarrow v_2 = -4\,\frac{m}{s} \end{cases} \Rightarrow a_{av} = \frac{-4-(4)}{2-0} = -\frac{8}{2} = -4\,\frac{m}{s^2}$$

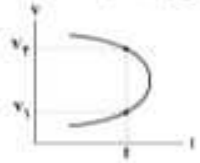
$$3)\ \begin{cases} t_1 = 0 \Rightarrow v_1 = 4\,\frac{m}{s} \\ t_2 = 4s \Rightarrow v_2 = 4\,\frac{m}{s} \end{cases} \Rightarrow a_{av} = \frac{4-4}{4-0} = 0$$

$$4)\ \begin{cases} t_1 = 4s \Rightarrow v_1 = 4\,\frac{m}{s} \\ t_2 = 6s \Rightarrow v_2 = -4\,\frac{m}{s} \end{cases} \Rightarrow a_{av} = \frac{-4-(4)}{6-4} = -\frac{8}{2} = -4\,\frac{m}{s}$$

در ۴ ثانیهٔ اول حرکت، شتاب متوسط حرکت متحرک برابر صفر است.

۱۳۸ ۳ در گزینهٔ (۳)، سرعت متحرک همواره منفی بوده، بنابراین متحرک در خلاف جهت محور x حرکت می‌کند. هم‌چنین در این گزینه، شیب خط مماس رسم‌شده بر نمودار سرعت ـ زمان نیز همواره منفی بوده، بنابراین شتاب نیز منفی است.

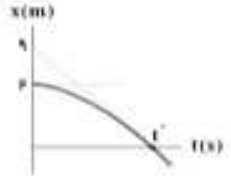
دقت کنید: شکل رسم‌شده در گزینهٔ (۱) نمی‌تواند مربوط به نمودار سرعت ـ زمان یک متحرک باشد، زیرا متحرک در یک لحظهٔ مشخص بیش از یک سرعت دارد.



۱۳۹ ۲ **گام اول:** سرعت متحرک را در لحظهٔ $t = 0$ و لحظه‌ای که متحرک از مبدأ مکان عبور می‌کند (t') را به دست می‌آوریم:

همان‌طور که می‌دانیم، شیب خط مماس بر نمودار مکان ـ زمان برابر با سرعت متحرک است.

$$\begin{cases} \text{شیب خط مماس بر نمودار در لحظهٔ صفر} = \text{اندازهٔ سرعت متحرک در لحظهٔ صفر} \\ \Rightarrow v_1 = 0 \\ |\text{شیب خط مماس بر نمودار در لحظهٔ } t'| = |v_2| : \text{اندازهٔ سرعت متحرک در لحظهٔ } t' \\ \Rightarrow v_2 = |\frac{0-9}{t'}| = \frac{9}{t'} \Rightarrow v_2 = -\frac{9}{t'} \end{cases}$$



www.mapedu.ir

گام دوم: محاسبهٔ شتاب متوسط متحرک در دو لحظهٔ $t=0$ و t':

$$a_{av}=\frac{v_2-v_1}{t'-0}=\frac{-\frac{9}{t'}-0}{t'}=\frac{-9}{t'^2}\xrightarrow{a=-1\frac{m}{s^2}}-1=\frac{-9}{t'^2}\Rightarrow t'=3s$$

گام سوم: محاسبهٔ تندی متوسط در ۳ ثانیهٔ اول حرکت:

$$s_{av}=\frac{l}{\Delta t}\Rightarrow s_{av}=\frac{6}{3-0}=2\frac{m}{s}$$

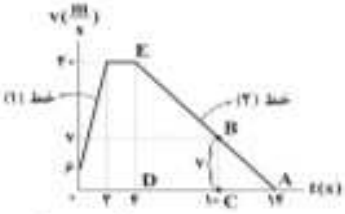
۱۴۰ **۳** با یک سؤال ساده با ظاهری جدید روبه‌رو هستیم. کافی است به کمک رابطهٔ $d=v\Delta t$ تناسبی را به صورت زیر بنویسیم:

$$d=v\Delta t\Rightarrow\frac{d_1}{d_2}=\frac{v_1\times\Delta t_1}{v_2\times\Delta t_2}\Rightarrow\frac{l}{l+10}=\frac{v\times 6}{\frac{v}{2}\times 24}$$

$$\Rightarrow\frac{l}{l+10}=\frac{1}{2}\Rightarrow l=10m$$

بنابراین: فاصلهٔ نقاط A و C $=2l+10=30m$

۱۴۱ **۳** ابتدا مطابق شکل زیر و با استفاده از یک تناسب، سرعت اتومبیل را در لحظهٔ $t=10s$ محاسبه می‌کنیم:



$$\overset{\Delta}{AED}\sim\overset{\Delta}{ABC}:\frac{v}{20}=\frac{14-10}{14-2}\Rightarrow v=16\frac{m}{s}$$

در ادامه برای محاسبهٔ شتاب متوسط اتومبیل در ۱۰ ثانیهٔ اول حرکتش می‌توان نوشت:

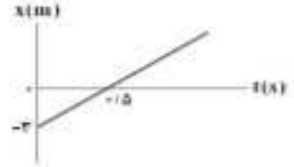
$$a_{av}=\frac{\Delta v}{\Delta t}=\frac{16-6}{10-0}=\frac{10}{10}=+1\frac{m}{s^2}$$

از طرفی شتاب متحرک در لحظهٔ $t=10s$، برابر شیب خط (۲) است. بنابراین داریم:

$$a=(2)\text{ شیب خط }=\frac{0-20}{14-2}=-2\frac{m}{s^2}$$

بنابراین نسبت خواسته‌شده برابر است با: $\frac{a_{av}}{a}=-\frac{1}{2}$

۱۴۲ **۴** از معادلهٔ مکان ـ زمان داده‌شده مشخص است که حرکت متحرک با سرعت ثابت است. ابتدا نمودار مکان ـ زمان حرکت این متحرک را رسم می‌کنیم:



$$x=6t-3\xrightarrow{x=0}t=0/5s$$

بررسی عبارت‌ها:

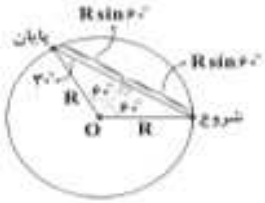
الف) شیب نمودار مکان ـ زمان این متحرک همواره مثبت است، بنابراین سرعت این متحرک همواره مثبت است، بنابراین همواره در جهت محور x است. (✓)

ب) حرکت این متحرک با سرعت ثابت است، بنابراین شتاب حرکت آن همواره صفر است. (✗)

ج) این متحرک در بازهٔ زمانی $t_1=0$ تا $t_2=0/5s$ به مدت $0/5s$ در قسمت منفی محور مکان قرار دارد، بنابراین درصد زمانی که متحرک در قسمت منفی محور مکان قرار دارد، برابر است با: $\frac{0/5}{10}\times 100=5\%$ (✓)

د) حرکت این متحرک با سرعت ثابت است، بنابراین شتاب حرکت آن همواره صفر است. (✓)

۱۴۳ **۳** متحرک در مدت ۶ ثانیه، یک بار محیط دایره را می‌پیماید، بنابراین در مدت ۲ ثانیه، $\frac{1}{3}$ از محیط دایره را طی می‌کند و در نتیجه طول کمانی به اندازهٔ 120° را می‌پیماید. با توجه به شکل زیر می‌توان نوشت:



جابه‌جایی: $d=2R\sin 60^\circ=2R\frac{\sqrt{3}}{2}=R\sqrt{3}$

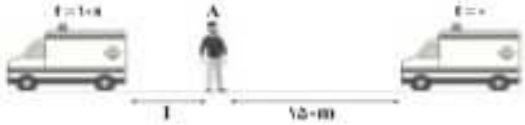
بنابراین سرعت متوسط این متحرک در این بازهٔ زمانی برابر است با:

$$v_{av}=\frac{d}{\Delta t}\Rightarrow 20=\frac{R\sqrt{3}}{2}\Rightarrow R=20\sqrt{3}cm$$

۱۴۴ **۲** در این سؤال، با توجه به این‌که در ابتدا آمبولانس با شخص A فاصله دارد، مدتی طول می‌کشد تا پس از روشن شدن آژیر، صوت به شخص A برسد. در این صورت می‌توان نوشت:

$$\Delta x=v_{\text{صوت}}\Delta t_{\text{صوت}}\Rightarrow 150=300\Delta t_{\text{صوت}}\Rightarrow\Delta t_{\text{صوت}}=0/5s$$

پس از گذشت ۰/۵ ثانیه، آژیر آمبولانس قطع می‌شود، اما مدتی طول می‌کشد تا آخرین صوت آن به شخص برسد. در این صورت می‌توان نوشت:



$$\Delta x_{\text{آمبولانس}} = v_{\text{آمبولانس}}\Delta t_{\text{آمبولانس}} = ۲۰\times۱۰ = ۲۰۰m$$

$$\Rightarrow l+۱۵۰=۲۰۰ \Rightarrow l=۵۰m$$

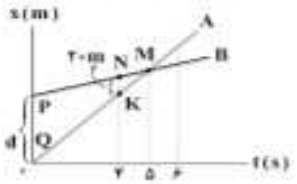
آخرین صوت آمبولانس در فاصلهٔ ۵۰ متری شخص منتشر می‌شود، بنابراین داریم:

$$\Delta x_{\text{صوت}} = v_{\text{صوت}}\Delta t'_{\text{صوت}} \Rightarrow ۵۰=۳۰۰\Delta t'_{\text{صوت}} \Rightarrow \Delta t'_{\text{صوت}} = \frac{۱}{۶}s$$

بنابراین شخص A، ۰/۵ ثانیه دیرتر صوت اولیه را می‌شنود و $\frac{۱}{۶}$ ثانیه دیرتر هم صوت آخر را خواهد شنید. یعنی از لحظهٔ $t_۱=۰/۵s$ تا لحظهٔ $t_۲=(۱۰+\frac{۱}{۶})s$، بنابراین مدت‌زمانی که شخص A صدای آژیر را می‌شنود، برابر است با:

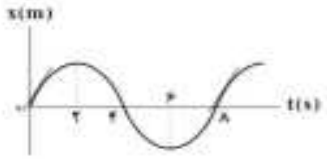
$$(۱۰+\frac{۱}{۶})-۰/۵=\frac{۲۹}{۳}s$$

۱۴۵ **۲** با توجه به این‌که فاصلهٔ دو متحرک، دو بار برابر ۲۰m شده است، می‌توان نتیجه گرفت که A با تندی بیشتری از B حرکت می‌کند تا پس از آن‌که یک‌بار فاصله‌اش از B به ۲۰m رسید، از B سبقت بگیرد و دوباره فاصلهٔ آن‌ها به ۲۰m برسد. نمودار مکان ـ زمان این دو متحرک مطابق شکل زیر است و می‌توان نوشت:



$$\overset{\Delta}{MPQ} \sim \overset{\Delta}{MNK} \Rightarrow \frac{۲۰}{d}=\frac{۵-۴}{۵} \Rightarrow d=۱۰۰m$$

۱۴۶ **۱** با توجه به سینوسی بودن منحنی، شیب مماس ترسیمی بر نمودار در لحظات $t=۰$ و $t=۸s$ یکسان است و سرعت متحرک در این دو لحظه برابر است. با توجه به این موضوع، شتاب متوسط در ۸ ثانیهٔ اول حرکت، صفر است.



۱۴۷ **۴** جابه‌جایی قطار از لحظهٔ صفر تا لحظه‌ای که کل قطار از روی پل عبور می‌کند، برابر مجموع طول قطار و طول پل، یعنی ۸۰۰ متر می‌باشد. بنابراین تندی حرکت قطار برابر است با:

$$v=\frac{\Delta x}{\Delta t}=\frac{۸۰۰}{۱۶}=۵۰\frac{m}{s}$$

برای عبور نیمی از قطار از روی پل، جابه‌جایی قطار باید برابر مجموع طول پل و نصف طول قطار باشد، بنابراین زمان موردنیاز برای آن‌که نیمی از قطار از روی پل عبور کند برابر است با:

$$\Delta x = v\Delta t \Rightarrow (۶۰۰+\frac{۲۰۰}{۲})=۵۰\Delta t \Rightarrow \Delta t=۱۴s$$

۱۴۸ **۴** **گام اول:** محاسبهٔ میزان تأخیر در روشن کردن زمان‌سنج:

$$v_A=\frac{\Delta x_A}{\Delta t_A}=\frac{۴۰-۱۶}{۶}=۴\frac{m}{s}$$

$$\xrightarrow[x_{\circ A}=۰,\ x_A=۱۶m]{\text{لحظهٔ t از زمان روشن شدن زمان‌سنج}} x_A=v_At+x_{\circ}$$

$$\Rightarrow ۱۶=۴t \Rightarrow t=۴s$$

گام دوم: زمان‌سنج ۴ ثانیه تأخیر دارد و تندی A برابر $۴\frac{m}{s}$ است. با توجه به این‌که در ۴ ثانیهٔ ابتدایی که هنوز زمان‌سنج شروع به کار نکرده است، متحرک B، ۴۰ متر حرکت کرده است، می‌توان نوشت:

$$v_B=\frac{\Delta x}{\Delta t}=\frac{۴۰}{۴}=۱۰\frac{m}{s}$$

بنابراین:

$$x_B=v_Bt+x_{\circ B}=۱۰t+۴۰ \xrightarrow{t=۶s} x_B=۶۰+۴۰=۱۰۰m$$

۱۴۹ **۲** با توجه به اطلاعات سؤال داریم:

$$\begin{cases} t_۱=۰ \Rightarrow x_۱=۰ \\ t_۲=۲s \Rightarrow x_۲=۲A-۴B \end{cases} \Rightarrow v_{av}=\frac{x_۲-x_۱}{t_۲-t_۱}$$

$$\Rightarrow -۱۲=\frac{(۲A-۴B)-۰}{۲-۰} \Rightarrow A-۲B=-۱۲ \qquad (۱)$$

$$t=۳s \xrightarrow{x=-۶۰m} -۶۰=۳A-۹B \Rightarrow A-۳B=-۲۰ \qquad (۲)$$

$$\xrightarrow{(۲)\ \text{و}\ (۱)} \begin{cases} A=۴ \\ B=۸ \end{cases}$$

بنابراین معادلهٔ حرکت متحرک برابر است با:

$$x=۴t-۸t^۲$$

در نهایت برای یافتن لحظهٔ تغییر جهت بردار مکان متحرک می‌توان نوشت:

$$x=۴t-۸t^۲ \xrightarrow{x=۰} ۴t(۱-۲t)=۰ \Rightarrow \begin{cases} t=۰/۵s & (✓) \\ t=۰ & (✗) \end{cases}$$

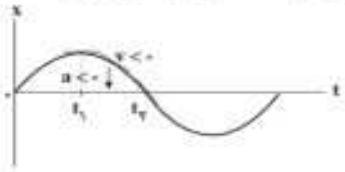
۱۵۰ **۲** در بازهٔ زمانی صفر تا ۴ تندی متحرک A در تمام لحظات بیشتر از تندی متحرک B است، در نتیجه تندی متوسط آن نیز در این بازهٔ زمانی بیشتر از تندی متوسط متحرک B است. از سوی دیگر میزان Δv (تغییرات سرعت) برای دو متحرک در این بازهٔ زمانی، یکسان بوده و در نتیجه شتاب متوسط این دو متحرک در این بازهٔ زمانی با هم برابر هستند.

۱۵۱ **۳** سرعت، یک کمیت برداری است. بنابراین زمانی سرعت‌ها در دو زمان مختلف با هم برابر هستند که هم اندازه و هم جهت سرعت‌ها با هم برابر باشد. در این سؤال، در لحظات $t_۱$، $t_۲$ و $t_۵$ سرعت متحرک، یکسان است.

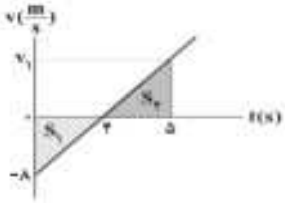
بنابراین شتاب متوسط این متحرک در بازهٔ زمانی t_1 تا t_2 و t_4 تا t_5 برابر صفر است ($a_{av} = \frac{\Delta v}{\Delta t}$). از سوی دیگر سرعت متوسط در راستای بردار جابه‌جایی است و تنها در بازهٔ زمانی t_1 تا t_5 جابه‌جایی متحرک، افقی و در نتیجه سرعت متوسط متحرک در جهت محور x است.

۱۵۲ **۳** در بازهٔ زمانی ذکرشده، علامت سرعت، منفی است، بنابراین جهت حرکت در خلاف جهت محور x است.

از سوی دیگر با توجه به تقعر نمودار، علامت شتاب حرکت منفی بوده در خلاف جهت محور x است. همچنین متحرک به مبدأ که همان مکان اولیه‌اش می‌باشد، نزدیک می‌شود و در مجموع تنها گزینهٔ (۳) نادرست است، زیرا با توجه به خط‌های مماس ترسیمی، اندازهٔ سرعت (تندی) در حال افزایش است.



۱۵۳ **۱** با استفاده از تشابه دو مثلث، v_1 را محاسبه می‌کنیم:



$$v_{av} = \frac{\Delta x}{\Delta t} \Rightarrow \frac{8}{4} = \frac{v_1}{5-4} \Rightarrow v_1 = 2\frac{m}{s}$$

می‌دانیم مساحت زیر نمودار سرعت ـ زمان برابر با جابه‌جایی متحرک است، بنابراین:

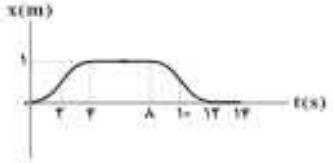
$$\begin{cases} v_{av} = \frac{|S_2| - |S_1|}{\Delta t} = \frac{\frac{2\times 1}{2} - \frac{8\times 4}{2}}{5} = -3\frac{m}{s} \\ s_{av} = \frac{|S_2| + |S_1|}{\Delta t} = \frac{\frac{2\times 1}{2} + \frac{8\times 4}{2}}{5} = \frac{17}{5}\frac{m}{s} \end{cases}$$

$$\Rightarrow \frac{s_{av}}{|v_{av}|} = \frac{17}{15}$$

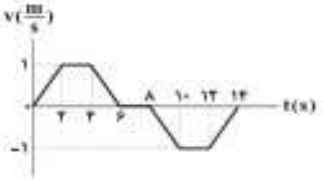
۱۵۴ **۲** در هریک از نمودارها، مدت‌زمانی که سرعت حرکت صفر است (جسم متوقف است.) را به دست می‌آوریم.

بررسی گزینه‌ها:

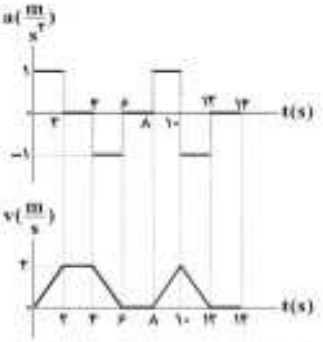
۱) در بازه‌های زمانی $4s < t < 8s$ و $12s < t < 14s$، نمودار مکان ـ زمان متحرک، افقی است، بنابراین جسم ساکن است، بنابراین متحرک در مجموع ۶ ثانیه ساکن بوده است.



۲) در بازهٔ زمانی $6s < t < 8s$، سرعت متحرک صفر است و جسم ساکن است، بنابراین به مدت ۲ ثانیه جسم ساکن بوده است.

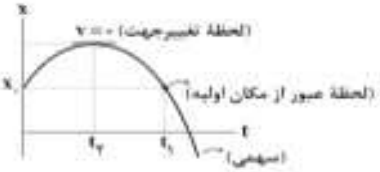


۳) در این گزینه نمودار شتاب ـ زمان متحرک داده شده است. برای آن‌که بتوانیم بفهمیم که سرعت جسم در چه لحظاتی صفر است، باید نمودار سرعت ـ زمان را با توجه به نمودار شتاب ـ زمان رسم کنیم. با توجه به این‌که شیب نمودار سرعت ـ زمان برابر شتاب است، داریم:



همان‌طور که می‌بینید، در بازه‌های زمانی $6s < t < 8s$ و $12s < t < 14s$، در مجموع به مدت ۴ ثانیه، سرعت حرکت صفر است و جسم ساکن است.

۱۵۵ **۲** نمودار مکان ـ زمان حرکت با شتاب ثابت به شکل یک سهمی است. با توجه به شکل زیر و با توجه به تقارن سهمی‌ها حول رأس آن‌ها می‌توان نوشت:



با توجه به نمودار بالا داریم:

$$t_1 = 2t_2 \Rightarrow \frac{t_2}{t_1} = \frac{1}{2}$$

دقت کنید: مکان و سرعت اولیه تأثیری در جواب مسأله ندارند.

۱۵۶ **۱** اگر فاصلهٔ نقاط A و B برابر d باشد، متحرک در ثانیهٔ آخر، مسافت $\frac{3}{4}d$ و در لحظات قبل از آن مسافت $\frac{1}{4}d$ را طی کرده است، زیرا طبق متن سؤال، مسافت طی‌شده در ثانیهٔ آخر ۳ برابر لحظات قبل است. در ادامه با توجه به شکل زیر می‌توان نوشت:

مسافت طی‌شده در (t−1) ثانیهٔ اول: $\frac{d}{4} = \frac{1}{2}a(t-1)^2$

$$\xrightarrow{a=10\frac{m}{s^2}} \frac{d}{4} = 5(t-1)^2 \quad (1)$$

مسافت طی‌شده در کل t ثانیه: $d = \frac{1}{2}at^2 \xrightarrow{a=10\frac{m}{s^2}} d = 5t^2 \quad (2)$

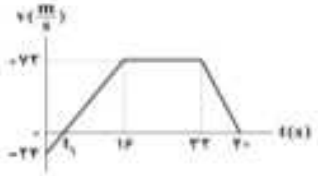
با تقسیم رابطهٔ (۲) بر (۱) داریم:

$$\frac{d}{\frac{d}{4}} = \frac{5t^2}{5(t-1)^2} \Rightarrow 4 = \frac{t^2}{(t-1)^2} \xrightarrow{\text{جذر}} 2 = \frac{t}{t-1} \Rightarrow t = 2s$$

بنابراین فاصلهٔ AB برابر است با:

$$d = 5t^2 = 5\times 2^2 = 20m$$

۱۵۷ **۲** با توجه به نمودار زیر، در لحظهٔ t_1 سرعت متحرک صفر است و پس از آن تا لحظهٔ $t=16s$ هم سرعت مثبت است و هم شتاب (شیب سرعت). پس در فاصلهٔ زمانی t_1 تا $t=16s$ سرعت و شتاب هر دو مثبت و هم‌جهت‌اند. به دلیل این‌که در این فاصله شتاب ثابت است، سرعت متوسط برابر میانگین سرعت در لحظات t_1 و $t=16s$ است.



$$v_{av} = \frac{v_2 + v_1}{2} = \frac{72+0}{2} = \frac{72}{2} = 36\frac{m}{s}$$

۱۵۸ **۲** با توجه به ثابت بودن شتاب، ابتدا بین نقاط (۱) و (۲)، از معادلهٔ سرعت ـ جابه‌جایی در حرکت با شتاب ثابت استفاده می‌کنیم:

$$v_2^2 - v_1^2 = 2a\Delta x \Rightarrow 4^2 - (-2)^2 = 2a\times(5-3) \Rightarrow a = 3\frac{m}{s^2}$$

حال بین نقطهٔ (۱) و مکانی که متحرک در آن تغییر جهت می‌دهد (x')، از معادلهٔ سرعت ـ جابه‌جایی در حرکت با شتاب ثابت استفاده می‌کنیم:

$$v'^2 - v_1^2 = 2a\Delta x \Rightarrow 0^2 - (-2)^2 = 2\times 3\times(x'-3) \Rightarrow x'-3 = -\frac{2}{3}$$

$$\Rightarrow x' = \frac{7}{3}m \Rightarrow d' = \frac{7}{3}\vec{i}(m)$$

۱۵۹ **۱** با توجه به اطلاعات داده‌شده روی نمودار و معادلهٔ مکان ـ زمان در حرکت با شتاب ثابت داریم:

$$x = \frac{1}{2}at^2 + v_0t + x_0$$

$$\Rightarrow \begin{cases} 24 = \frac{9}{2}a + 3v_0 + x_0 & (1) \\ 0 = \frac{49}{2}a + 7v_0 + x_0 & (2) \end{cases}$$

از طرفی با استفاده از معادلهٔ سرعت ـ زمان در حرکت با شتاب ثابت داریم:

$$v = at + v_0 \Rightarrow 0 = 3a + v_0 \quad (3)$$

$$\xrightarrow[\text{حل ۳ معادله و ۳ مجهول}]{(1),(2),(3)} \begin{cases} a = -3\frac{m}{s^2} \\ v_0 = 9\frac{m}{s} \\ x_0 = 10/5m \end{cases}$$

در ادامه سرعت متوسط متحرک در ۷ ثانیهٔ نخست حرکتش برابر است با:

$$v_{av} = \frac{\Delta x}{\Delta t} = \frac{0 - x_0}{7-0} = \frac{0-10/5}{7} = -1/5\frac{m}{s}$$

تذکر: با توجه به شکل زیر و بررسی مسافت‌های طی‌شده از لحظهٔ تغییر جهت نیز می‌توان این سؤال را بررسی کرد:

$$A|a| = 24m \Rightarrow |a| = 3\frac{m}{s^2}$$

$$\Rightarrow 24 - x_0 = 4/5|a| = 13/5 \Rightarrow x_0 = 10/5m$$

۱۶۰ **۳** برای آن‌که اتومبیل‌ها دو بار در فاصلهٔ A تا B از کنار هم بگذرند، باید ابتدا اتومبیل (۲) از اتومبیل (۱) سبقت بگیرد و سپس دوباره اتومبیل (۱) از اتومبیل (۲) سبقت بگیرد و زودتر به مقصد B برسد، بنابراین زمان به مقصد رسیدن اتومبیل (۲) باید بزرگ‌تر از اتومبیل (۱) باشد و داریم:

$$\Delta x_1 = \frac{1}{2}at_1^2 \Rightarrow 100 = \frac{1}{2}\times 2\times t_1^2 \Rightarrow t_1 = 10s$$

$$\Delta x_2 = v_2t_2 \Rightarrow 120 = v_2t_2 \Rightarrow t_2 = \frac{120}{v_2}$$

$$\xrightarrow{t_2 > t_1} \frac{120}{v_2} > 10 \Rightarrow v_2 < 12\frac{m}{s}$$

www.mapedu.ir

از طرفی هنگامی‌که دو اتومبیل از کنار هم می‌گذرند، مکان آن‌ها برابر است و داریم:

$$\begin{cases} x_1 = \frac{1}{2}at^2 \Rightarrow x_1 = t^2 \\ x_2 = v_2 t + x_0 \Rightarrow x_2 = v_2 t - 20 \end{cases}$$

$$\xrightarrow{x_1 = x_2} t^2 = v_2 t - 20 \Rightarrow t^2 - v_2 t + 20 = 0$$

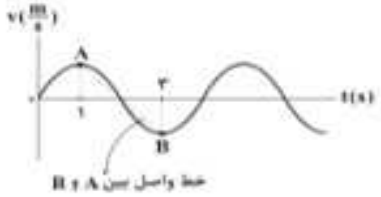
برای آن‌که اتومبیل‌ها دو بار از کنار هم عبور کنند، معادلهٔ فوق باید دو جواب داشته باشد، یعنی $\Delta > 0$ است و داریم:

$$\Delta = b^2 - 4ac \Rightarrow \Delta = v_2^2 - 4 \times 20 \times 1 = v_2^2 - 80$$

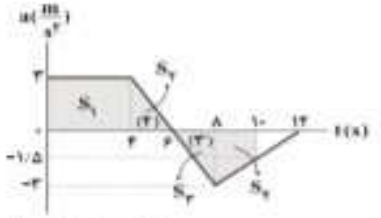
$$\xrightarrow{\Delta > 0} v_2^2 - 80 > 0 \Rightarrow v_2 > 4\sqrt{5}\,\frac{m}{s}$$

بنابراین سرعت اتومبیل (۲) باید در بازهٔ $4\sqrt{5}\,\frac{m}{s} < v_2 < 12\,\frac{m}{s}$ باشد.

۱۶۱ **۴** شیب خط واصل بین دو نقطه از منحنی سرعت ـ زمان، برابر شتاب متوسط متحرک می‌باشد. بین گزینه‌های داده‌شده، تنها در بازهٔ زمانی $t_1 = 1s$ تا $t_2 = 3s$ شیب خط واصل بین دو نقطه منفی بوده و شتاب متوسط متحرک در خلاف جهت محور x است.



۱۶۲ **۱** ابتدا دقت کنید که با توجه به برابری مثلث‌های (۲) و (۳)، شتاب متحرک در لحظهٔ $t = 8s$ برابر $-3\,\frac{m}{s^2}$ است. در ادامه با محاسبهٔ مساحت زیر نمودار می‌توان پاسخ سؤال را به دست آورد.

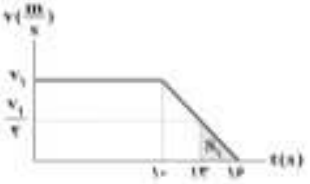


$$\begin{cases} S_1 = 4 \times 3 = 12 \\ S_2 = \frac{3 \times 2}{2} = 3 \\ S_3 = \frac{3 \times 2}{2} = 3 \\ S_4 = \frac{1/5 + 3}{2} \times 2 = 4/5 \end{cases} \Rightarrow \Delta v = S_1 + S_2 - S_3 - S_4 = 7/5\,\frac{m}{s}$$

بنابراین شتاب متوسط متحرک در ۱۰ ثانیهٔ نخست برابر است با:

$$a_{av} = \frac{\Delta v}{\Delta t} = \frac{7/5}{10} = 0/75\,\frac{m}{s^2}$$

۱۶۳ **۲** نمودار سرعت ـ زمان متحرک به شکل زیر است.



مسافت طی‌شده در ۳ ثانیهٔ آخر برابر $4/5m$ است، بنابراین داریم:

$$S_1 = 4/5 \Rightarrow \frac{\frac{v_1}{2} \times 3}{2} = 4/5 \Rightarrow v_1 = 6\,\frac{m}{s}$$

برای به دست آوردن سرعت متوسط در کل حرکت، باید مساحت زیر کل نمودار را به دست آوریم:

$$\Delta x = S = \frac{16 + 10}{2} \times v_1 = 13 \times 6 = 78m$$

بنابراین:

$$v_{av} = \frac{\Delta x}{\Delta t} = \frac{78}{16} = \frac{39}{8} = 4/875\,\frac{m}{s}$$

۱۶۴ **۲** تغییرات سرعت برابر با سطح زیر نمودار شتاب ـ زمان است، بنابراین تغییرات سرعت متحرک در بازهٔ زمانی $t = 0$ تا $t = 6s$ برابر است با:

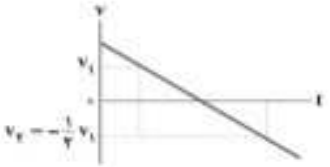
$$\Delta v = -2 \times 5 + 1 \times (6 - 5) = -9\,\frac{m}{s}$$

$$\xrightarrow[\text{تغییر جهت می‌دهد}]{\text{سرعت در لحظهٔ } t = 6s} v - v_0 = -9 \xrightarrow{v = 0} v_0 = 9\,\frac{m}{s}$$

بنابراین بردار سرعت اولیه در SI برابر با $\vec{v}_0 = 9\vec{i}$ است.

۱۶۵ **۴** به صورت زیر عمل می‌کنیم:

$$v_{av} = \frac{v_1 + v_2}{2} \Rightarrow \frac{1}{4}v_1 = \frac{v_1 + v_2}{2} \Rightarrow v_2 = -\frac{1}{2}v_1$$

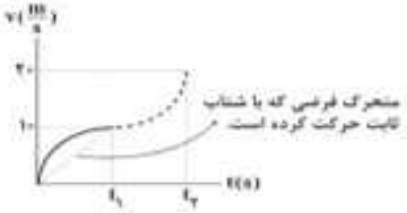


بنابراین متحرک لزوماً در این بازهٔ زمانی تغییر جهت داده و حرکت آن ابتدا کندشونده و سپس تندشونده است.

۱۶۶ ۳ **دقت کنید:** سرعت متوسط در یک بازهٔ زمانی، کم‌تر از بیشترین مقدار سرعت لحظه‌ای در آن بازهٔ زمانی و بیشتر از کم‌ترین مقدار سرعت لحظه‌ای در آن بازه می‌باشد.

در قسمت اول حرکت (از صفر تا t_1) می‌توان گفت:

۱ـ سرعت متوسط در این بازهٔ زمانی کم‌تر از بیشترین مقدار سرعت لحظه‌ای است ($v_{av_1} < 10\frac{m}{s}$).



۲ـ با مقایسهٔ سطح زیر نمودار سرعت ـ زمان مشخص است، جابه‌جایی متحرک بیش از متحرک فرضی است که با شتاب ثابت حرکت کرده و سرعتش از صفر به $10\frac{m}{s}$ رسیده است. بنابراین:

$$\begin{cases} v_{av_1} > v'_{av_1} \\ v'_{av_1} = \frac{0+10}{2} = 5\frac{m}{s} \end{cases} \Rightarrow v_{av_1} > 5\frac{m}{s}$$

مشاهده می‌کنید که در مرحلهٔ اول می‌توان نوشت:

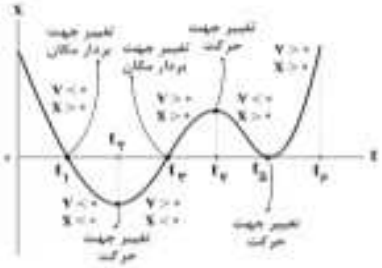
$$5\frac{m}{s} < v_{av_1} < 10\frac{m}{s}$$

۱۶۷ ۱ **بررسی عبارت‌ها:**

الف) بردار مکان متحرک هنگامی تغییر جهت می‌دهد که علامت x عوض شود. در لحظات t_1 و t_4، نمودار، محور x را قطع کرده است و علامت x عوض شده است. دقت کنید که در لحظهٔ t_5، مکان متحرک صفر می‌شود ولی علامت آن تغییر نمی‌کند. (✗)

ب) متحرک هنگامی تغییر جهت می‌دهد که علامت سرعت آن عوض شود. با توجه به این‌که شیب نمودار مکان ـ زمان برابر با سرعت است، می‌توان نتیجه گرفت در لحظات t_4، t_5 و t_6 علامت سرعت عوض شده است و جهت حرکت متحرک تغییر کرده است. (✗)

ج) متحرک در لحظهٔ t_5 از مبدأ مکان ($x=0$) می‌گذرد و در آن لحظه جهت حرکت آن عوض می‌شود، زیرا در این لحظه $x=0$ است و علامت شیب نمودار تغییر کرده است. (✓)



۱۶۸ ۴ فرض کنیم سرعت اولیهٔ متحرک برابر v_0 باشد. با توجه به مفهوم شتاب، سرعت در لحظهٔ $t_1 = 2s$ برابر $v_1 = v_0 + 2a$، در لحظهٔ $t_2 = 6s$ برابر $v_2 = v_0 + 6a$ و در لحظهٔ $t_3 = 7s$ برابر $v_3 = v_0 + 7a$ است. بنابراین:

$$x_2 - x_1 = \frac{v_1 + v_2}{2}\Delta t \text{ : جابه‌جایی از } t_1 \text{ تا } t_2$$

$$\Rightarrow 4 - 20 = \frac{v_0 + 2a + v_0 + 6a}{2} \times (6-2)$$

$$\Rightarrow -16 = (v_0 + 4a) \times 4 \Rightarrow v_0 + 4a = -4 \quad (I)$$

$$x_3 - x_2 = \frac{v_2 + v_3}{2}\Delta t \text{ : جابه‌جایی از } t_2 \text{ تا } t_3$$

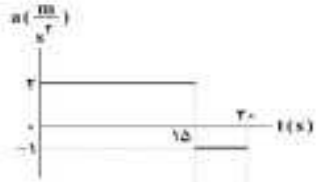
$$\Rightarrow -10 - 4 = \frac{v_0 + 6a + v_0 + 7a}{2} \times (7-6) \Rightarrow v_0 + \frac{13}{2}a = -14 \quad (II)$$

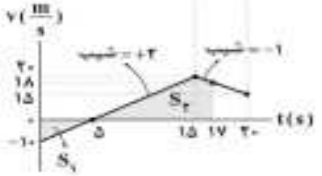
در نهایت با کم کردن رابطهٔ (I) از (II) داریم:

$$\xrightarrow{(II)-(I)} \frac{5}{2}a = -14 - (-4) \Rightarrow \frac{5}{2}a = -10$$

$$\Rightarrow a = -4\frac{m}{s^2} \Rightarrow |a| = 4\frac{m}{s^2}$$

۱۶۹ ۴ ابتدا با توجه به این‌که شیب نمودار سرعت ـ زمان برابر شتاب است، نمودار سرعت ـ زمان را از روی نمودار شتاب ـ زمان رسم می‌کنیم. توجه کنید که سرعت در لحظهٔ $t = 5s$ برابر صفر است، زیرا متحرک در این لحظه تغییر جهت می‌دهد.





در ادامه با استفاده از مساحت زیر نمودار سرعت ـ زمان، می‌توانیم جابه‌جایی متحرک در ۱۷ ثانیهٔ نخست حرکت را به دست آوریم.

$$\Delta x = -S_1 + S_2 = \frac{-5\times 10}{2} + \left(\frac{20\times 10}{2} + \frac{20+18}{2}\times 2\right)$$

$$\Rightarrow \Delta x = -25 + (100+38) = 113\,m$$

بنابراین مکان متحرک در لحظهٔ $t=17s$ برابر است با:

$$\Delta x = x - x_0 \Rightarrow 113 = x - (-300) \Rightarrow x = -187\,m$$

$$\Rightarrow \text{بردار مکان}: \vec{x} = -187\,\vec{i}\ (m)$$

۱۷۰ ۱ سرعت واگن و قطار در لحظهٔ t_1 با هم برابر است، بنابراین اگر از لحظهٔ t_1 به بعد، نمودار سرعت ـ زمان آن‌ها را رسم کنیم، داریم:

در بازهٔ t_1 تا t_2، سرعت واگن به اندازهٔ v_0 کم می‌شود تا به صفر برسد، پس با توجه به این‌که بزرگی شتاب قطار ۲ برابر بزرگی شتاب واگن است، سرعت قطار به اندازهٔ $2v_0$ زیاد می‌شود تا به $3v_0$ برسد.

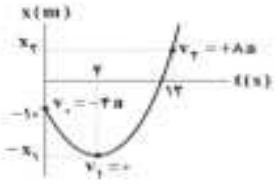
در نهایت با محاسبهٔ مساحت زیر نمودار سرعت ـ زمان، می‌توانیم جابه‌جایی قطار و واگن را مقایسه کنیم:

$$\begin{cases} \text{جابه‌جایی واگن}: \Delta x_1 = S_1 = \dfrac{v_0\times\Delta t}{2} \\ \text{جابه‌جایی قطار}: \Delta x_2 = S_1 + S_2 = \dfrac{v_0+3v_0}{2}\times\Delta t = 2v_0\Delta t \end{cases}$$

$$\Rightarrow \frac{\Delta x_2}{\Delta x_1} = \frac{2v_0\Delta t}{\frac{v_0\Delta t}{2}} = 4$$

دقت کنید: برای حل این سؤال، نیازی به دانستن v_0، Δt و a نداریم.

۱۷۱ ۳ متحرک در رأس سهمی $(t=4s)$ تغییر جهت می‌دهد. سرعت در این لحظه برابر صفر است. بنابراین در لحظهٔ $t=0$ سرعت برابر $-4a$ و در لحظهٔ $t=12s$، سرعت برابر $8a$ است. زیرا سرعت در هر ثانیه به اندازهٔ a تغییر می‌کند.



جابه‌جایی در بازهٔ زمانی $0\le t\le 4s$ برابر است با:

$$\Delta x_1 = \frac{v_0+v_1}{2}\times 4 = \frac{-4a+0}{2}\times 4 = -8a$$

جابه‌جایی در بازهٔ زمانی $4s\le t\le 12s$ برابر است با:

$$\Delta x_2 = \frac{v_1+v_2}{2}\times(12-4) = \frac{0+8a}{2}\times 8 = 32a$$

بنابراین متحرک ابتدا به اندازهٔ $8a$ عقب می‌رود و سپس به اندازهٔ $32a$ به سمت جلو حرکت می‌کند، بنابراین در ۱۲ ثانیهٔ اول داریم:

$$\begin{cases} \text{جابه‌جایی}: \Delta x = -8a+32a = 24a \Rightarrow v_{av} = \dfrac{\Delta x}{\Delta t} = \dfrac{24a}{12} = 2a \\ \text{مسافت}: l = 8a+32a = 40a \Rightarrow s_{av} = \dfrac{l}{\Delta t} = \dfrac{40a}{12} = \dfrac{10}{3}a \end{cases}$$

$$\Rightarrow \underbrace{s_{av} - v_{av}}_{8\frac{m}{s}} = \frac{10}{3}a - 2a \Rightarrow 8 = \frac{4}{3}a \Rightarrow a = 6\frac{m}{s^2}$$

متحرک از مکان $x_0 = -10m$ در مدت‌زمان ۴ ثانیه به اندازهٔ $8a$، یعنی $48m$ عقب رفته است و به مکان $x = -10-48 = -58m$ می‌رسد، یعنی در فاصلهٔ ۵۸ متری مبدأ مکان قرار می‌گیرد.

۱۷۲ ۴ شکل زیر، وضعیت حرکت خودروها را نشان می‌دهد.

معادلهٔ حرکت خودروها به صورت زیر است:

$$x_A = \frac{1}{2}at^2 + v_{0A}t + x_{0A} \Rightarrow x_A = \frac{1}{2}\times(-2)t^2 + (v+30)\times t$$

$$\Rightarrow x_A = -t^2 + (v+30)t$$

$$x_B = v_B t + x_{0B} \Rightarrow x_B = vt + 200$$

هنگامی که دو متحرک از کنار هم عبور می‌کنند، مکان آن‌ها برابر می‌شود، بنابراین:

$$x_A = x_B \Rightarrow -t^2 + (v+30)t = vt + 200$$

$$\Rightarrow -t^2 + 30t = 200 \Rightarrow \begin{cases} t_1 = 10s \\ t_2 = 20s \end{cases}$$

پس از ۲۰ ثانیه، دو خودرو برای بار دوم از کنار هم می‌گذرند.

۱۷۳ ۳ اگر مکان متحرک مثبت باشد $(x>0)$، برای آن‌که متحرک از مبدأ مکان دور شود، باید در جهت محور x حرکت کند و سرعت آن هم مثبت باشد. اگر مکان متحرکی منفی باشد $(x<0)$، برای آن‌که متحرک از مبدأ مکان دور شود، باید در خلاف جهت محور x حرکت کند و سرعت آن هم منفی باشد. بنابراین می‌توان نتیجه گرفت که مکان و سرعت متحرک هم‌علامت هستند، یا به عبارت دیگر، بردارهای مکان و سرعت هم‌جهت می‌باشند.

۱۷۴ ۳ متحرک در مدت‌زمان ۲ ثانیه، $-6m$ جابه‌جا شده است، بنابراین سرعت آن برابر است با:

$$v = \frac{\Delta x}{\Delta t} \Rightarrow v = \frac{-6}{2} = -3\frac{m}{s}$$

معادلهٔ مکان ـ زمان متحرک برابر است با:

$$x = vt + x_0 \Rightarrow x = -3t + x_0$$

با توجه به این‌که متحرک در ابتدای دو ثانیهٔ ششم $(10s<t<12s)$، یعنی در لحظهٔ $t=10s$، در مکان $x=-12m$ قرار دارد، داریم:

$$x = -3t + x_0 \xrightarrow[x=-12m]{t=10s} -12 = -3\times 10 + x_0 \Rightarrow x_0 = 18m$$

بنابراین:

$$x = -3t + 18$$