پاسخنامه

ریاضی درجه ۲
معادله ونامعادله

www.mapedu.ir

کانون
فرهنگی
آموزش
قلم‌چی

1 - گزینهٔ «۱» *(فرشاد حسن‌زاده)*

از اینکه $x=-2a$ ریشهٔ عبارت A می‌باشد پس:

$$a(-2a)+8=0 \Rightarrow -2a^2=-8 \Rightarrow a=\pm 2$$

چون سمت راست تعیین علامت منفی است پس مقدار منفی برای ضریب x مورد قبول است. حال $a+b$، ریشهٔ عبارت B است. پس:

$$a+b=-2+b \Rightarrow (b-2)b-2-1=0$$

$$b^2-2b-3=0 \Rightarrow b=-1\ ,\ b=3$$

چون سمت راست تعیین‌علامت B مثبت است پس ضریب x باید مثبت باشد یعنی $b=3$

$$\Rightarrow a+b=-2+3=1$$

(معادله، نامعادله، تعیین علامت) (ریاضی ۱، صفحه‌های ۸۳ تا ۸۸)

2- گزینهٔ «۱» *(بهزاد محرمی)*

ابتدا تغییر متغیر $x^2+3x+3=t$ انجام می‌دهیم:

$$x^2+3x+3=t \Rightarrow x^2+3x+5=t+2$$

در نتیجه داریم:

$$t=\sqrt{t+2} \Rightarrow t^2=t+2 \Rightarrow t^2-t-2=0$$

$$(t+1)(t-2)=0 \Rightarrow \begin{cases} t=-1 \\ t=2 \end{cases}$$

حتماً دقت کنیم که منظور از ریشه‌های معادله، مقدار متغیر x است، $t=-1$ قابل قبول نیست، زیرا رادیکال برابر با ۱- نمی‌شود. پس فقط $t=2$ قابل قبول است و داریم:

$$x^2+3x+3=2 \Rightarrow x^2+3x+1=0$$

معادلهٔ اخیر ۲ جواب دارد که حاصل جمع ریشه‌های آن برابر است با:

$$S=\frac{-b}{a}=\frac{-3}{1}=-3$$

(معادله، نامعادله، تعیین علامت) (ریاضی ۲، صفحه‌های ۲۲ تا ۲۴)

---

3 - گزینهٔ «۲» *(فرشاد صدیقی‌فر)*

می‌دانیم که:

$$\begin{cases} |x.y|=|x|.|y| \\ x^3-8=(x-2)(x^2+2x+4) \end{cases}$$

$$\Rightarrow |x-2|(x^2+2x+4)<x^2+2x+4$$

$$\xrightarrow[\text{می‌کنیم و چون همواره مثبت است جهت عوض نمی‌شود}]{\text{طرفین را بر } x^2+2x+4 \text{ تقسیم}}$$

$$|x-2|<1 \Rightarrow -1<x-2<1$$

$$1<x<3 \xrightarrow{\text{جواب}} b-a=2$$

(معادله، نامعادله، تعیین علامت) (ریاضی ۱، صفحه‌های ۸۸ تا ۹۳)

---

4 - گزینهٔ «۲» *(سید جواد نظری)*

کارگر اول را A و کارگر دوم را B می‌نامیم. فرض می‌کنیم t مدت زمانی باشد که کارگر B به تنهایی قادر است کل کار را انجام دهد بنابراین:

کارگر	زمان انجام کار	مقدار کار در یک روز
کارگر A	$t-7$	$\frac{1}{t-7}$
کارگر B	t	$\frac{1}{t}$
A و B با هم	۱۲	$\frac{1}{12}$

$$\frac{1}{t}+\frac{1}{t-7}=\frac{1}{12} \Rightarrow \frac{t-7+t}{t(t-7)}=\frac{1}{12} \Rightarrow \frac{2t-7}{t^2-7t}=\frac{1}{12}$$

$$\Rightarrow t^2-31t+84=0 \Rightarrow (t-3)(t-28)=0 \Rightarrow \begin{cases} t=28 \\ t=3 \ \text{غ‌ق‌ق} \end{cases}$$

(معادله، نامعادله، تعیین علامت) (ریاضی ۲، صفحه‌های ۱۹ تا ۲۴)

---

5 - گزینهٔ «۱» *(پویان طهرانیان)*

برای حل نامعادله عدد ۱ را به طرف دیگر برده مخرج مشترک می‌گیریم، (حواسمان باشد اجازهٔ طرفین‌وسطین نداریم)

$$\frac{4x^2+6x-3}{3x^2+4x-4}-1\le 0 \Rightarrow \frac{4x^2+6x-3-3x^2-4x+4}{3x^2+4x-4}\le 0$$

$$\Rightarrow \frac{x^2+2x+1}{3x^2+4x-4}\le 0 \Rightarrow \frac{(x+1)^2}{(3x-2)(x+2)}\le 0 \xrightarrow{\text{تعیین علامت}}$$

x		-2		-1		$\frac{2}{3}$	
			مضاعف				
عبارت	+	ت‌ن	-	0	-	ت‌ن	+

$$\Rightarrow -2<x<\frac{2}{3} \text{ :مجموعه جواب نامعادله}$$

حال کافی است این مجموعه جواب را به‌صورت یک نامعادلهٔ قدر مطلقی بنویسیم:

نکته: $\alpha<x<\beta \Rightarrow |x-\frac{\alpha+\beta}{2}|<\frac{\beta-\alpha}{2}$

$$\Rightarrow -2<x<\frac{2}{3} \Rightarrow |x-\frac{-2+\frac{2}{3}}{2}|<\frac{\frac{2}{3}-(-2)}{2} \Rightarrow |x+\frac{2}{3}|<\frac{4}{3}$$

$$\xrightarrow{\times 3} |3x+2|<4 \Rightarrow \boxed{a=2}\ ,\ 2b=4 \Rightarrow \boxed{b=2}$$

$$\Rightarrow b-a=0$$

(معادله، نامعادله، تعیین علامت) (ریاضی ۱، صفحه‌های ۸۸ تا ۹۳)

---

6 - گزینهٔ «۲» *(سید جواد نظری)*

ابتدا طرفین معادله را به توان دو می‌رسانیم:

$$ax+9=x^2-6x+9 \Rightarrow x^2-(6+a)x=0$$

$$\Rightarrow x(x-(6+a))=0 \Rightarrow \begin{cases} x=0 \quad \text{غ‌ق‌ق} \\ x=6+a \end{cases}$$

$x=0$ در معادله اصلی صدق نمی‌کند بنابراین قابل قبول نیست.

از طرفی چون طرف چپ معادله داده شده همواره نامنفی است بنابراین طرف راست معادله نیز باید همواره نامنفی باشد پس:

$$x-3\ge 0 \Rightarrow x\ge 3 \xrightarrow{x=6+a} 6+a\ge 3 \Rightarrow a\ge -3$$

(معادله، نامعادله، تعیین علامت) (ریاضی ۲، صفحه‌های ۲۲ تا ۲۴)

7- گزینهٔ «۲» *(فهیمه ولی‌زاده)*

$$\left|\frac{2x+1}{3x-2}\right|>1 \xrightarrow[x\neq\frac{2}{3}]{|3x-2|>0} |2x+1|>|3x-2|$$

$$\Rightarrow (2x+1)^2>(3x-2)^2 \Rightarrow (2x+1)^2-(3x-2)^2>0$$

$$\Rightarrow (2x+1+3x-2)(2x+1+2-3x)>0$$

$$(5x-1)(3-x)>0 \Rightarrow (\frac{1}{5},3)-\{\frac{2}{3}\}$$

(معادله، نامعادله، تعیین علامت) (ریاضی ۱، صفحه‌های ۸۸ تا ۹۳)

8- گزینهٔ «۲» *(محسن قلهلی)*

$$\frac{m}{2x}=\frac{3-x}{2x-x^2} \Rightarrow \frac{m}{2x}=\frac{3-x}{x(2-x)}$$

$$\xrightarrow[x\neq 0\ ,\ x\neq 2]{\times 2x(2-x)} m(2-x)=(3-x)\times 2$$

$$2m-mx=6-2x \Rightarrow 2m-6=mx-2x$$

$$\Rightarrow 2m-6=x(m-2) \Rightarrow x=\frac{2m-6}{m-2}$$

از آنجایی که $x=0$ و $x=2$ مخرج معادله را صفر می‌کنند، اگر جواب به دست آمده یکی از این اعداد باشد، معادله جواب ندارد. پس داریم:

$$x=0 \Rightarrow \frac{2m-6}{m-2}=0 \Rightarrow 2m-6=0 \Rightarrow 2m=6 \Rightarrow m=3$$

$$x=2 \Rightarrow \frac{2m-6}{m-2}=2 \Rightarrow 2m-6=2m-4 \Rightarrow -6=-4 \quad \text{غیرممکن}$$

همچنین باید دقت کنیم اگر مخرج کسر $x=\frac{2m-6}{m-2}$ یعنی $m-2$ برابر صفر باشد معادله ریشه ندارد، در نتیجه $m=2$.

بنابراین به ازای دو مقدار ۳ و $m=2$ معادله جواب ندارد.

(معادله، نامعادله، تعیین علامت) (ریاضی ۲، صفحه‌های ۱۹ تا ۲۱)

9- گزینهٔ «۴» *(اکبر کلاهملکی)*

برای $x > -3$ عبارت $x+4$ مثبت است پس باید:

$x^3+ax^2+bx+c>0$

$x=-2$ باید ریشهٔ ساده و $x=1$ باید ریشهٔ مضاعف معادله $x^3+ax^2+bx+c=0$ باشد. تا مجموعه جواب به‌صورت $(-2,1)\cup(1,+\infty)$ به‌دست آید پس:

$$x^3+ax^2+bx+c=(x+2)(x-1)^2=(x+2)(x^2-2x+1)=$$

$$=x^3-2x^2+x+2x^2-4x+2=x^3-3x+2\Rightarrow \left|\begin{array}{l} a=0\\ b=-3\\ c=2\end{array}\right.$$

(معادله، نامعادله، تعیین علامت) (ریاضی ۱، صفحه‌های ۸۳ تا ۹۳)

10- گزینهٔ «۳» *(علی‌اصغر شریفی)*

با توجه به آن‌که عبارت‌های درجهٔ دوم x^2-2x+3 و x^2+2x+3 همواره مثبت هستند، پس سمت چپ نامعادله همواره مثبت است و برای آن‌که نامعادله برقرار باشد، باید x مثبت باشد، با تقسیم مخرج طرفین نامعادله بر x داریم:

$$\frac{1}{x+\frac{3}{x}-2}+\frac{3}{x+\frac{3}{x}+2}\le 1$$

با تغییر متغیر $t=x+\frac{3}{x}$، نامعادلهٔ بالا به‌صورت زیر تبدیل می‌شود:

$$\frac{1}{t-2}+\frac{3}{t+2}\le 1\Rightarrow \frac{4t-4}{(t-2)(t+2)}\le 1\Rightarrow \frac{4t-4}{(t-2)(t+2)}-1\le 0$$

$$\Rightarrow \frac{4t-t^2}{(t-2)(t+2)}\le 0\Rightarrow \frac{t(4-t)}{(t-2)(t+2)}\le 0$$

با توجه به تعریف t، داریم:

$$x^2-2x+3>0\Rightarrow x^2+3>2x\xrightarrow{x>0} x+\frac{3}{x}>2$$

$$\Rightarrow t>2\Rightarrow t-2>0\ ,\ t+2>0$$

پس برای آن‌که نامعادله برقرار باشد، باید داشته باشیم:

$$4-t\le 0\Rightarrow t\ge 4\Rightarrow x+\frac{3}{x}\ge 4\xrightarrow{x>0} x^2+3\ge 4x$$

$$\Rightarrow x^2-4x+3\ge 0\Rightarrow x\in(-\infty,1]\cup[3,+\infty)$$

$$\xrightarrow{x>0} x\in(0,1]\cup[3,+\infty)$$

در نتیجه: $a=0, b=1, c=3\Rightarrow b+c=1+3=4$

(معادله، نامعادله، تعیین علامت) (ریاضی ۱، صفحه‌های ۸۸ تا ۹۳)

11- گزینهٔ «۲» *(بابک سادات)*

چون سهمی محور x ها را در نقاط ۲ و ۶ قطع کرده پس حتماً عامل $x-2$ و $x-6$ را دارد. پس می‌توان معادله سهمی را به صورت $f(x)=a(x-2)(x-6)$ در نظر گرفت. با جای‌گذاری نقطهٔ $(7,-\frac{5}{2})$ در معادلهٔ سهمی مقدار a را به‌دست می‌آوریم:

$$-\frac{5}{2}=a(7-2)(7-6)\Rightarrow 5a=-\frac{5}{2}\Rightarrow a=-\frac{1}{2}$$

$$f(x)=-\frac{1}{2}(x-2)(x-6)\Rightarrow x_s=\frac{2+6}{2}=4$$

$$\Rightarrow y_s=f(4)=\frac{-1}{2}(4-2)(4-6)=2$$

(تابع و معادلهٔ درجه ۲) (ریاضی ۱، صفحه‌های ۷۸ تا ۸۲)

12- گزینهٔ «۳» *(سعید تن‌آرا)*

اگر معادلهٔ داده شده را به فرم استاندارد بنویسیم خواهیم داشت:

$mx^2+mx+1=0$

چون معادله دارای دو ریشه است لذا $\Delta>0$ و در نتیجه $m^2-4m>0$. با یک تعیین علامت ساده نتیجه می‌گیریم: $m<0$ یا $m>4$. (۱)

از طرفی چون ریشه‌ها هر دو منفی هستند لذا باید $P>0$ و $S<0$.

$$mx^2+mx+1=0\Rightarrow \begin{cases} S=-\frac{m}{m}=-1\\ P=\frac{1}{m}\end{cases}$$

شرط $S<0$ برقرار است بنابراین کافی است قرار دهیم: $P=\frac{1}{m}>0$ و در نتیجه $m>0$ (۲).

از اشتراک جواب‌های (۱) و (۲) نتیجه می‌گیریم: $m>4$.

(تابع و معادلهٔ درجه ۲) (ریاضی ۱، صفحه‌های ۷۰ تا ۷۷) (ریاضی ۲، صفحه‌های ۱۱ تا ۱۸)

13- گزینهٔ «۱» *(سهیل ساسانی)*

فرض کنید ریشه‌های معادلهٔ اولیهٔ α و β باشند. اگر $\frac{3}{2}$ واحد از آن‌ها کم کنیم اعداد $\alpha-\frac{3}{2}$ و $\beta-\frac{3}{2}$ تولید می‌شود که ضرب‌شان برابر است با:

$$(\alpha-\frac{3}{2})(\beta-\frac{3}{2})=\alpha\beta-\frac{3}{2}\alpha-\frac{3}{2}\beta+\frac{9}{4}=$$

$$\alpha\beta-\frac{3}{2}(\alpha+\beta)+\frac{9}{4}$$

حال برای مقدار $\alpha+\beta$ باید از معادلهٔ اصلی S را محاسبه کنیم:

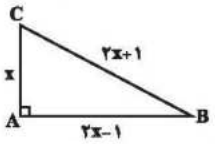
$$S=\alpha+\beta=\frac{-b}{a}=5$$

$$\xrightarrow{\alpha+\beta=5}\alpha\beta-\frac{3}{2}(5)+\frac{9}{4}=\alpha\beta-\frac{21}{4}$$

پس ضرب ریشه‌ها $\frac{21}{4}=5/25$ واحد کم‌تر می‌شود.

(تابع و معادلهٔ درجه ۲) (ریاضی ۲، صفحه‌های ۱۱ تا ۱۳)

14- گزینهٔ «۱» *(علی ساوجی)*



با توجه به فرض سؤال، مثلث $\overset{\Delta}{ABC}$ را مطابق شکل نام‌گذاری می‌کنیم. بنابر قضیهٔ فیثاغورس داریم:

$$(2x+1)^2=x^2+(2x-1)^2\Rightarrow 4x^2+4x+1=x^2+4x^2-4x+1$$

$$\Rightarrow x^2-8x=0\Rightarrow x(x-8)=0\Rightarrow \begin{cases} x=0\Rightarrow \text{غ.ق.ق}\\ \boxed{x=8}\Rightarrow \text{طول ضلع کوچک}\end{cases}$$

$$\Rightarrow \text{محیط مثلث}=x+(2x-1)+(2x+1)=8+15+17=40$$

(تابع و معادلهٔ درجه ۲) (ریاضی ۱، صفحه‌های ۷۰ تا ۷۷)

www.mapedu.ir

15 ـ گزینهٔ «۲» *(اکبر کلاه ملکی)*

نمودار تابع درجه دوم در حالتی که دارای دو ریشهٔ ساده است از ۳ یا ۴ ناحیه عبور می‌کند، همچنین نمودار یک تابع درجه اول که از مبدأ عبور نمی‌کند از ۳ ناحیه محورهای مختصات عبور می‌کند، پس:

$$a \neq 1 \Rightarrow \Delta > 0 \Rightarrow (a+1)^2 - 4(a^2-1) > 0$$

$$\Rightarrow a^2 + 2a + 1 - 4a^2 + 4 > 0 \Rightarrow 3a^2 - 2a - 5 < 0$$

$$\begin{cases} a_1 = -1 \\ a_2 = \frac{5}{3} \end{cases} \Rightarrow -1 < a < \frac{5}{3}, a \neq 1$$

در حالت $a = 1$ نیز داریم:

$y = -2x + 2 \Rightarrow$ از ۳ ناحیه عبور می‌کند.

پس به ازای مقادیر صحیح ۱ و ۰، نمودار تابع از ۳ یا ۴ ناحیه عبور می‌کند.

(تابع و معادلهٔ درجه ۲) (ریاضی ۱، صفحه‌های ۷۰ تا ۸۲) (ریاضی ۲، صفحه‌های ۱۵ تا ۱۸)

---

16 ـ گزینهٔ «۳» *(سعید تن‌آرا)*

می‌دانیم $(x-2)(x+3)(x^2+x+7) = (x^2+x-6)(x^2+x+7)$، با تغییر متغیر $t = x^2 + x$ خواهیم داشت: $(t-6)(t+7) = 30$

در نتیجه: $t^2 + t - 42 = 30$ و لذا $t^2 + t - 72 = 0$. از اتحاد جمله مشترک داریم: $(t+9)(t-8) = 0$ که جواب‌های $t = -9, 8$ را نتیجه می‌دهد.

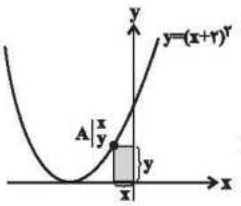
اگر $t = -9$ آنگاه معادلهٔ $x^2 + x = -9$ دارای ریشه حقیقی نمی‌باشد زیرا $\Delta = -35 < 0$.

اما اگر $t = 8$ آنگاه معادلهٔ $x^2 + x = 8$ دارای دلتای بزرگ‌تر از صفر است و حاصل‌ضرب ریشه‌های آن برابر -8 می‌باشد.

(تابع و معادلهٔ درجه ۲) (ریاضی ۲، صفحه‌های ۱۱ تا ۱۳)

---

17 ـ گزینهٔ «۴» *(امیرهوشنگ انصاری)*



با درنظر گرفتن محیط مستطیل $L =$ داریم:

$$L = 2(|x| + y) \xrightarrow{x<0} L = 2(-x+y)$$

با توجه به تساوی $y = (x+2)^2$ داریم:

$$L = 2(-x + (x+2)^2) = 2(x^2 + 3x + 4)$$

$$L = 2x^2 + 6x + 8$$

کم‌ترین مقدار این سهمی عرض رأس آن است، یعنی:

$$L_{min} = \frac{-\Delta}{4a} = \frac{-(-28)}{8} = \frac{7}{2} = 3/5$$

(تابع و معادلهٔ درجه ۲) (ریاضی ۱، صفحه‌های ۷۸ تا ۸۲) (ریاضی ۲، صفحه‌های ۱۳ تا ۱۸)

---

18 ـ گزینهٔ «۲» *(هامد نصیری)*

اگر α و β ریشه‌های معادله باشند، داریم: $\alpha = 3\beta \quad (1)$

$$\alpha + \beta = \frac{6}{2m} \xrightarrow{\alpha = 3\beta} 4\beta = \frac{3}{m} \Rightarrow \beta = \frac{3}{4m} \quad (2)$$

$$\alpha.\beta = \frac{5}{2m} \xrightarrow{\beta = \frac{3}{4m}} \alpha.\frac{3}{4m} = \frac{5}{2m} \Rightarrow \alpha = \frac{10}{3}$$

$\alpha = \frac{10}{3}$ را در معادلهٔ (۱) قرار می‌دهیم.

$$\alpha = 3\beta \Rightarrow \frac{10}{3} = 3\beta \Rightarrow \beta = \frac{10}{9}$$

$\beta = \frac{10}{9}$ را در معادلهٔ (۲) قرار می‌دهیم.

$$\beta = \frac{3}{4m} \Rightarrow \frac{10}{9} = \frac{3}{4m} \Rightarrow m = \frac{27}{40}$$

(تابع و معادلهٔ درجه ۲) (ریاضی ۲، صفحه‌های ۱۱ تا ۱۳)

---

19 ـ گزینهٔ «۱» *(سهیل ساسانی)*

برای پیدا کردن ریشهٔ مشترک، دو معادله را مساوی هم قرار می‌دهیم:

$$x^2 + 3x - k = x^2 - x + k \Rightarrow 4x = 2k \Rightarrow x = \frac{k}{2}$$

مقدار به‌دست آمده را در یکی از دو معادله جای‌گذاری می‌کنیم:

$$x^2 - x + k = 0 \xrightarrow{x = \frac{k}{2}} (\frac{k}{2})^2 - (\frac{k}{2}) + k = 0$$

$$\frac{k^2}{4} - \frac{k}{2} + k = 0 \Rightarrow \frac{k^2}{4} + \frac{k}{2} = 0 \Rightarrow \frac{k^2 + 2k}{4} = 0$$

$$\Rightarrow \begin{cases} k = 0 \Rightarrow x = 0 \text{ غ‌ق‌ق} \\ k = -2 \end{cases}$$

$$k = -2 \Rightarrow \begin{cases} x^2 + 3x + 2 = 0 \Rightarrow \boxed{x = -1}, x = -2 \\ x^2 - x - 2 = 0 \Rightarrow \boxed{x = -1}, x = 2 \end{cases} \xrightarrow{\text{ضرب ریشه‌ها}} -4$$

دقت کنید که به‌ازای $k = 0$، ریشهٔ مشترک معادله $x = 0$ است. درحالی‌که در صورت سؤال اشاره شده ریشهٔ مشترک دو معادله، غیرصفر است. بنابراین $k = 0$ غیرقابل قبول است.

(تابع و معادلهٔ درجه ۲) (ریاضی ۱، صفحه‌های ۷۰ تا ۷۷) (ریاضی ۲، صفحه‌های ۱۱ تا ۱۳)

---

20 ـ گزینهٔ «۱» *(علی‌اصغر شریفی)*

با توجه به معادلهٔ داده شده حاصل‌ضرب دو ریشه برابر با ۳ می‌شود، بنابراین:

$$\alpha\beta = 3 \Rightarrow \frac{r}{\sqrt{r^2+1}} \times \frac{r}{\sqrt{r^2-1}} = 3 \Rightarrow \frac{r^2}{\sqrt{r^4-1}} = 3$$

$$\Rightarrow \frac{r^4}{r^4-1} = 9 \Rightarrow r^4 = \frac{9}{8} \Rightarrow r^2 = \sqrt{\frac{9}{8}} = \frac{3}{2\sqrt{2}}$$

برای محاسبهٔ b داریم:

$$\left.\begin{aligned} \alpha = \frac{r}{\sqrt{r^2+1}} \Rightarrow \alpha^2 = \frac{r^2}{r^2+1} \\ \beta = \frac{r}{\sqrt{r^2-1}} \Rightarrow \beta^2 = \frac{r^2}{r^2-1} \end{aligned}\right\} \Rightarrow \frac{1}{\alpha^2} + \frac{1}{\beta^2} = \frac{r^2+1}{r^2} + \frac{r^2-1}{r^2} = \frac{2r^2}{r^2} = 2$$

$$\Rightarrow \frac{\alpha^2 + \beta^2}{\alpha^2\beta^2} = 2 \Rightarrow \frac{(a+\beta)^2 - 2\alpha\beta}{(\alpha\beta)^2} = 2 \Rightarrow \frac{b^2 - 2\times 3}{3^2} = 2$$

$$\Rightarrow b^2 = 24 \Rightarrow b = \pm 2\sqrt{6}$$

بنابراین:

$$br^2 = \pm 2\sqrt{6} \times \frac{3}{2\sqrt{2}} = \frac{\pm 3\sqrt{6}}{\sqrt{2}} = \pm 3\sqrt{3}$$

(تابع و معادلهٔ درجه ۲) (ریاضی ۲، صفحه‌های ۱۱ تا ۱۳)

www.mapedu.ir

21- گزینهٔ «۳» (شهرام ولایی)

$$x-\frac{1}{x}=-1\Rightarrow x^2-1=-x\Rightarrow x^2+x=1$$

$$x^4+3x^2+4=(x^4+4)+3x^2=(x^2+2)^2-4x^2+3x^2$$

$$=(x^2+2)^2-x^2$$

$$=(x^2+2+x)(x^2+2-x)$$

$$\Rightarrow\frac{x^4+3x^2+4}{x^2-x+2}=\frac{(x^2+2+x)(x^2+2-x)}{x^2-x+2}$$

$$=x^2+2+x=1+2=3$$

(توان‌های گویا و عبارت‌های جبری) (ریاضی ۱، صفحه‌های ۶۲ تا ۶۷)

22- گزینهٔ «۴» (وحید ون‌آبادی)

$$\frac{x^{0/5}}{\sqrt{3}-\sqrt{2}+1}\times\frac{\sqrt{3}+(\sqrt{2}-1)}{\sqrt{3}+(\sqrt{2}-1)}=\frac{x^{0/5}(\sqrt{3}+\sqrt{2}-1)}{3-(2+1-2\sqrt{2})}$$

$$=\frac{x^{0/5}(\sqrt{3}+\sqrt{2}-1)}{2\sqrt{2}}\times\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}}=\frac{x^{0/5}(\sqrt{6}+2-\sqrt{2})}{4}$$

$$2+\sqrt{6}-\sqrt{2}\Rightarrow\frac{x^{0/5}}{4}=1$$

$$x^{0/5}=4\Rightarrow x=4^2=16$$

23- گزینهٔ «۲» (سروش موئینی)

$3-2\sqrt{2}$ همان $(\sqrt{2}-1)^2$ است. پس داریم:

$$\sqrt{3-2\sqrt{2}}=\sqrt{(\sqrt{2}-1)^2}=(\sqrt{2}-1)$$

برای گویا شدن حاصل عبارت باید جواب ریشهٔ سوم حتماً $a-\sqrt{2}$ $a\in\mathbb{Z}$، باشد، بنابراین:

$$\sqrt[3]{20+k\sqrt{2}}=a-\sqrt{2}\Rightarrow 20+k\sqrt{2}=a^3-3\sqrt{2}a^2+6a-2\sqrt{2}$$

$$=\underbrace{a^3+6a}_{20}\underbrace{-(3a^2+2)}_{+k}\sqrt{2}$$

از رابطهٔ $20=a^3+6a$ با کمی دقت $a=2$ است پس:

$$k=-(3\times 2^2+2)=-14$$

(توان‌های گویا و عبارت‌های جبری) (ریاضی ۱، صفحه‌های ۴۸ تا ۶۷)

24- گزینهٔ «۱» (علی‌اصغر شریفی)

ابتدا مخرج کسرها را ساده می‌کنیم:

$$2\pm\sqrt{3}=\frac{1}{2}(4\pm 2\sqrt{3})=\frac{1}{2}(\sqrt{3}\pm 1)^2$$

$$\Rightarrow\begin{cases}\sqrt{2}+\sqrt{2+\sqrt{3}}=\sqrt{2}+\frac{\sqrt{2}}{2}(\sqrt{3}+1)\\ =\frac{3\sqrt{2}}{2}+\frac{\sqrt{6}}{2}=\frac{\sqrt{6}}{2}(\sqrt{3}+1)\\ \sqrt{2}-\sqrt{2-\sqrt{3}}=\sqrt{2}-\frac{\sqrt{2}}{2}(\sqrt{3}-1)\\ =\frac{3\sqrt{2}}{2}-\frac{\sqrt{6}}{2}=\frac{\sqrt{6}}{2}(\sqrt{3}-1)\end{cases}$$

حال عبارت خواسته شده را ساده می‌کنیم:

$$\frac{2+\sqrt{3}}{\sqrt{2}+\sqrt{2+\sqrt{3}}}+\frac{2-\sqrt{3}}{\sqrt{2}-\sqrt{2-\sqrt{3}}}=\frac{\frac{1}{2}(\sqrt{3}+1)^2}{\frac{\sqrt{6}}{2}(\sqrt{3}+1)}+\frac{\frac{1}{2}(\sqrt{3}-1)^2}{\frac{\sqrt{6}}{2}(\sqrt{3}-1)}$$

$$=\frac{\sqrt{3}+1}{\sqrt{6}}+\frac{\sqrt{3}-1}{\sqrt{6}}=\frac{2\sqrt{3}}{\sqrt{6}}=\sqrt{2}$$

(توان‌های گویا و عبارت‌های جبری) (ریاضی ۱، صفحه‌های ۶۲ تا ۶۷)

25- گزینهٔ «۲» (پویان طهرانیان)

در شکل می‌بینیم که رأس سهمی $(-2,1)$ می‌باشد، می‌دانیم اگر (h,k) مختصات رأس سهمی باشد، ضابطهٔ آن به‌صورت $f(x)=a(x-h)^2+k$ خواهد بود، پس داریم:

$$f(x)=a(x+2)^2+1\xrightarrow[\text{ضریب } x^2=-\frac{1}{2}]{\text{در صورت سؤال}}$$

$$\Rightarrow a=-\frac{1}{2}\Rightarrow f(x)=-\frac{1}{2}(x+2)^2+1$$

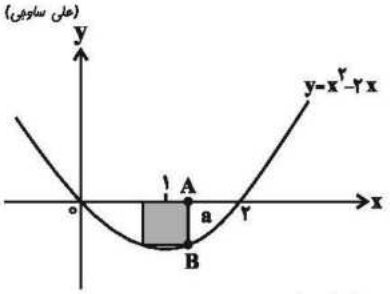
$$\xrightarrow{\text{صفرهای تابع}}f(x)=0\Rightarrow -\frac{1}{2}(x+2)^2+1=0$$

$$\Rightarrow(x+2)^2=2\Rightarrow\begin{cases}x+2=\sqrt{2}\Rightarrow x=\sqrt{2}-2\\ x+2=-\sqrt{2}\Rightarrow x=-\sqrt{2}-2\end{cases}$$

پس قدر مطلق تفاضل ریشه‌ها برابر است با: $|(\sqrt{2}-2)-(-\sqrt{2}-2)|=2\sqrt{2}$

(تابع و معادلهٔ درجه ۲) (ریاضی ۱، صفحه‌های ۷۸ تا ۸۲) (ریاضی ۲، صفحه‌های ۱۱ تا ۱۸)

26- گزینهٔ «۱» (علی ساوجی)



نقاط برخورد سهمی با محور xها را می‌یابیم:

$$x^2-2x=0\Rightarrow x(x-2)=0\Rightarrow x=0,2$$

اگر طول هر ضلع مربع را a در نظر بگیریم، آن‌گاه به دلیل تقارن شکل، عدد ۱ وسط ضلع مربع قرار دارد و طول نقطهٔ A برابر $1+\frac{a}{2}$ می‌شود. در نتیجه مختصات نقطهٔ B به‌صورت $(1+\frac{a}{2},-a)$ خواهد بود. نقطهٔ B در معادلهٔ سهمی صدق می‌کند:

$$-a=(1+\frac{a}{2})^2-2(1+\frac{a}{2})\Rightarrow -a=1+a+\frac{a^2}{4}-2-a$$

$$\Rightarrow a^2+4a-4=0\Rightarrow\begin{cases}a=-2-2\sqrt{2}<0 & \text{غ‌ق‌ق}\\ a=-2+2\sqrt{2}>0 & \text{ق‌ق}\end{cases}$$

$$\Rightarrow S_{\text{مربع}}=a^2=(-2+2\sqrt{2})^2=4+8-8\sqrt{2}=12-8\sqrt{2}$$

(تابع و معادلهٔ درجه ۲) (ریاضی ۱، صفحه‌های ۷۸ تا ۸۲) (ریاضی ۲، صفحه‌های ۱۱ تا ۱۸)

27- گزینهٔ «۱» (علی ساوجی)

در معادلهٔ $x^2-3x-2m+1=0$، مجموع ریشه‌ها از رابطهٔ زیر به دست می‌آید:

$$S=x_1+x_2=\frac{-b}{a}=3\Rightarrow x_1+x_2=3$$

این رابطه همراه با رابطهٔ $2x_1-3x_2=6$ یک دستگاه تشکیل می‌دهند.

$$\begin{cases}2x_1-3x_2=6\\ x_1+x_2=3\end{cases}\xrightarrow{\times 3}\begin{cases}2x_1-3x_2=6\\ 3x_1+3x_2=9\end{cases}$$

$$+5x_1=15\rightarrow x_1=3$$

بنابراین یکی از ریشه‌های معادله $x_1=3$ است که با جاگذاری آن در معادله خواهیم داشت:

$$9-9-2m+1=0\Rightarrow m=\frac{1}{2}$$

(هندسهٔ تحلیلی و جبر) (ریاضی ۲، صفحه‌های ۱۱ تا ۱۳)

28- گزینهٔ «۲» *(پویان طهرانیان)*

اگر $x^2 = t$ در نظر بگیریم، آن‌گاه داریم:

$$t^2 - (m^2 - 1)t + 3 - 4m = 0$$

معادلهٔ اصلی دارای ۴ ریشه است، پس معادلهٔ اخیر دارای ۲ ریشهٔ مثبت است، یعنی $\Delta > 0$ ، $S > 0$ ، $P > 0$ از طرفی اگر t_1, t_2 ریشه‌های این معادله باشند، داریم:

$$x^2 = t_1 \Rightarrow x_1 = \sqrt{t_1} \quad , \quad x_2 = -\sqrt{t_1}$$

$$x^2 = t_2 \Rightarrow x_3 = \sqrt{t_2} \quad , \quad x_4 = -\sqrt{t_2}$$

در مسأله ذکر شده که مجموع مربعات ریشه‌ها برابر ۳۰ است، پس:

$$(\sqrt{t_1})^2 + (-\sqrt{t_1})^2 + (\sqrt{t_2})^2 + (-\sqrt{t_2})^2 = 30$$

$$\Rightarrow t_1 + t_1 + t_2 + t_2 = 30$$

$$\Rightarrow 2(t_1 + t_2) = 30 \Rightarrow t_1 + t_2 = 15 \Rightarrow S = 15 \Rightarrow -\frac{b}{a} = 15$$

$$\Rightarrow \frac{m^2 - 1}{1} = 15 \Rightarrow m^2 = 16 \Rightarrow m = \pm 4 \xrightarrow[P>0\,,\,S>0\,,\,\Delta>0]{\text{بررسی سه شرط}}$$

$$m = 4 \Rightarrow t^2 - 15t - 13 = 0 \Rightarrow \Delta > 0\,,\,S > 0\,,\,P < 0 \Rightarrow \text{غ ق ق}$$

$$m = -4 \Rightarrow t^2 - 15t + 19 = 0 \Rightarrow \Delta > 0\,,\,S > 0\,,\,P > 0 \Rightarrow \text{ق ق}$$

تنها یک مقدار $m = -4$ برای m وجود دارد.

(تابع و معادلهٔ درجه ۲) (ریاضی ۱، صفحه‌های ۷۰ تا ۷۷) (ریاضی ۲، صفحه‌های ۱۱ تا ۱۳)

29- گزینهٔ «۳» *(مهدی براتی)*

عبارت $8x + 2$ به‌ازای $x > -\frac{1}{4}$ همواره مثبت و به‌ازای $x \le -\frac{1}{4}$ نامثبت است.

پس عبارت داده شده در بازهٔ $(-\frac{1}{4}, +\infty)$ زمانی مثبت است که برای عبارت درجه دوم $3x^2 + 2mx + m$ یکی از دو حالت زیر برقرار باشد:

حالت اول: عبارت $3x^2 + 2mx + m$ ریشه‌ای نداشته باشد و همواره مثبت باشد. در این‌صورت باید داشته باشیم:

$$\begin{cases} x^2 \text{ ضریب}: 3 > 0 \\ \Delta < 0 \Rightarrow \Delta = 4m^2 - 12m < 0 \Rightarrow 4m(m-3) < 0 \Rightarrow \boxed{0 < m < 3} \end{cases}$$

x		$-\frac{1}{4}$	
$(8x+2)(\underbrace{3x^2+2mx+m}_{\text{همواره مثبت}})$	$-$	0	$+$

حالت دوم: عبارت $3x^2 + 2mx + m$ یک ریشه مضاعف کوچکتر یا مساوی $-\frac{1}{4}$ داشته باشد.

در این صورت باید $\Delta = 0$ باشد: $\Delta = 4m^2 - 12m = 0 \Rightarrow m = 0$ یا $m = 3$

اگر $m = 0$ باشد، نامعادله به‌صورت $(8x+2)(3x^2) < 0$ می‌شود که با توجه به جدول تعیین علامت مجموعه جواب نامعادله به‌صورت $(-\frac{1}{4}, +\infty) - \{0\}$ می‌شود بنابراین $m \neq 0$ است.

x		$-\frac{1}{4}$		0	
$(8x+2)(3x^2)$	$-$	0	$+$	0	$+$

اگر $m = 3$ باشد نامعادله به‌صورت $(8x+2)(3x^2 + 6x + 3) < 0$ می‌شود.

ریشهٔ مضاعف $3x^2 + 6x + 3 = 0 \Rightarrow x = -1$

در این حالت جواب نامعادله $(-\frac{1}{4}, +\infty)$ است. بنابراین $\boxed{m = 3}$ قابل قبول است.

x		-1		$-\frac{1}{4}$	
$(8x+2)(3x^2+6x+3)$	$-$	0	$-$	0	$+$

مقادیر قابل قبول m به‌صورت $0 < m \le 3$ است که شامل ۳ عدد صحیح است.

(معادله‌ها و نامعادله‌ها) (ریاضی ۱، صفحه‌های ۸۳ تا ۹۳)

30- گزینهٔ «۲» *(پویان طهرانیان)*

برای حل نامعادلهٔ $\frac{2x-a}{x+b} \ge 3$ به‌صورت زیر عمل می‌کنیم:

$$\frac{2x-a}{x+b} - 3 \ge 0 \Rightarrow \frac{2x-a-3x-3b}{x+b} \ge 0 \Rightarrow \frac{-x-a-3b}{x+b} \ge 0$$

با توجه به بازهٔ داده شده، $x = 3$ ریشهٔ مخرج می‌باشد، پس:

$$3 + b = 0 \Rightarrow b = -3$$

و $x = 10$ ریشهٔ صورت است. بنابراین:

$$-10 - a - 3b = 0$$

$$\Rightarrow -10 - a - 3(-3) = 0 \Rightarrow -1 - a = 0 \Rightarrow a = -1$$

$$\Rightarrow a - b = (-1) - (-3) = 2$$

(معادله‌ها و نامعادله‌ها) (ریاضی ۱، صفحه‌های ۸۳ تا ۹۳)

31- گزینهٔ «۳» *(اکبر کلاه‌ملکی)*

با ساده‌سازی نامعادلهٔ داده شده داریم: $-1 < \frac{-x^2 + 3x + 1}{x - 1} < 3$

$$\xrightarrow{x>1} -(x-1) < -x^2 + 3x + 1 < 3(x-1)$$

$$\Rightarrow \begin{cases} -x^2 + 3x + 1 < 3x - 3 \Rightarrow x^2 > 4 \xrightarrow{x>1} x > 2 \\ -x^2 + 3x + 1 > -x + 1 \\ \Rightarrow x^2 - 4x < 0 \Rightarrow 0 < x < 4 \xrightarrow{x>1} 1 < x < 4 \end{cases}$$

$$\xrightarrow{\text{اشتراک}} 2 < x < 4 \Rightarrow \frac{a+b}{2} = \frac{2+4}{2} = 3$$

(معادله‌ها و نامعادله‌ها) (ریاضی ۱، صفحه‌های ۸۳ تا ۹۳)

32- گزینهٔ «۱» *(اکبر کلاه‌ملکی)*

$x = 4$ ریشه ساده مخرج است ولی عبارت در این نقطه تغییر علامت نداده است پس $x = 4$ ریشه صورت نیز باید باشد.

$$16(m^2 - 2) - 4(3m + 1) - 4 = 0$$

$$\Rightarrow 16m^2 - 32 - 12m - 4 - 4 = 0$$

$$\Rightarrow 16m^2 - 12m - 40 = 0 \Rightarrow \begin{cases} m = 2 \\ m = -\frac{5}{4} \end{cases}$$

از طرفی برای $x > 4$ عبارت مثبت است، پس باید:

$$m^2 - 2 > 0 \Rightarrow m^2 > 2 \Rightarrow m > \sqrt{2} \text{ یا } m < -\sqrt{2}$$

پس پاسخ $m = 2$ است.

(معادله‌ها و نامعادله‌ها) (ریاضی ۱، صفحه‌های ۸۳ تا ۹۳)

33- گزینهٔ «۴» *(مهدی براتی)*

ابتدا عبارت های گویا را با کمک اتحاد مزدوج تجزیه و ساده می‌کنیم:

$$\Rightarrow \frac{(3x+4+x-2)(3x+4-x+2)}{2x+6}$$

$$+\frac{16}{(2x+5+2x-3)(2x+5-2x+3)}=3$$

$$\Rightarrow \frac{(4x+2)(2x+6)}{2x+6}+\frac{16}{8(4x+2)}=3 \Rightarrow 4x+2+\frac{2}{4x+2}=3$$

این معادله را با کمک تغییر متغیر حل می‌کنیم. فرض می‌کنیم:

$$t=4x+2$$

$$\Rightarrow t+\frac{2}{t}=3 \xrightarrow{\times t} t^2+2=3t \Rightarrow t^2-3t+2=0 \Rightarrow \begin{cases} t_1=1 \\ t_2=2 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} 4x+2=1 \Rightarrow x_1=\frac{-1}{4} \\ 4x+2=2 \Rightarrow x_2=0 \end{cases}$$ هر دو جواب قابل‌قبول است

$$\Rightarrow x_1+x_2=-\frac{1}{4}$$

(هندسهٔ تحلیلی و جبر) (ریاضی ۲، صفحه‌های ۱۹ تا ۲۴)

34- گزینهٔ «۲» *(امیرهوشنگ انصاری)*

$$\frac{-x^2+3x+3}{x^2-1}=\frac{m}{x-1}-\frac{x}{x+1}$$

$$\Rightarrow \frac{-x^2+3x+3}{x^2-1}=\frac{mx+m-x^2+x}{x^2-1}$$

$$-x^2+3x+3=mx+m-x^2+x \Rightarrow 3-m=x(m-2)$$

$$\Rightarrow x=\frac{3-m}{m-2}$$

در دو حالت این معادله جواب حقیقی ندارد.

۱) xای به‌دست نیاید یعنی: $m-2=0 \Rightarrow m=2$

۲) x به‌دست بیاید اما ریشه مخرج معادلهٔ اصلی باشد یعنی $(x=1$ یا $x=-1)$

پس:

$$x=\frac{3-m}{m-2}=1 \Rightarrow 3-m=m-2 \Rightarrow m=\frac{5}{2}$$

$$x=\frac{3-m}{m-2}=-1 \Rightarrow 3-m=-m+2 \Rightarrow 3=2$$ غ‌ق‌ق

مجموع مقدارهای m برابر است با $2+\frac{5}{2}=\frac{9}{2}=4/5$

(هندسهٔ تحلیلی و جبر) (ریاضی ۲، صفحه‌های ۱۹ تا ۲۴)

35- گزینهٔ «۳» *(سعید عزیزخانی)*

ابتدا جرم نمک موجود در محلول را به‌دست می‌آوریم: $40kg \times \frac{15}{100}=6kg$ نمک

حال فرآیند افزایش غلظت را انجام می‌دهیم. اول ۷ کیلوگرم نمک را اضافه می‌کنیم و سپس x کیلوگرم از آب محلول را تبخیر می‌کنیم:

$$\frac{6+7}{40+7-x}=\frac{40}{100} \Rightarrow \frac{13}{47-x}=\frac{2}{5}$$

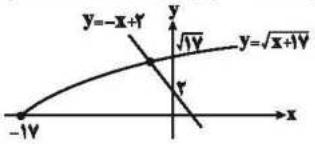
$$65=94-2x \Rightarrow 2x=29 \Rightarrow x=14/5$$

به محلول اولیه ۷ کیلوگرم نمک اضافه شده و ۱۴/۵ کیلوگرم آب از آن کم شده است. بنابراین جرم محلول در نهایت ۷/۵ کیلوگرم کاهش یافته است.

(هندسهٔ تحلیلی و جبر) (ریاضی ۲، صفحه‌های ۱۹ تا ۲۴)

36- گزینهٔ «۲» *(بابک سادات)*

بهترین روش برای یافتن ریشه‌های این معادله، رسم نمودار است. نمودار دو تابع $y=\sqrt{x+17}$ و $y=-x+2$ را در یک دستگاه مختصات رسم می‌کنیم:



همان‌طور که می‌بینید معادله فقط یک ریشهٔ منفی دارد.

(هندسهٔ تحلیلی و جبر) (ریاضی ۲، صفحه‌های ۲۲ و ۲۳)

37- گزینهٔ «۳» *(سید بهراد نظری)*

با توجه به رابطهٔ داده شده بین ریشه‌ها داریم:

$$\begin{cases} x_1<|x_1| \to x_1<0 \\ |x_1|<x_2 \to x_2>0 \end{cases} \Rightarrow x_1x_2=\frac{c}{a}<0$$

$$\Rightarrow 2m-3<0 \Rightarrow m<\frac{3}{2} \quad (1)$$

$$x_1<|x_1|<x_2 \to x_2+x_1=-\frac{b}{a}>0$$

$$\Rightarrow m+5>0 \Rightarrow m>-5 \quad (2)$$

$$\xrightarrow{(1)\cap(2)} -5<m<\frac{3}{2} \xrightarrow{m\in Z} m=-4,-3,-2,-1,0,1$$

بنابراین m می‌تواند ۶ مقدار متمایز اختیار کند.

(هندسهٔ تحلیلی و جبر) (ریاضی ۲، صفحه‌های ۱۱ تا ۱۳)

38- گزینهٔ «۳» *(فرشاد حسن‌زاده رضایی)*

به کمک تغییر متغیر $\frac{1}{\alpha-1}=a$ و $\frac{1}{\beta-1}=b$ داریم:

$$\frac{1}{\alpha-1}=a \Rightarrow \alpha-1=\frac{1}{a} \Rightarrow \alpha=\frac{1}{a}+1$$

$$\frac{1}{\beta-1}=b \Rightarrow \beta-1=\frac{1}{b} \Rightarrow \beta=\frac{1}{b}+1$$

$$\begin{cases} a+b=S=3 \\ a.b=P=-1 \end{cases}$$

پس ریشه‌های جدید به‌صورت زیر خواهند بود:

$$2\alpha=\frac{2}{a}+2$$

$$2\beta=\frac{2}{b}+2$$

$$S_{\text{جدید}}=4+2(\frac{1}{a}+\frac{1}{b})=4+2(\frac{a+b}{a.b})=4+2(\frac{3}{-1})=-2$$

$$P_{\text{جدید}}=(\frac{2}{a}+2)(\frac{2}{b}+2)=\frac{4}{ab}+4(\frac{1}{a}+\frac{1}{b})+4$$

$$=\frac{4}{-1}+4(-3)+4=-12$$

معادلهٔ جدید $x^2+2x-12=0$

(هندسهٔ تحلیلی و جبر) (ریاضی ۲، صفحه‌های ۱۱ تا ۱۳)

www.mapedu.ir

39- گزینهٔ «۲» (اکبر کلاه‌ملکی)

ابتدا ریشه‌های معادلهٔ دومی را می‌یابیم:

$$x+\frac{1}{x+1}=\frac{3}{2}\Rightarrow\frac{x^2+x+1}{x+1}=\frac{3}{2}$$

$$\xrightarrow{x\neq -1}2x^2+2x+2=3x+3$$

$$\rightarrow 2x^2-x-1=0\begin{cases}x=1\\ x=-\frac{1}{2}\end{cases}$$

پس ریشه‌های معادلهٔ $x+\frac{a}{x+2}=b$ برابر ۲ و ۱- هستند.

$$\left.\begin{array}{l}x=2\rightarrow 2+\frac{a}{4}=b\\ x=-1\rightarrow -1+a=b\end{array}\right\}\Rightarrow\begin{cases}a=4\\ b=3\end{cases}\Rightarrow a+b=7$$

راه حل دوم: در معادله $x+\frac{1}{x+1}=\frac{3}{2}$ به‌جای x، $\frac{1}{2}x$ می‌گذاریم:

$$\frac{1}{2}x+\frac{1}{\frac{1}{2}x+1}=\frac{3}{2}\Rightarrow x+\frac{2}{\frac{x+2}{2}}=3\rightarrow x+\frac{4}{x+2}=3$$

$$\Rightarrow\begin{cases}a=4\\ b=3\end{cases}\Rightarrow a+b=7$$

(هندسهٔ تحلیلی و جبر) (ریاضی ۲، صفحه‌های ۱۹ تا ۲۳)

40- گزینهٔ «۴» (اکبر کلاه‌ملکی)

فرض کنید کارگر اول کار را به تنهایی در A روز، کارگر دوم کار را به تنهایی در B روز و کارگر سوم کار را به تنهایی در C روز انجام می‌دهند. پس:

$$\frac{1}{A}+\frac{1}{B}=\frac{1}{3/5}=\frac{2}{7}$$

$$\frac{1}{B}+\frac{1}{C}=\frac{1}{4/5}=\frac{2}{9}$$

$$\frac{1}{A}+\frac{1}{C}=\frac{1}{3/75}=\frac{4}{15}$$

از جمع ۳ رابطه فوق داریم:

$$2(\frac{1}{A}+\frac{1}{B}+\frac{1}{C})=\frac{2}{7}+\frac{2}{9}+\frac{4}{15}$$

$$\Rightarrow\frac{1}{A}+\frac{1}{B}+\frac{1}{C}=\frac{1}{7}+\frac{1}{9}+\frac{2}{15}=\frac{45+35+42}{3^2\times 7\times 5}=\frac{122}{315}$$

پس ۳ کارگر کل کار را در $\frac{315}{122}$ روز یعنی تقریباً در ۲/۶ روز انجام می‌دهند.

(هندسهٔ تحلیلی و جبر) (ریاضی ۲، صفحه‌های ۱۹ تا ۲۳)

41- گزینهٔ «۲» (اکبر کلاه‌ملکی)

$$\frac{1}{x}+\frac{1}{x+1}=\frac{a}{6}\rightarrow\frac{2x+1}{x^2+x}=\frac{a}{6}\xrightarrow{x\neq 0,-1}$$

$$ax^2+ax=12x+6\rightarrow ax^2+(a-12)x-6=0$$

$$\begin{cases}x_1=5x_2+5 & (1)\\ x_1x_2=\frac{c}{a}=\frac{-6}{a} & (2)\end{cases}$$

$$x_1+x_2=-\frac{b}{a}=\frac{12-a}{a}\rightarrow x_1+x_2=\frac{12}{a}-1\xrightarrow{(1),(2)}$$

$$5x_2+5+x_2=-2x_1x_2-1\xrightarrow{(1)}6x_2+5=-2(5x_2+5)x_2-1$$

$$\rightarrow 10x_2^2+16x_2+6=0\xrightarrow{b=a+c}$$

$$x_2=-1\xrightarrow{(1)}x_1=0\ \text{غ‌ق‌ق}$$

$$x_2=-\frac{c}{a}=-\frac{3}{5}\xrightarrow{(1)}x_1=2\ \text{ق‌ق}$$

$$\rightarrow\frac{1}{2}+\frac{1}{3}=\frac{a}{6}\rightarrow\frac{5}{6}=\frac{a}{6}\Rightarrow a=5$$

(هندسهٔ تحلیلی و جبر) (ریاضی ۲، صفحه‌های ۱۹ تا ۲۳)

42- گزینهٔ «۳» (مجتبی نادری)

با تغییر متغیر مناسب $\sqrt{2x^2+x}=t$ داریم:

$$t^2+4t=5\Rightarrow t^2+4t-5=0\Rightarrow(t-1)(t+5)=0$$

$$\Rightarrow\begin{cases}t+5=0\Rightarrow t=-5\Rightarrow\sqrt{2x^2+x}=-5\ (\text{غ‌ق‌ق})\\ t-1=0\Rightarrow t=1\ (\text{ق‌ق})\end{cases}$$

$$\Rightarrow\sqrt{2x^2+x}=1\xrightarrow{\text{توان ۲}}2x^2+x=1$$

$$\Rightarrow 2x^2+x-1=0$$

$$\Rightarrow(2x-1)(x+1)=0$$

$$\Rightarrow\begin{cases}2x-1=0\Rightarrow x=\frac{1}{2}\\ x+1=0\Rightarrow x=-1\end{cases}\Rightarrow$$

هر دو جواب قابل قبول‌اند. زیرا در معادلهٔ اولیه صدق می‌کنند.

$$=\text{قدر مطلق تفاضل جواب‌ها}=|-1-\frac{1}{2}|=|-\frac{3}{2}|=\frac{3}{2}$$

(هندسهٔ تحلیلی و جبر) (ریاضی ۲، صفحه‌های ۲۲ تا ۲۳)

43- گزینهٔ «۲» (وحید راهتی)

$$\sqrt{3x-5}=1+\sqrt{x+2}\xrightarrow{\text{توان ۲}}3x-5=1+2\sqrt{x+2}+x+2$$

$$2x-8=2\sqrt{x+2}\xrightarrow{\div 2}x-4=\sqrt{x+2}\xrightarrow{\text{توان ۲}}$$

$$x^2-8x+16=x+2$$

$$\Rightarrow x^2-9x+14=0\Rightarrow(x-7)(x-2)=0$$

$$\begin{cases}x=7\ \text{ق‌ق}\Rightarrow m=7\Rightarrow m^2-6m=49-42=7\\ x=2\ \text{غ‌ق‌ق}\Rightarrow\text{در معادلهٔ اولیه صدق نمی‌کند}\end{cases}$$

(هندسهٔ تحلیلی و جبر) (ریاضی ۲، صفحه‌های ۲۲ تا ۲۳)

www.mapedu.ir

44 – گزینهٔ «۳» *(سروش مولینی)*

طبق صورت سؤال داریم:

$$x^2+4x+c=0 \Rightarrow \begin{cases} S=\alpha+\beta=-4 \\ P=\alpha\beta=c \end{cases}$$

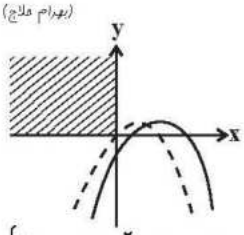
$$x^2+bx+6=0 \Rightarrow \begin{cases} S=\alpha-1+\beta-1=-b \\ \Rightarrow \underbrace{\alpha+\beta}_{-4}=2-b \Rightarrow b=6 \\ P=(\alpha-1)\times(\beta-1)=6 \\ \Rightarrow \underbrace{\alpha\beta}_{c}-\underbrace{(\alpha+\beta)}_{-4}+1=6 \Rightarrow c=1 \end{cases}$$

$$\Rightarrow b+c=7$$

(هندسهٔ تحلیلی و جبر) (ریاضی ۲، صفحه‌های ۱۱ تا ۱۳)

---

45 – گزینهٔ «۲» *(بهرام ملاج)*



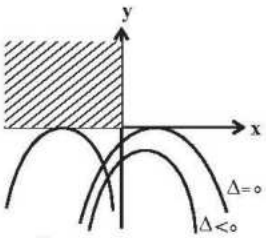
با توجه به اینکه در صورت سؤال اشاره نشده سهمی فقط از ناحیهٔ دوم نمی‌گذرد پس دو حالت وجود دارد.

حالت اول: فقط از ناحیهٔ دوم عبور نکند.

$$\begin{cases} \Delta>0 \Rightarrow 4m^2+4m-8>0 \Rightarrow m<-2 \text{ یا } m>1 \\ S>0 \Rightarrow 2m>0 \Rightarrow m>0 \\ P\ge 0 \Rightarrow -(m-2)\ge 0 \Rightarrow m\le 2 \\ a<0 \Rightarrow \text{همواره برقرار} \end{cases}$$

$$\xrightarrow{\text{اشتراک}} 1<m\le 2 \quad (I)$$

حالت دوم: از ناحیهٔ اول و دوم عبور نکند.



$$\Rightarrow \begin{cases} \Delta\le 0 \Rightarrow 4(m+2)(m-1)\le 0 \\ a<0 \Rightarrow \text{همواره برقرار} \end{cases} \xrightarrow{\text{اشتراک}} -2\le m\le 1 \ (II)$$

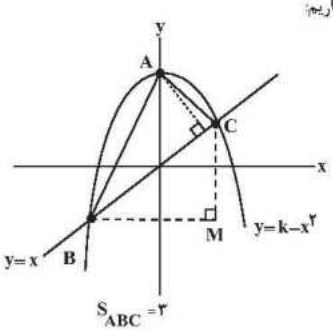
$$\xrightarrow{I \cup II} -2\le m\le 2 \xrightarrow{\text{اعداد طبیعی}} 1,2$$

(هندسهٔ تحلیلی و جبر) (ریاضی ۲، صفحه‌های ۱۱ تا ۱۸)

---

46 – گزینهٔ «۳» *(فرشاد حسن‌زاده رضائی)*

با توجه به شکل زیر داریم:



ارتفاع مثلث برابر است با:

$$y=k-x^2 \Rightarrow A\Big|_{k}^{0} \Rightarrow h=\frac{|k|}{\sqrt{2}}=\frac{k}{\sqrt{2}}$$

برای به‌دست آوردن BC داریم:

$$k-x^2=x \Rightarrow x^2+x-k=0$$

$$MB=MC=|x_2-x_1|=\frac{\sqrt{\Delta}}{|1|}=\sqrt{1+4k}$$

$$\Rightarrow BC=\sqrt{2}\times|x_2-x_1|=\sqrt{2}\sqrt{1+4k}$$

$$\Rightarrow S_{ABC}=\left(\frac{k\sqrt{2}}{\sqrt{2}}\sqrt{1+4k}\right)\div 2=\frac{k\sqrt{1+4k}}{2}=3$$

$$\Rightarrow k^2(1+4k)=36 \Rightarrow 4k^3+k^2-36=0$$

$$\Rightarrow 4k^3-32+k^2-4=0$$

$$\Rightarrow 4(k-2)(k^2+2k+4)+(k-2)(k+2)=0$$

$$\Rightarrow (k-2)(4k^2+9k+18)=0 \Rightarrow k=2$$

(هندسهٔ تحلیلی و جبر) (ریاضی ۲، صفحه‌های ۱۱ تا ۱۸)

---

47 – گزینهٔ «۲» *(سیار راوطلب)*

فرض کنید طول هر قدم سجاد x سانتی‌متر باشد، در این‌صورت طول هر قدم احسان $x+10$ سانتی‌متر است. اگر احسان با n قدم مسیر را طی کند، سجاد با $100+n$ قدم طی می‌کند.

$$\text{سجاد}: 720=\frac{x}{100}\times(n+100)$$

$$\text{احسان}: 720=\frac{x+10}{100}\times n(*)$$

$$\Rightarrow \frac{x}{100}(n+100)=\frac{x+10}{100}\times n$$

$$xn+100x=xn+10n \Rightarrow n=10x$$

$$\xrightarrow{(*)} 720=\frac{x+10}{100}\times n \Rightarrow 720=\frac{x+10}{100}\times 10x$$

$$\Rightarrow 7200=x^2+10x$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x=-90 \text{ غ‌ق‌ق} \\ x=80 \text{ سانتی‌متر} \end{cases}$$

(هندسهٔ تحلیلی و جبر) (ریاضی ۲، صفحه‌های ۱۹ تا ۲۴)

---

48 – گزینهٔ «۳» *(علی ماهیان)*

دو حالت برای فقد جواب داریم:

I) معادله جواب نداشته باشد:

$$I)\ \frac{x}{x^2-4}+\frac{x+k}{x+2}=1 \xrightarrow{(x-2)(x+2)}$$

$$x+(x-2)(x+k)=x^2-4$$

$$\Rightarrow x+x^2+(k-2)x-2k=x^2-4 \Rightarrow (k-1)x-2k+4=0(*)$$

معادلهٔ درجهٔ ۱ می‌باشد و زمانی ریشه ندارد که تابع ثابت غیرصفر باشد.

$$k-1=0 \Rightarrow k=1$$

II) جواب‌ها ریشه‌های مخرج باشند.

$$\xrightarrow[*]{x=2} (k-1)(2)-2k+4=0 \Rightarrow 2=0 \text{ غ‌ق‌ق}$$

$$\xrightarrow[*]{x=-2} (k-1)(-2)-2k+4=0$$

$$\Rightarrow -4k+2+4=0 \Rightarrow k=\frac{3}{2}$$

$$\xrightarrow{\text{ضرب مقادیر } k} 1\times\frac{3}{2}=\frac{3}{2}$$

(هندسهٔ تحلیلی و جبر) (ریاضی ۲، صفحه‌های ۱۹ تا ۲۴)

www.mapedu.ir

49 – گزینهٔ «۱» *(سروش موئینی)*

در $\sqrt{\frac{2-\sqrt{3}}{2}}$ اگر صورت و مخرج را دو برابر کنیم داریم:

$$\sqrt{\frac{4-2\sqrt{3}}{4}}=\sqrt{\frac{(\sqrt{3}-1)^2}{2^2}}=\frac{\sqrt{3}-1}{2}$$

پس مجموع آن با $\frac{1}{2}$ می‌شود $\frac{\sqrt{3}}{2}$ که نسبتش به $\sqrt{6}$ برابر است با:

$$\frac{\frac{\sqrt{3}}{2}}{\sqrt{6}}=\frac{\sqrt{3}}{2\sqrt{6}}=\frac{1}{2\sqrt{2}}=\frac{1}{\frac{3}{2^2}}=2^{\frac{-3}{2}}=2^{-1/5}$$

(توان‌های گویا و عبارت‌های جبری) (ریاضی ۱، صفحه‌های ۵۹ تا ۶۷)

---

50 – گزینهٔ «۴» *(شهرام ولایی)*

فرض می‌کنیم: $x\sqrt[4]{y}+y\sqrt[4]{x}=A$

$$\xrightarrow{\text{توان ۲}} x^2\sqrt{y}+y^2\sqrt{x}+2xy\sqrt[4]{xy}=A^2$$

$$\xrightarrow{xy=1} x^2\sqrt{y}+y^2\sqrt{x}+2=A^2$$

$$\Rightarrow x^2\sqrt{y}+y^2\sqrt{x}=A^2-2$$

$$\xrightarrow{\text{توان ۲}} x^4y+y^4x+2x^2y^2\sqrt{xy}=(A^2-2)^2$$

$$xy(x^3+y^3)+2=(A^2-2)^2 \Rightarrow (A^2-2)^2=54 \begin{cases} A^2-2=\sqrt{54} & \text{ق ق} \\ A^2-2=-\sqrt{54} & \text{غ ق ق} \end{cases}$$

$$(x+y)^3-3xy(x+y)=64-12=52 \qquad \Rightarrow A^2<0$$

$$\Rightarrow A^2=2+\sqrt{54}$$

$$\xrightarrow{A>0} A=\sqrt{2+3\sqrt{6}}$$

(توان‌های گویا و عبارت‌های جبری) (ریاضی ۱، صفحه‌های ۵۹ تا ۶۷)

---

51 – گزینهٔ «۱» *(سعید تن‌آرا)*

اگر ضلع کوچک را x فرض کنیم، ضلع قائمه دیگر برابر $x+2$ خواهد شد و از رابطهٔ فیثاغورس خواهیم داشت:

$$x^2+(x+2)^2=(\sqrt{8})^2$$

که با ساده کردن طرفین تساوی به معادلهٔ درجهٔ دوم زیر خواهیم رسید:

$$x^2+2x-2=0$$

که جواب آن با روش کلّی به‌صورت زیر خواهد بود:

$$\Delta=4+8=12 \ , \ x=\frac{-2\pm2\sqrt{3}}{2}=-1\pm\sqrt{3}$$

با توجه به مثبت بودن x جواب $\sqrt{3}-1$ مورد قبول است که همان اندازه کوچکترین ضلع مثلث است و مجذور آن برابر است با:

$$(\sqrt{3}-1)^2=4-2\sqrt{3}$$

(ترکیبی) (ریاضی ۱، صفحه‌های ۶۳ تا ۷۷)

---

52 – گزینهٔ «۳» *(فرشاد صدیقی‌فر)*

عبارت را تجزیه می‌کنیم:

$$(x-1)(x-2)(x-3)(x-4)=-1$$

$$\Rightarrow (x-1)(x-4)(x-2)(x-3)=-1$$

$$(\underbrace{x^2-5x}_{A}+4)(\underbrace{x^2-5x}_{A}+6)=-1$$

$$(A+4)(A+6)=-1 \Rightarrow A^2+10A+25=0$$

$$(A+5)^2=0 \Rightarrow A=-5$$

$$\xrightarrow{A=x^2-5x} x^2-5x=-5 \Rightarrow x^2-5x+5=0$$

$$\Rightarrow \Delta=25-20=5>0$$

دو ریشه حقیقی متمایز دارد.

(معادله‌ها و نامعادله‌ها) (ریاضی ۱، صفحه‌های ۷۰ تا ۷۷)

---

53 – گزینهٔ «۴» *(کتاب آبی)*

مطابق شکل سهمی رو به پایین از مبدأ می‌گذرد، پس در $y=-2x^2+bx+c$ داریم:

$$y(0) \Rightarrow c=0$$

هم‌چنین طول رأس هر دو سهمی یکی است، پس: $y(0)=0 \Rightarrow c=0$

$$\left.\begin{array}{l} y=-2x^2+bx \Rightarrow x_{s_1}=\frac{-b}{2(-2)}=\frac{b}{4} \\ y=x^2-4x-b \Rightarrow x_{s_2}=-\frac{-4}{2(1)}=2 \end{array}\right\}$$

$$\xrightarrow{\text{مساوی‌اند}} \frac{b}{4}=2 \Rightarrow b=8$$

پس معادلهٔ سهمی‌ها $y=-2x^2+8x$ و $y=x^2-4x-8$ است. و مقدار آن‌ها در $x=2$ برابر است با:

$$y_{s_1}=-2(2^2)+8(2)=8 \qquad y_{s_2}=2^2-4(2)-8=-12$$

و اختلاف عرض رأس‌ها می‌شود: $8-(-12)=20$

(معادله‌ها و نامعادله‌ها) (ریاضی ۱، صفحه‌های ۷۸ تا ۸۲)

---

54 – گزینهٔ «۴» *(میلاد سواری‌ایرگانی)*

با توجه به‌صورت مسئله داریم:

$$f(x)>g(x) \Rightarrow -x^2+ax+7>-x+1$$

$$\Rightarrow -x^2+(a+1)x+6>0$$

با توجه به بازهٔ داده شده جدول تعیین‌علامت عبارت به‌صورت زیر است:

	-3		b	
$-$	0	$+$	0	$-$

$x=-3$ ریشهٔ معادله است: $-(-3)^2+(a+1)(-3)+6=0$

$$\Rightarrow -9+(-3)(a+1)+6=0 \Rightarrow -3(a+1)=3 \Rightarrow a=-2$$

همین‌طور ریشهٔ دیگر برابر b می‌باشد.

$$-x^2-x+6=0 \Rightarrow -(x+3)(x-2)=0$$

ریشهٔ دیگر برابر $x=2$ می‌باشد، پس $b=2$ و داریم: $a+b=0$

(معادله‌ها و نامعادله‌ها) (ریاضی ۱، صفحه‌های ۸۳ تا ۹۳)

55 – گزینهٔ «۴» *(مهدی براتی)*

اگر فرض کنیم $x^2+x+1=t$ داریم:

$$\Rightarrow x^2+x=t-1$$

عبارت $t=x^2+x+1$ همواره مثبت است (چون $\Delta<0, a>0$)

حالا نامعادله را به‌صورت زیر می‌نویسیم:

$$t-1+\frac{3}{t}<3 \Rightarrow t+\frac{3}{t}-4<0 \xrightarrow{\times t} t^2-4t+3<0$$

$$\Rightarrow (t-1)(t-3)<0 \Rightarrow 1<t<3 \xrightarrow{t=x^2+x+1}$$

$$1<x^2+x+1<3$$

$$\begin{cases} x^2+x+1>1 \Rightarrow x^2+x>0 \Rightarrow x(x+1)>0 \\ \Rightarrow x<-1 \text{ یا } x>0 \\ x^2+x+1<3 \Rightarrow x^2+x-2<0 \Rightarrow (x-1)(x+2)<0 \\ \Rightarrow -2<x<1 \end{cases}$$

اشتراک دو جواب به‌دست آمده برابر است با: $x\in(-2,-1)\cup(0,1)$

که شامل هیچ عدد صحیح نیست.

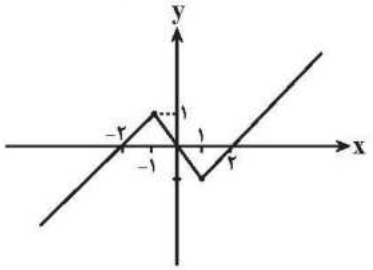
(معادله‌ها و نامعادله‌ها) (ریاضی ۱، صفحه‌های ۸۳ تا ۹۳)

---

56 – گزینهٔ «۱» *(فرشاد حسن‌زاده رضائی)*

از روش رسم برای حل سوال استفاده می‌کنیم. چون ریشه‌های قدر مطلق‌ها $x=1$ و $x=-1$ است ضابطهٔ تابع را در سه بازهٔ $[1,+\infty)$ و $(-1,1)$ و $(-\infty,-1]$ بدست آورده و نمودار تابع را رسم می‌کنیم:

$$y=x+|x-1|-|x+1| \Rightarrow \begin{cases} x+2 & x\le -1 \\ -x & -1<x<1 \\ x-2 & x\ge 1 \end{cases}$$



برای پیدا کردن نقاط تقاطع با محور xها کافیست در دو حالت معادله را حل کنیم.

$$x>1: x-2=0 \Rightarrow x=2$$

$$x<-1: x+2=0 \Rightarrow x=-2$$

مجموعه جواب برابر است با:

$$(-\infty,-2)\cup(0,2) \Rightarrow a+b+c=-2+0+2=0$$

(معادله‌ها و نامعادله‌ها) (ریاضی ۱، صفحه‌های ۸۳ تا ۹۳)

57– گزینهٔ «۲» *(عباس اشرفی)*

$x=2$ ریشهٔ مشترک صورت و مخرج است. چرا که در همسایگی $x=2$ تغییر علامت نداریم و در این نقطه، $P(x)$، تعریف نشده است.

از طرفی $x=-1$ ریشهٔ درجهٔ یک صورت است. بنابراین:

$$P(x)=\frac{(x+1)(x-2)}{x-2}=\frac{x^2-x-2}{x-2}=\begin{cases}a=-1\\ b=2\\ c=-2\end{cases}$$

در نتیجه:

$$\Rightarrow \frac{a+b}{c}=\frac{(-1)+(-2)}{-2}=\frac{-3}{-2}=\frac{3}{2}$$

(معادله‌ها و نامعادله‌ها) (ریاضی ۱، صفحه‌های ۸۴ تا ۸۸)

58– گزینهٔ «۲» *(فهیمه ولی‌زاده)*

ابتدا سمت راست تساوی را ساده‌سازی می‌کنیم:

$$\frac{2}{x-1}+\frac{1}{x}+\frac{1}{x+1}=\frac{2(x)(x+1)+(1)(x-1)(x+1)+(1)(x)(x-1)}{(x-1)(x)(x+1)}$$

$$=\frac{2x^2+2x+x^2-1+x^2-x}{(x-1)(x+1)(x)}=\frac{4x^2+x-1}{(x+1)(x-1)(x)}$$

$$\Rightarrow \frac{2x^2}{x(x-1)(x+1)}=\frac{4x^2+x-1}{(x+1)(x)(x-1)}\Rightarrow 2x^2=4x^2+x-1$$

$$2x^2+x-1=0\Rightarrow\begin{cases}a=2\\ b=1\\ c=-1\end{cases}$$

$$b=a+c\Rightarrow\begin{cases}x=-1 \text{ غ‌ق‌ق (ریشهٔ مخرج)}\\ x=\frac{-c}{a}=\frac{1}{2}\ \checkmark\end{cases}$$

معادله فقط یک جواب دارد.

(هندسهٔ تحلیلی و جبر) (ریاضی ۲، صفحه‌های ۱۹ تا ۲۱)

59– گزینهٔ «۲» *(علیرضا نعمتی)*

$$x^2+x+1-3\sqrt{x^2+x+1}+2=0$$

با تغییر متغیر داریم: $\sqrt{x^2+x+1}=t\Rightarrow t^2-3t+2=0\Rightarrow t=1,2$

$$\Rightarrow\begin{cases}x^2+x+1=1\Rightarrow x^2+x=0\Rightarrow x_1=0,\ x_2=-1\\ x^2+x+1=4\Rightarrow x^2+x-3=0\Rightarrow x_1'=\frac{-1+\sqrt{13}}{2},\ x_2'=\frac{-1-\sqrt{13}}{2}\end{cases}$$

درنتیجه مجموع ریشه‌ها برابر ۲- است.

(هندسهٔ تحلیلی و جبر) (ریاضی ۲، صفحه‌های ۲۲ تا ۲۴)

60– گزینهٔ «۴» *(سهیل حسن‌خان‌پور)*

نامعادله را به‌صورت زیر مرتب می‌کنیم:

$$(x^6-3x^4+3x^2-1)+(2x^2-2)-3\le 0$$

$$\Rightarrow (x^2-1)^3+2(x^2-1)-3\le 0$$

حال به کمک تغییر متغیر داریم:

$x^2-1=t\Rightarrow t^3+2t-3\le 0\Rightarrow$ $t=1$ ریشهٔ معادله است.

$$\Rightarrow (t-1)(t^2+t+3)\le 0$$

در عبارت درجه دوم فوق چون $\Delta<0$ و $a>0$ است، پس ریشه ندارد و همواره مثبت است.

$$\Rightarrow t-1\le 0\Rightarrow x^2-2\le 0\Rightarrow x^2\le 2\Rightarrow -\sqrt{2}\le x\le\sqrt{2}\Rightarrow\begin{cases}a=-\sqrt{2}\\ b=\sqrt{2}\end{cases}$$

$$\Rightarrow b-a=\sqrt{2}-(-\sqrt{2})=2\sqrt{2}$$

(معادله‌ها و نامعادله‌ها) (ریاضی ۱، صفحه‌های ۸۸ تا ۹۱)

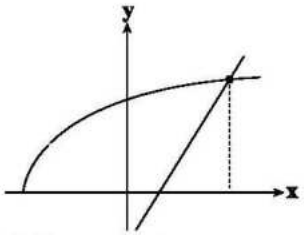
61– گزینهٔ «۱» *(بابک سادات)*

$$\frac{\sqrt{x+5}}{\sqrt{x+7}+3}-\frac{\sqrt{x+5}}{3-\sqrt{x+7}}=\frac{x+5}{\sqrt{x+5}}\quad x\neq -5$$

$$\sqrt{x+5}\left(\frac{1}{\sqrt{x+7}+3}+\frac{1}{\sqrt{x+7}-3}\right)=\sqrt{x+5}$$

$$\xrightarrow{\text{مخرج مشترک}}\frac{2\sqrt{x+7}}{(x+7)-9}=1\Rightarrow 2\sqrt{x+7}=x+20$$

با رسم خط و رادیکال در یک دستگاه براحتی متوجه می‌شویم که این معادله یک ریشهٔ مثبت دارد:



(هندسهٔ تحلیلی و جبر) (ریاضی ۲، صفحه‌های ۱۹ تا ۲۴)

62– گزینهٔ «۴» *(سامان سلامیان)*

$$\left|\frac{x^2+ax+1}{x^2+x+1}\right|<3\Rightarrow -3<\frac{x^2+ax+1}{x^2+x+1}<3$$

$$\xrightarrow{\text{مخرج کسر همواره مثبت است.}}$$

$$-3x^2-3x-3<x^2+ax+1<3x^2+3x+3$$

$$\Rightarrow\begin{cases}2x^2+(3-a)x+2>0\\ 4x^2+(a+3)x+4>0\end{cases}$$

برای آن‌که هریک از نامعادلات فوق همواره برقرار باشند باید هریک از عبارات فوق ریشه نداشته باشند.

$$\begin{cases}\Delta:(3-a)^2-16<0\Rightarrow(3-a)^2<16\Rightarrow|3-a|<4\\ \Rightarrow -4<3-a<4\Rightarrow -1<a<7\\ \Delta:(a+3)^2-64<0\Rightarrow(a+3)^2<64\Rightarrow|a+3|<8\\ \Rightarrow -8<a+3<8\Rightarrow -11<a<5\end{cases}$$

که جواب مشترک به‌صورت $-1<a<5=n$ است، درنتیجه: $m=-1$ ، $m+n=4$

(معادله‌ها و نامعادله‌ها) (ریاضی ۱، صفحه‌های ۸۸ تا ۹۳)

63– گزینهٔ «۴» *(امیرهوشنگ انصاری)*

$$\frac{3}{4}<\frac{x+4}{2x+3}\Rightarrow\frac{x+4}{2x+3}-\frac{3}{4}>0\Rightarrow\frac{7-2x}{4(2x+3)}>0\Rightarrow\frac{-3}{2}<x<\frac{7}{2}$$

$$\frac{x+4}{2x+3}<1\Rightarrow\frac{x+4}{2x+3}-1<0\Rightarrow\frac{1-x}{2x+3}<0\Rightarrow\begin{cases}x<-\frac{3}{2}\\ \text{یا}\\ x>1\end{cases}$$

$$\Rightarrow \text{مجموعه جواب}:(1,\frac{7}{2})$$

$$a=3,b=\frac{a+4}{2b+3}=\frac{7}{7}=1$$

(معادله‌ها و نامعادله‌ها) (ریاضی ۱، صفحه‌های ۸۸ تا ۹۱)

www.mapedu.ir

64– گزینهٔ «۲» *(بهرام ملاح)*

با طرفین وسطین کردن معادله داریم:

$$2ax^2 - x + 2ax - 1 = 2x^2 \quad 2ax \quad 3x \quad 3a$$

$$\Rightarrow (2a-2)x^2 + (4a-4)x + 3a - 1 = 0$$

در صورتی‌که $a = 1$ باشد، معادله به‌صورت $2 = 0$ درمی‌آید. درنتیجه به‌ازای $a = 1$ معادله جواب ندارد. هم‌چنین برای $a \neq 1$ ها در صورتی‌که Δ معادله منفی باشد نیز معادله فاقد جواب است:

$$\Delta = (4a \quad 4)^2 \quad 4(2a \quad 2)(3a \quad 1) - 16(a \quad 1)^2 \quad 8(a \quad 1)(3a-1)$$

$$= 8(a \quad 1)(-a-1) - 0 < a \Rightarrow 1 \quad a \quad 1$$

از این نامعادله تمامی اعداد صحیح به‌جز صفر، ۱ و ۱- شامل شده‌اند. حال به بررسی دو عدد صفر و ۱- می‌پردازیم:

$$a = 1 \Rightarrow \frac{x+1}{x+1} \quad \frac{2x+3}{-2x-1} \quad \frac{2x+3}{-2x-1} \quad 1$$

$$\Rightarrow 2x+3 = -2x \quad 1 \Rightarrow 4x = -4 \Rightarrow x = 1$$

که جواب به‌دست آمده جزء دامنهٔ عبارت گویای سمت چپ نیست. پس به‌ازای $a = -1$ نیز معادله جواب ندارد.

$$a = 0: \frac{x+1}{x} = \frac{2x+3}{-1} + 2x^2 \quad 3x \quad 1 + 3x^2 \quad 4x \quad 1 \quad 0$$

که این معادله دارای ۲ جواب قابل قبول است.

پس به‌ازای تمامی اعداد صحیح به‌جز صفر معادله ریشه ندارد.

(هندسهٔ تحلیلی و جبر) (ریاضی ۲، صفحه‌های ۱۹ تا ۲۴)

65– گزینهٔ «۲» *(سهیل حسن‌خان‌پور)*

ابتدا دامنهٔ عبارات موجود در معادله را حساب می‌کنیم:

$$\left.\begin{array}{l} x+5 \geq 0 \Rightarrow x \geq -5 \\ 10-x \geq 0 \Rightarrow x \leq 10 \\ 3+\sqrt{10-x} \geq 0 \Rightarrow \text{بدیهی} \end{array}\right\} \xrightarrow{\cap} -5 \leq x \leq 10$$

با افزایش x، حاصل $\sqrt{x+5}$ همواره افزایش می‌یابد. هم‌چنین با افزایش x، حاصل $\sqrt{3+\sqrt{10-x}}$ همواره کاهش می‌یابد و حاصل $-\sqrt{3+\sqrt{10-x}}$ همواره زیاد می‌شود. پس سمت چپ معادله با افزایش x همواره زیاد می‌شود. بنابراین کم‌ترین مقدار سمت چپ معادله به‌ازای $x = -5$ و بیش‌ترین آن به‌ازای $x = 10$ رخ می‌دهد. پس حاصل عبارت سمت چپ را به‌ازای این دو مقدار می‌یابیم.

$$x = -5: 5 + \sqrt{+5 \quad 5} \quad \sqrt{3 \quad \sqrt{10 - (-5)}} + \sqrt{3 \quad \sqrt{15}} \simeq 2/6$$

$$x = 10: \sqrt{10 \quad 5} + \sqrt{3 \quad \sqrt{10 \quad 10}} + \sqrt{3 \quad \sqrt{15}} \quad \sqrt{3} - 3/9 \simeq 1/7 \simeq 2/2$$

حاصل $\frac{\sqrt{2}}{2}$ عددی بین $[-2/6, 2/2]$ است. پس معادله دقیقا ۱ ریشه خواهد داشت و در یک نقطه حاصل آن برابر $\frac{\sqrt{2}}{2}$ خواهد شد.

(هندسهٔ تحلیلی و جبر) (ریاضی ۲، صفحه‌های ۱۹ تا ۲۴)

66– گزینهٔ «۳» *(علی‌اصغر شریفی)*

اگر زمان پرشدن استخر در حالت کم‌فشار و پرفشار به‌ترتیب x و y باشد، داریم:

$$\frac{2}{x} + \frac{3}{y} = 5 \Rightarrow 3x + 2y = xy$$

$$0/5x + 0/5y = 5/25 \quad x + y = 5 \quad y = 10/5 - x$$

با جایگذاری y از معادلهٔ دوم در معادلهٔ اول، خواهیم داشت:

$$3x + 2(10/5 - x) = x(10/5 \quad x)$$

$$\Rightarrow x^2 - 9/5x + 21 = 0 \Rightarrow x = 6, 3/5$$

با توجه به آن که x باید از y بیش‌تر باشد، پس:

$$x = 6 \Rightarrow y = 4/5 \Rightarrow x - y = 1/5$$

(هندسهٔ تحلیلی و جبر) (ریاضی ۲، صفحه‌های ۱۹ تا ۲۴)

67– گزینهٔ «۴» *(بابک سادات)*

$$x^2 - x < |x-3| + x + 3 \Rightarrow x^2 - 2x - 3 < |x-3|$$

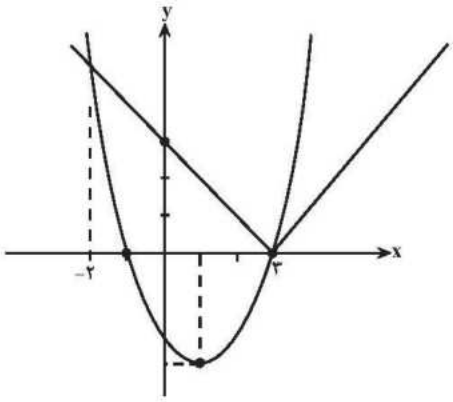
حال کافی است نمودار دو تابع را رسم کنیم تا به جواب نامعادله برسیم. برای پیدا کردن نقاط تلاقی این دو نمودار داریم:

$$x \geq 3 \text{ اگر}: x^2 - 2x - 3 = x - 3 \Rightarrow x^2 - 3x = 0 \Rightarrow x(x-3) = 0$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x = 0 \text{ غ‌ق‌ق} \\ x = 3 \end{cases}$$

$$x < 3 \text{ اگر}: x^2 - 2x - 3 = -x + 3 \Rightarrow x^2 - x - 6 = 0$$

$$\Rightarrow (x-3)(x+2) = 0 \Rightarrow \begin{cases} x = 3 \text{ غ‌ق‌ق} \\ x = -2 \end{cases}$$



$$\Rightarrow (a,b) = (-2,3) \xrightarrow[\text{بازه}]{\text{نقطهٔ وسط}} \frac{1}{2}$$

(معادله‌ها و نامعادله‌ها) (ریاضی ۱، صفحه‌های ۸۸ تا ۹۳)

www.mapedu.ir

68- گزینهٔ «۴» (سراسری تجربی - ۹۹)

راه حل اول: از آنجا که طرفین این دستگاه نامعادلات (یعنی ۱ و ۳) مثبت هستند، می‌توانیم با عوض‌کردن جهت نامساوی، آن را معکوس کنیم:

$$1<\frac{x+1}{2x-1}<3 \Rightarrow \frac{1}{3}<\frac{2x-1}{x+1}<1 \quad (*)$$

از طرفی: $\frac{2x-1}{x+1}=\frac{2(x+1)-3}{x+1}=2-\frac{3}{x+1}$

$$\xrightarrow{(*)} \frac{1}{3}<2-\frac{3}{x+1}<1$$

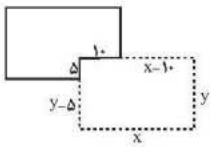
$$\xrightarrow{-2} \underbrace{\frac{1}{3}-2}_{-\frac{5}{3}}<-\frac{3}{x+1}<\underbrace{1-2}_{-1}$$

$$\xrightarrow{\times(-1)} 1<\frac{3}{x+1}<\frac{5}{3} \xrightarrow{\text{معکوس}} \frac{3}{5}<\frac{x+1}{3}<1$$

$$\xrightarrow{\times 3} \frac{9}{5}<x+1<3 \xrightarrow{-1} \underbrace{\frac{9}{5}-1}_{\frac{4}{5}}<x<2$$

69- گزینهٔ «۲» (سهیل ساسانی)

طول دیوار باید ۸۵ متر باشد پس:



$$x+y+x-10+y-5=85 \Rightarrow 2x+2y=100 \Rightarrow y=50-x$$

$$S=xy=x(50-x)=-x^2+50x$$

$$\text{طول راس سهمی}=\frac{-50}{2(-1)}=25 \Rightarrow S_{max}=25(50-25)=625$$

(ترکیبی) (ریاضی ۱، صفحه‌های ۷۸ تا ۸۲) (ریاضی ۲، صفحه‌های ۱۱ تا ۱۸)

70- گزینهٔ «۲» (سهیل ساسانی)

معلوم است که باید معادلهٔ $f(x)=1$ را حل کنیم و نقطه‌ی تلاقی با طول مثبت را m بنامیم. اما قبل از آن باید معادلهٔ $f(x)$ را بنویسیم. صفرهای تابع، ۱ و ۳- هستند و نقطهٔ $(-1,-2)$ در تابع صدق می‌کند پس داریم:

$$f(x)=a(x-x_1)(x-x_2) \longrightarrow y=a(x+3)(x-1) \xrightarrow{(-1,-2)}$$

$$-2=a(2)(-2) \Rightarrow \boxed{a=-\frac{1}{2}}$$

$$f(x)=\frac{1}{2}(x+3)(x-1) \xrightarrow{f(x)=1} \frac{(x+3)(x-1)}{2}=1$$

$$\xrightarrow{\text{طرفین وسطین}} x^2+2x-3=2 \Rightarrow x^2+2x-5=0$$

$$\Delta=4+20=24$$

$$x=\frac{-2\pm 2\sqrt{6}}{2}=-1\pm\sqrt{6} \xrightarrow{m>0} \boxed{\sqrt{6}-1=m}$$

(ترکیبی) (ریاضی ۱، صفحه‌های ۷۸ تا ۸۲) (ریاضی ۲، صفحه‌های ۱۴ تا ۱۸)

71- گزینهٔ «۳» (بهرام علاج)

در این گونه نامعادلات باید حاصل کسر به ازای ابتدا و انتهای بازهٔ جواب، برابر با ابتدا یا انتهای محدودهٔ گفته شده باشد، پس دو حالت وجود دارد:

$$\xrightarrow{\text{حالت ۱}} \begin{cases} \frac{3a+2}{3b-3}=-1 \Rightarrow 3a+3b=1 \\ \frac{6a+2}{6b-3}=5 \Rightarrow 6a-30b=-17 \end{cases} \Rightarrow a=-\frac{7}{36}, b=\frac{19}{36} \rightarrow b-a=\frac{13}{18}$$

$$\Rightarrow -1<\frac{-\frac{7}{36}x+2}{\frac{19}{36}x-3}<5 \xrightarrow{x=0 \text{ به‌طول مثال}} -1<-\frac{2}{3}<5 \text{ (مورد قبول)}$$

$$\xrightarrow{\text{حالت ۲}} \begin{cases} \frac{3a+2}{3b-3}=5 \Rightarrow 3a-15b=-17 \\ \frac{6a+2}{6b-3}=-1 \Rightarrow 6a+6b=1 \end{cases} \Rightarrow a=-\frac{29}{36}, b=\frac{35}{36} \rightarrow b-a=\frac{16}{9}$$

$$\Rightarrow -1<\frac{-\frac{29}{36}x+2}{\frac{35}{36}x-3}<5 \Rightarrow \xrightarrow{x=0} -1<-\frac{2}{3}<5 \text{ (مورد قبول)}$$

حاصل $b-a$ در حالت اول و دوم به ترتیب $\frac{13}{18}$ و $\frac{16}{9}$ است که حالت اول کمتر است.

(معادله‌ها و نامعادله‌ها) (ریاضی ۱، صفحه‌های ۸۸ تا ۹۳)

72- گزینهٔ «۲» (علی ساوجی)

نکتهٔ «۱»:

$$\boxed{|x|<a \rightarrow -a<x<a}$$

نکتهٔ «۲»:

$$\boxed{a<|x|<b \rightarrow -b<x<-a \text{ یا } a<x<b}$$

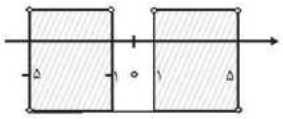
با توجه به نکات بالا:

1) $||x|-3|<2 \rightarrow -2<|x|-3<2 \xrightarrow{+3} 1<|x|<5$

$\rightarrow -5<x<-1$ یا $1<x<5$

2) $||x|-2|<3 \rightarrow -3<|x|-2<3 \xrightarrow{+2} -1<|x|<5$

$\rightarrow |x|<5 \rightarrow -5<x<5$



مجموعه جواب $=1 \cap 2$

$\rightarrow (-5,-1) \cup (1,5)$

(معادله‌ها و نامعادله‌ها) (ریاضی ۱، صفحه‌های ۸۸ تا ۹۳)

73- گزینهٔ «۳» (سروش موئینی)

عبارت صورت سوال را در «ک. م. م» مخرج‌ها ضرب می‌کنیم.

$$\xrightarrow{\times x(x-1)} x(x+1)+2(x-1)=k$$

$$x^2+3x-2-k=0$$

برای داشتن یک ریشه برای معادلهٔ اخیر، ۳ حالت داریم:

الف) $\Delta=0$

ب) $x_1=1$ یک ریشه است.

پ) $x_1=0$ یک ریشه است.

از «الف» داریم: $9-4(-2-k)=0$ پس $17+4k=0$ و بنابراین $k=-\frac{17}{4}$

www.mapedu.ir

از «ب» نتیجه می‌شود: $4-2-k=0$ پس $k=2$

و در «پ»: $-2-k=0$ پس $k=-2$

پس ۳ مقدار برای k داریم.

توجه: در هر دو حالت (ب) و (پ) داریم $\Delta>0$.

(هندسهٔ تحلیلی و جبر) (ریاضی ۲، صفحه‌های ۱۹ تا ۲۴)

74- گزینهٔ «۲» *(بهرام ملاح)*

جرم کل محلول اولیه را x در نظر می‌گیریم که در نتیجه مقدار نمک موجود در آن $0/4x$ خواهد بود. حال غلظت بدست آمده در آزمایش اول به صورت زیر است:

$$\frac{0/4x+3}{x+3}$$

و نیز در مورد آزمایش دوم داریم:

$$\frac{0/4x}{x-2}$$

پس داریم:

$$\frac{0/4x+3}{x+3}=\frac{0/4x}{x-2}\Rightarrow 0/4x^2+2/2x-6=0/4x^2+1/2x$$

$$\Rightarrow \boxed{x=6}\rightarrow \text{جرم آب}=6\times 60\%=3/6$$

(هندسهٔ تحلیلی و جبر) (ریاضی ۲، صفحه‌های ۱۹ تا ۲۴)

75- گزینهٔ «۴» *(سروش موئینی)*

$$\sqrt{3x^2+7x-1}=7-x \xrightarrow{\text{به توان ۲}}$$

$$3x^2+7x-1=49+x^2-14x\Rightarrow 2x^2+21x-50=0$$

$$\Rightarrow (x-2)(2x+25)=0\Rightarrow \begin{cases} x=2 & \text{غ‌ق‌ق } (\alpha<0) \\ x=\frac{-25}{2} \end{cases}$$

مقدار $\sqrt{3-\alpha}$ به ازای $\alpha=\frac{-25}{2}$ می‌شود $\sqrt{15/5}$ که به ۴ نزدیکتر است.

(هندسهٔ تحلیلی و جبر) (ریاضی ۲، صفحه‌های ۲۲ تا ۲۴)

76- گزینهٔ «۳» *(رضا سیدنبی)*

برای حل معادله، $x^2+5x+10=t$ قرار می‌دهیم پس:

$$t=2\sqrt{t+3}\xrightarrow{\text{به توان ۲}} t^2=4t+12\rightarrow t^2-4t-12=0$$

$$\rightarrow (t-6)(t+2)=0\rightarrow \begin{cases} t=6 & \text{ق‌ق} \\ t=-2 & \text{غ‌ق‌ق} \end{cases}$$

در نتیجه:

$$x^2+5x+10=6\rightarrow x^2+5x+4=0$$

برای بدست آوردن مجموع ریشه‌ها خواهیم داشت:

$$\rightarrow S=-\frac{b}{a}=-5$$

(هندسهٔ تحلیلی و جبر) (ریاضی ۲، صفحه‌های ۱۹ تا ۲۴)

77- گزینهٔ «۴» *(احمدرضا ذاکرزاده)*

چون $0<a<1$ پس $a<\sqrt{a}<\sqrt[3]{a}$، بنابراین:

$$a-\sqrt{a}<0, a-\sqrt[3]{a}<0, \sqrt{a}-\sqrt[3]{a}<0$$

$$A=-(a-\sqrt{a})+(a-\sqrt[3]{a})-(\sqrt{a}-\sqrt[3]{a})$$

$$=-a+\sqrt{a}+a-\sqrt[3]{a}-\sqrt{a}+\sqrt[3]{a}=0$$

(توان‌های گویا و عبارت‌های جبری) (ریاضی ۱، صفحه‌های ۴۸ تا ۵۸)

78- گزینهٔ «۳» *(رانیال ابراهیمی)*

دقت کنید که A عددی مثبت است. حال A را به توان دو می‌رسانیم:

$$A^2=(\sqrt[5]{9\sqrt{3}})^2\times(\sqrt{3-2\sqrt{2}}+\sqrt{3+2\sqrt{2}})^2$$

$$=(\sqrt[5]{(3^2)^2(\sqrt{3})^2})\times(3-2\sqrt{2}+3+2\sqrt{2}+2\sqrt{9-8})$$

$$=\sqrt[5]{3^5}\times(6+2\sqrt{1})=3\times 8=24\Rightarrow A=\sqrt{24}=2\sqrt{6}$$

(توان‌های گویا و عبارت‌های جبری) (ریاضی ۱، صفحه‌های ۴۸ تا ۵۸ و ۶۲ تا ۶۸)

79- گزینهٔ «۳» *(علی‌اصغر شریفی)*

$$A=\sqrt[4]{5\times 5^{\frac{3}{2}}}\times(5^{-2})^{-\frac{7}{16}}=\sqrt[4]{5^{\frac{5}{2}}}\times 5^{\frac{7}{8}}$$

$$=5^{\frac{5}{8}}\times 5^{\frac{7}{8}}=5^{\frac{12}{8}}=5^{\frac{3}{2}}$$

$$(5A)^{-\frac{4}{15}}=(5\times 5^{\frac{3}{2}})^{-\frac{4}{15}}=(5^{\frac{5}{2}})^{-\frac{4}{15}}=5^{-\frac{2}{3}}=\frac{1}{\sqrt[3]{25}}$$

(توان‌های گویا و عبارت‌های جبری) (ریاضی ۱، صفحه‌های ۵۹ تا ۶۱)

80- گزینهٔ «۳» *(رایک سارات)*

$$(\sqrt[3]{x}-1)(\sqrt[3]{x^2}+\sqrt[3]{x}+1)=x-1$$

$$(\sqrt{x}-1)(\sqrt{x}+1)=x-1$$

$$\Rightarrow(\sqrt[3]{x}-1)(\sqrt{x}-1)(\sqrt{x}+1)(\sqrt[3]{x^2}+\sqrt[3]{x}+1)=(x-1)^2$$

$$\xrightarrow{x=\sqrt{3}+1}(\sqrt{3}+1-1)^2=3$$

(توان‌های گویا و عبارت‌های جبری) (ریاضی ۱، صفحه‌های ۶۲ تا ۶۸)

81- گزینهٔ «۴» *(سهیل حسن‌خان‌پور)*

روش اول:

$$a^2-b^2=3\xrightarrow{\text{به توان دو}}\left.\begin{array}{l} a^4+b^4-2a^2b^2=9 \\ ab=2\Rightarrow a^2b^2=4 \end{array}\right\}$$

$$\Rightarrow a^4+b^4-2\times 4=9\Rightarrow a^4+b^4=17$$

$$\xrightarrow{\text{به توان دو}}\left.\begin{array}{l} a^8+b^8+2a^4b^4=17^2=289 \\ ab=2\rightarrow a^4b^4=16 \end{array}\right\}$$

$$\Rightarrow a^8+b^8+2\times 16=289\Rightarrow a^8+b^8=257$$

روش دوم:

$$a^2-b^2=3\xrightarrow{b=\frac{2}{a}}a^2-\frac{4}{a^2}=3\Rightarrow a^4-3a^2-4=0$$

$$\Rightarrow(a^2-4)(a^2+1)=0\Rightarrow a^2=4\Rightarrow a=\pm 2, b=\pm 1$$

$$\Rightarrow a^8+b^8=(\pm 2)^8+(\pm 1)^8=256+1=257$$

(توان‌های گویا و عبارت‌های جبری) (ریاضی ۱، صفحه‌های ۶۲ تا ۶۸)

www.mapedu.ir

82- گزینهٔ «۲» *(امیرهوشنگ انصاری)*

$$(a^2-4ab+4b^2)+(4a^2-4a+1)=0$$

$$(a-2b)^2+(2a-1)^2=0\Rightarrow\begin{cases}a-2b=0\Rightarrow a=2b\\2a-1=0\Rightarrow a=\frac{1}{2}\end{cases}$$

بنابراین: $a=\frac{1}{2}$ و $b=\frac{1}{4}$ است.

$$\sqrt{a+b}=\sqrt{\frac{3}{4}}=\frac{\sqrt{3}}{2}\simeq\frac{1/7}{2}=0/85$$

(توان‌های گویا و عبارت‌های جبری) (ریاضی ۱، صفحه‌های ۶۲ تا ۶۸)

83- گزینهٔ «۲» *(مصطفی کرمی)*

در ابتدا a^3 را حساب می‌کنیم:

$$a^3=(5+2\sqrt{6})+(5-2\sqrt{6})+3\times\sqrt[3]{(5+2\sqrt{6})(5-2\sqrt{6})}\times a$$

$$\Rightarrow a^3=10+3a\Rightarrow a^3-3a=10$$

(توان‌های گویا و عبارت‌های جبری) (ریاضی ۱، صفحه‌های ۶۲ تا ۶۸)

84- گزینهٔ «۱» *(سیدبهرام نظری)*

به کمک اتحاد مزدوج، ابتدا در عبارت $\frac{1}{1+\sqrt{3}-\sqrt{5}}-\frac{1}{1+\sqrt{3}+\sqrt{5}}$ مخرج مشترک می‌گیریم:

$$\frac{1}{1+\sqrt{3}-\sqrt{5}}-\frac{1}{1+\sqrt{3}+\sqrt{5}}=\frac{(1+\sqrt{3}+\sqrt{5})-(1+\sqrt{3}-\sqrt{5})}{(1+\sqrt{3})^2-(\sqrt{5})^2}$$

$$=\frac{2\sqrt{5}}{2\sqrt{3}-1}$$

حال داریم:

$$\frac{2\sqrt{5}}{2\sqrt{3}-1}\times\left(\frac{2\sqrt{3}+1}{11}\right)^{-1}=\frac{2\sqrt{5}}{2\sqrt{3}-1}\times\frac{11}{2\sqrt{3}+1}=\frac{22\sqrt{5}}{12-1}=2\sqrt{5}$$

(توان‌های گویا و عبارت‌های جبری) (ریاضی ۱، صفحه‌های ۶۲ تا ۶۸)

85- گزینهٔ «۳» *(وحید راهنی)*

$$\underbrace{(a^2+b^2-ab)(a^2+b^2+ab)}_{\text{اتحاد مزدوج}}=(a^2+b^2)^2-(ab)^2$$

$$=a^4+2(ab)^2+b^4-(ab)^2$$

$$=a^4+b^4+(ab)^2=14+3\sqrt{3}+14-3\sqrt{3}$$

$$+\left(\sqrt[4]{\underbrace{(14+3\sqrt{3})(14-3\sqrt{3})}_{196-27}}\right)^2=28+\sqrt{169}=28+13=41$$

(توان‌های گویا و عبارت‌های جبری) (ریاضی ۱، صفحه‌های ۶۲ تا ۶۸)

86- گزینهٔ «۴» *(علی‌اصغر شریفی)*

اگر تعریف کنیم $a=\sqrt{x-\frac{1}{x}}$ و $b=\sqrt{1-\frac{1}{x}}$ خواهیم داشت:

$$a+b=x$$

$$a^2-b^2=(x-\frac{1}{x})-(1-\frac{1}{x})=x-1$$

با تقسیم عبارت‌های بالا خواهیم داشت.

$$a-b=\frac{x-1}{x}=1-\frac{1}{x}$$

با توجه به آن‌که $a+b=x$، داریم:

$$2a=1-\frac{1}{x}+x=(x-\frac{1}{x})+1=a^2+1\Rightarrow a^2-2a+1=0$$

$$\Rightarrow a=1$$

بنابراین: $x-\frac{1}{x}=1\Rightarrow x^2-x-1=0$

با توجه به آن‌که در معادلهٔ اصلی x برابر با حاصل جمع دو رادیکال است، پس نامنفی است، بنابراین:

$$x=\frac{1+\sqrt{5}}{2}\Rightarrow\frac{1}{x}=\frac{2}{\sqrt{5}+1}\times\frac{\sqrt{5}-1}{\sqrt{5}-1}=\frac{2(\sqrt{5}-1)}{5-1}=\frac{\sqrt{5}-1}{2}$$

$$\Rightarrow a-b=1-\frac{1}{x}=\frac{3-\sqrt{5}}{2}$$

(توان‌های گویا و عبارت‌های جبری) (ریاضی ۱، صفحه‌های ۶۲ تا ۶۸)

شرکت تعاونی خدمات آموزشی کارکنان
سازمان سنجش آموزش کشور

www.mapedu.ir

۱-گزینه ۴ درست است.

$$x^3-3x^2-4a^2x+12a^2=x^2(x-3)-4a^2(x-3)=(x-3)(x-2a)(x+2a)$$

$$x^3-bx^2-9x+9b=x^2(x-b)-9(x-b)=(x-3)(x+3)(x-b)$$

ریشه‌های کوچکترین مضرب مشترک $2a$، $-2a$ و 3 و -3 و b، پس $b=-6$ است.

$$x_s=-\frac{b}{2}=3\Rightarrow y_s=9-6(3)-6+1=-14$$

۲- گزینه ۴ درست است.

$$x^2-6x+7<\frac{7}{2}|x-3| \Rightarrow 2x^2-12x+14-7|x-3|<0$$

$$\Rightarrow 2(x-3)^2-7|x-3|-4<0\ ,\ t=|x-3|\Rightarrow 2t^2-7t-4<0$$

$$\Delta=49+32=81\Rightarrow -\frac{1}{2}<t<4\Rightarrow |x-3|<4$$

$$\Rightarrow -1<x<7\Rightarrow x=1,2,3,4,5,6\in N$$

مجموع برابر ۲۱ است.

۳. گزینه ۱ درست است.

$x=2$ در معادله صدق می‌کند، پس داریم:

$$9a(2)^2-3b(2)+2a=0\Rightarrow 38a=6b\Rightarrow 3b=19a$$

$$\Rightarrow 9ax^2-19ax+2a=0\Rightarrow 9x^2-19x+2=0$$

در این معادله $x=\frac{1}{9}$ ریشه دیگر است.

۴- گزینه ۴ درست است.

در جمله اول، سهمی $y=a(x-2)^2+3$ و با توجه به نقطه $(-1,-3)$ داریم:

$$-3=9a+3\Rightarrow a=-\frac{6}{9}=-\frac{2}{3}$$

پس نادرست است.

در جمله دوم سهمی $y=2x^2-8x+c$ و $\alpha-\beta=2$ در نتیجه داریم:

$$\frac{\sqrt{\Delta}}{|2|}=2\ \Rightarrow \sqrt{64-8c}=4\Rightarrow 8c=64-16=48\Rightarrow c=6$$

در جمله سوم، سهمی $y=a(x+2)(x-3)$ و با توجه به نقطه $(0,8)$ داریم:

$$a=\frac{8}{-6}=\frac{-4}{3}$$

پس درست است.

در جمله چهارم داریم:

$$\frac{\sqrt{\Delta}}{|-3|}=6\ \Rightarrow \Delta=18^2\ ,\ y_{max}=-\frac{\Delta}{4a}=\frac{-18^2}{-12}=27$$

۵- گزینه ۱ درست است.

$$۲x^۲+mx+۲>x \Rightarrow ۲x^۲+(m-۱)x+۲>۰ \Rightarrow (m-۱)^۲-۱۶<۰$$

پس $|m-۱|<۴$ یا $-۴<m-۱<۴$ در نتیجه $-۳<m<۵$

۶. گزینه ۱ درست است.

شرط دو ریشه قرینه $a(a^۲-۹)=۰ \Rightarrow a=۰,-۳,۳$ به ازای $a=۰,۳$ ریشه‌ها حقیقی نیست پس $a=-۳$

۷. گزینه ۱ درست است.

اگر a و b ریشه‌های معادله $\begin{cases} a+b=-a \\ ab=b \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} ۲a+b=۰ \\ a=۱ \end{cases} \Rightarrow a=۱, b=-۲ \Rightarrow x^۲+ax-۲=۰$ باشند خواهیم داشت.

فقط یک معادله موجود است.

۸. گزینه ۱ درست است.

قرینه نسبت به نیمساز ناحیه اول، معکوس تابع است.

$$۲x+۱=۲^y \Rightarrow x=\frac{۱}{۲}(۲^y-۱) \Rightarrow f^{-۱}(x)=۲^{x-۱}-\frac{۱}{۲} \Rightarrow f^{-۱}(۲)=\frac{۳}{۲}$$

۹- گزینه ۳ درست است.

$$(m-۲)x^۲-x+m=۲x-۲$$

$$(m-۲)x^۲-۳x+m+۲=۰ \Rightarrow ۹-۴(m^۲-۴)=۰ \Rightarrow m^۲=\frac{۲۵}{۴}$$

چون منحنی بالاتر از خط قرار دارد الزاماً $m>۲$ و ریشه $m=۲/۵$ قابل قبول است.

۱۰-گزینه ۱ درست است.

$$-۰/۱<x-۱<۰/۱ \Rightarrow -۰/۳<۳x-۳<۰/۳ \Rightarrow ۰/۷<۳x-۲<۱/۳$$

پس $A=۰/۷$, $B=۱/۳$ پس $A+B=۲$

۱۱- گزینه ۲ درست است.

می‌دانیم $۱+\sqrt{x}>۰$ پس خواهیم داشت $(\frac{۱}{۲}x+۴)(۱+\sqrt{x}) \le ۳\sqrt{x}(۱+\sqrt{x})$

$$\frac{۱}{۲}x+۴ \le ۳\sqrt{x} \Rightarrow x-۶\sqrt{x}+۸ \le ۰ \Rightarrow (\sqrt{x}-۲)(\sqrt{x}-۴) \le ۰$$

پس $۲ \le \sqrt{x} \le ۴$ و در نتیجه $x \in [۴,۱۶]$

۱۲-گزینه ۳ درست است.

$$۱+b \ge ۲\sqrt{b}\ ,\ ۱+a \ge ۲\sqrt{a}\ ,... \Rightarrow (۱+a)(۱+b)(۱+c)(۱+d) \ge ۲^۴\sqrt{abcd}$$

پس حاصل‌ضرب بزرگتر یا مساوی ۱۶ و کمترین مقدار آن ۱۶ است.

۱۳-گزینه ۴ درست است.

$$\sqrt{۲x-۵}=z\Rightarrow\sqrt{\frac{z^۲+۵}{۲}-۲+z}+\sqrt{\frac{z^۲+۵}{۲}+۲+۳z}=۷\sqrt{۲}$$

$$\sqrt{z^۲+۲z+۱}+\sqrt{z^۲+۶z+۱۹}=۱۴\Rightarrow z+۱+z+۳=۱۴\Rightarrow z=۵$$

در نتیجه $x=۱۵$

۱۴. گزینه ۱ درست است.

با توجه به اینکه f و g درجه ۲ و ۲ نقطه برخورد دارند، $h=f-g$ نیز تابعی درجه ۲ بوده، $h(۳)=h(۱)=۰$ و در نتیجه $h(x)=a(x-۱)(x-۳)$ و با توجه به $h(۰)=f(۰)-g(۰)=۵$ داریم:

$$۵=a(۳)\Rightarrow a=\frac{۵}{۳}\Rightarrow h(۴)=\frac{۵}{۳}\times۳\times۱=۵$$

۱۵- گزینه ۲ درست است.

با توجه به معادله و تغییر آن داریم:

$$\left|۳^x-۱\right|=\frac{۱۱}{۱۶}|x|+\frac{۵}{۱۶}x$$

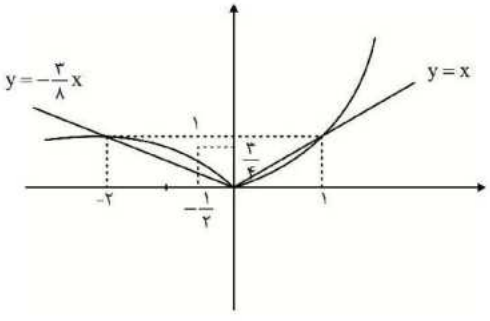
در نتیجه دو تابع زیر را داریم:

$$f(x)=\begin{cases}x & ; \quad x\geq ۰\\ -\frac{۳}{۸}x & ; \quad x<۰\end{cases}\qquad g(x)=\begin{cases}۳^x-۱ & ; \quad x\geq ۰\\ ۱-۳^x & ; \quad x<۰\end{cases}$$

$$f(۱)=g(۱)=۱$$

$$f(-۲)=g(-۲)=\frac{۳}{۴}$$

پس ۲− و ۱ دو ریشه و مجموع آنها برابر ۱− است.



۱۶-گزینه ۳ درست است.

α و β ریشه‌های معادله هستند، پس $\alpha^۲=۴\alpha+۲$ و $۴\beta=\beta^۲-۲$ است و داریم:

$$\alpha^۳=۴\alpha^۲+۲\alpha$$

$$۴\beta=\beta^۲-۲\Rightarrow ۱۶\beta=۴\beta^۲-۸\Rightarrow ۱۸\beta=۴\beta^۲+۲\beta-۸$$

$$\Rightarrow\alpha^۳+۱۸\beta=۴\alpha^۲+۴\beta^۲+۲\alpha+۲\beta-۸$$

$$S=\alpha+\beta=۴\ ,\ P=\alpha\beta=-۲\Rightarrow\alpha^۲+\beta^۲=S^۲-۲P=۱۶+۴=۲۰$$

$$\Rightarrow\alpha^۳+۱۸\beta=۴(۲۰)+۲(۴)-۸=۸۰$$

۱۷. گزینه ۳ درست است.

$$\frac{۲}{۵}x = k \in z \Rightarrow x = \frac{۵}{۲}k \Rightarrow [\frac{۱}{۲}(\frac{۵}{۲}k)] = k$$

$$[x] \le x < [x]+۱ \Rightarrow k \le \frac{۵}{۴}k < k+۱ \Rightarrow ۰ \le \frac{۱}{۴}k < ۱$$

$$\Rightarrow ۰ \le k < ۴ \Rightarrow k = ۰,۱,۲,۳ \Rightarrow x = ۰\ ,\ \frac{۵}{۲}\ ,\ ۵\ ,\ \frac{۱۵}{۲}$$

پس ۴ ریشه دارد.

۱۸. گزینه ۲ درست است.

$$(\sqrt{a}-\sqrt{b})^۲ = (\sqrt{a}+\sqrt{b})^۲ - ۴\sqrt{ab} = ۱۶-۱۲ = ۴ \Rightarrow \sqrt{a}-\sqrt{b} = ۲ \Rightarrow a = ۹, b = ۱$$

$$\Rightarrow a\sqrt{a} - b\sqrt{b} = ۲۶$$

۱۹- گزینه ۱ درست است.

هر گاه در $ax^۲ + bx + c = ۰$ یک ریشه $\frac{c}{-۲a}$ باشد ریشه دیگر -۲ می‌باشد.

$$x^۲ + bx + a - ۶ = ۰\ ,\ \frac{a-۶}{-۲} = -\frac{a}{۲} + ۳ \Rightarrow ۴ - ۲b + a - ۶ = ۰$$

$$\frac{b}{۴} - \frac{a}{۲} - ۲ = ۰ \Rightarrow b - ۲a = ۸\ ,\ a - ۲b = ۲ \Rightarrow a = -۶, b = -۴$$

$$\Rightarrow a + b = -۱۰$$

۲۰. گزینه ۲ درست است.

$$\sqrt{x+\sqrt{۴/۵x-۴۱}} = ۱۵ \Rightarrow \sqrt{۴/۵x-۴۱} = ۱۵^۲ - x \Rightarrow ۴/۵x - ۴۱ = ۱۵^۴ - ۴۵۰x + x^۲$$

$$\Rightarrow x^۲ - ۴۵۴/۵x + ۵۰۶۶۶ = ۰ \Rightarrow x = ۱۹۶ \Rightarrow ۱+۹+۶ = ۱۶$$

۲۱. گزینه ۴ درست است.

$$x^۲ - \sqrt{۱۷}x + ۹ = ۰ \begin{cases} \alpha+\beta = \frac{-b}{a} = \sqrt{۱۷} = s \\ \alpha.\beta = \frac{c}{a} = ۹ = p \end{cases}$$

$$(\alpha-\beta)^۲ = \alpha^۲ + \beta^۲ - ۲\alpha\beta = (\alpha+\beta)^۲ - ۴\alpha\beta = s^۲ - ۴p = (\sqrt{۱۷})^۲ - ۴(۹) = ۱۷ - ۳۶ = -۱۹$$

۲۲- گزینه ۴ درست است.

ابتدا معادله رادیکالی را حل می‌کنیم:

$$\sqrt{x+1}=1+\sqrt{2x-5}$$

$\downarrow$ دو طرف به توان ۲

$$x+1=1+2x-5+2\sqrt{2x-5}$$

$$5-x=2\sqrt{2x-5}\xrightarrow{\text{به توان ۲}}x^2-18x+45=0$$

$$(x-15)(x-3)=0 \qquad \boxed{x=3}$$

$\downarrow$

غ ق ق $x=15$

اکنون $x=3$ را برابر طول رأس سهمی قرار می‌دهیم:

$$f(x)=-x^2+kx+8\rightarrow x_{\text{رأس}}=\frac{-k}{2(-1)}=3 \qquad k=6$$

$$\max(y)=-(3)^2+6(3)+8=17$$

۲۳-گزینه ۴ درست است.

مطابق اتحاد مزدوج: $(a-b)(a+b)=a^2-b^2$

$$(\sqrt{x+2}-\sqrt{x-4})(\sqrt{x+2}+\sqrt{x-4})=(\sqrt{x+2})^2-(\sqrt{x-4})^2$$

$$(\sqrt{x+2}-\sqrt{x-4})\times 3=x+2-x+4$$

$$(\sqrt{x+2}-\sqrt{x-4})\times 3=6$$

$$\sqrt{x+2}-\sqrt{x-4}=2$$

۲۴- گزینه ۳ درست است.

$$y=kx^2-kx-4$$

۱) $k<0$: دو شرط برای همواره زیر محور x ها بودن سهمی

۲) $\Delta<0\rightarrow(-k)^2-4(k)(-4)<0$

$$k^2+16k<0$$

$$-16<k<0$$

اشتراک دو شرط (۱) و (۲) همان $-16<k<0$ است که شامل ۱۵ عدد صحیح است.

۲۵. گزینه ۱ درست است.

معادله تابع سهمی به‌صورت $f(x)=ax^{۲}+bx+c$ می‌باشد:

محل برخورد با محور yها $\rightarrow (۰,۱) \rightarrow ۱=۰+۰+c \rightarrow c=۱$

$$\left.\begin{array}{l}(۱,-۲)\rightarrow -۲=a+b+۱\\(۲,-۳)\rightarrow -۳=۴a+۲b+۱\end{array}\right\}\rightarrow\begin{cases}a+b=-۳\\۴a+۲b=-۴\end{cases}\rightarrow\begin{array}{l}a=۱\\b=-۴\end{array}$$

$f(x)=x^{۲}-۴x+۱$

رأس $x=\dfrac{-b}{۲a}=\dfrac{-(-۴)}{۲(۱)}=۲\rightarrow$ رأس $y=-۳$

مجموع طول و عرض رأس سهمی $=x+y=-۱$

۲۶. گزینه ۱ درست است.

ابتدا قسمت اول را **A** فرض کرده و به توان ۲ می‌رسانیم:

$$A=\sqrt{۲-\sqrt{۳}}+\sqrt{۲+\sqrt{۳}}$$

$$A^{۲}=۲-\cancel{\sqrt{۳}}+۲+\cancel{\sqrt{۳}}+۲\sqrt{(۲-\sqrt{۳})(۲+\sqrt{۳})}$$

$$A^{۲}=۴+۲\sqrt{۴-۳}$$

$$A^{۲}=۶\Rightarrow\boxed{A=\sqrt{۶}}$$

سپس قسمت دوم را **B** فرض کرده و ساده می‌کنیم:

$$B=\sqrt[۳]{۲\sqrt{۲}}=\sqrt[۳]{\sqrt{۸}}=\sqrt[۶]{۸}=(۲^{۳})^{\frac{۱}{۶}}=۲^{\frac{۱}{۲}}$$

$$\boxed{B=\sqrt{۲}}$$

$$M=A\times B=\sqrt{۶}\times\sqrt{۲}=\sqrt{۱۲}$$

$$\boxed{M^{۲}=۱۲}$$

۲۷. گزینه ۳ درست است.

رفت $۲۴۰=v.t$

برگشت $۲۴۰=(v+۱۰)(t-\frac{۱}{۳})\Rightarrow(\frac{۲۴۰}{v}=\frac{۲۴۰}{v+۱۰}+\frac{۱}{۳})\times ۳v(v+۱۰)\Rightarrow$

$v^{۲}+۱۰v-۷۲۰۰=۰\rightarrow(v+۹۰)(v-۸۰)=۰$

$v=-۹۰$ غ ق ق $\qquad$ رفت $v=۸۰\,km/h$

۲۸. گزینه ۲ درست است.

تعداد درخت‌های اضافه $=x$

محصول هر درخت در حالت جدید $=(۹۰-۲x)$

تعداد درختان جدید $=۳۵+x$

تابع برداشت میوه بر حسب کیلوگرم $y=(۳۵+x)(۹۰-۲x)$

$y=-۲x^{۲}+۲۰x+۳۱۵۰$

$y'=۰\rightarrow y'=-۴x+۲۰=۰$

$\boxed{x=۵}$

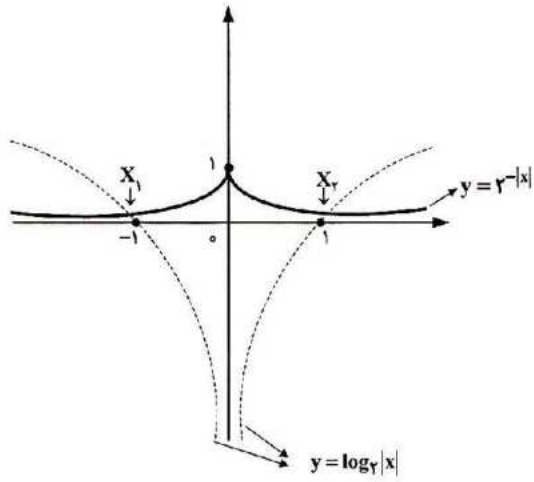
$y_{max}=-۲(۵)^{۲}+۲۰(۵)+۳۱۵۰$

$y_{max}=۳۲۰۰$

۲۹. گزینه ۴ درست است.

نمودار دو تابع $y=\log_{۲}^{|x|}, y=۲^{-|x|}$ را رسم می‌کنیم و محل برخورد آن‌ها تعداد ریشه‌هاست.

$$۲^{-|x|}=\begin{cases}۲^{-x}\ ;\ x\geq ۰\\ ۲^{x};x<۰\end{cases}\qquad \log_{۲}^{|x|}=\begin{cases}\log_{۲}^{x};x>۰\\ \log_{۲}^{(-x)};x<۰\end{cases}$$



معادله دو ریشهٔ حقیقی دارد.

۳۰. گزینه ۲ درست است.

با توجه به حل این نوع نامعادله‌ها در دو حالت ممکن است برقرار باشد:

$$\begin{cases}\dfrac{a(۱)+۱}{۲(۱)+b}=-۲\Rightarrow a+۲b=-۵\\ \dfrac{a(۳)+۱}{۲(۳)+b}=۵\Rightarrow ۳a-۵b=۲۹\end{cases}\Rightarrow a=۳,b=-۴\Rightarrow \frac{a}{b}=-\frac{۳}{۴}=-۰/۷۵$$

$$\begin{cases}\dfrac{a(۳)+۱}{۲(۳)+b}=-۲\Rightarrow ۳a+۲b=-۱۳\\ \dfrac{a(۱)+۱}{۲(۱)+b}=۵\Rightarrow a-۵b=۹\end{cases}\Rightarrow b=-\frac{۴۰}{۱۷},a=-\frac{۴۷}{۱۷}$$

$$\Rightarrow \frac{a}{b}=\frac{۴۷}{۴۰}=۱/۱۷۵$$

۳۱. گزینه ۱ درست است.

$$a^{۲}=۴+\sqrt{۷}+۴-\sqrt{۷}-۲\sqrt{۱۶-۷}=۲\Rightarrow a=\sqrt{۲}\Rightarrow a^{۳}=۲\sqrt{۲}$$
$$\Rightarrow \sqrt{۲\sqrt{۲}+۲+۱}=\sqrt{(\sqrt{۲}+۱)^{۲}}=\sqrt{۲}+۱=a+۱$$

۳۲- گزینه ۱ درست است.

شرط اینکه فقط از ناحیه چهارم نگذرد این است که $a>۰$، $\frac{c}{a}>۰$، $\frac{-b}{a}<۰$ و $\Delta>۰$ باشد.

$$a=m>۰\ ,\ c=۵+m>۰\ ,\ b=۲m-۴>۰\Rightarrow m>۲$$

$$\Delta=(۲m-۴)^{۲}-۴m(۵+m)>۰\Rightarrow (m-۲)^{۲}-۵m-m^{۲}=-۹m+۴>۰\Rightarrow m<\frac{۴}{۹}$$

$\Rightarrow$ [illegible] m [illegible]

۳۳. گزینه ۴ درست است.

با توجه به اینکه $\alpha^2+\beta^2=s^2-2p$ و $\alpha^3+\beta^3=s^3-3sp$ داریم:

$$p=\alpha\beta=-\frac{1}{3}, s=\alpha+\beta=\frac{1}{3}, s'=\alpha^2+\beta+\alpha+\beta^2=(\frac{1}{3})^2+2(\frac{1}{3})+\frac{1}{3}=\frac{10}{9}$$

$$p'=(\alpha^2+\beta)(\alpha+\beta^2)=\alpha^3+\beta^3+\alpha\beta+\alpha^2\beta^2=(\frac{1}{3})^3+3(\frac{1}{3})(\frac{1}{3})-\frac{1}{3}+\frac{1}{9}=\frac{4}{27}$$

$$\Rightarrow 27x^2-30x+4=0$$

۳۴. گزینه ۱ درست است.

$$x<-1\Rightarrow -6x+10\le x\Rightarrow x\in\phi$$
$$-1\le x\le 3\Rightarrow -2x+14\le x\Rightarrow x\in\phi$$
$$x>3\Rightarrow 6x-10\le x\Rightarrow x\in\phi$$

۳۵-گزینه ۲ درست است.

$$\alpha+\beta=\frac{1}{m}, \alpha\beta=-\frac{6}{m}\Rightarrow 3\beta=\frac{1}{m}-5\Rightarrow\beta=\frac{1-5m}{3m}$$
$$\Rightarrow\alpha=\frac{2+5m}{3m}\Rightarrow\frac{(1-5m)(2+5m)}{9m^2}=-\frac{6}{m}\Rightarrow m=2$$

۳۶- گزینه ۳ درست است.

ابتدا عبارت $\sqrt{5+\sqrt{22+\sqrt{5}}}\times\sqrt{5-\sqrt{22+\sqrt{5}}}$ را ساده می‌کنیم:

$$\sqrt{25-(22+\sqrt{5})}=\sqrt{3-\sqrt{5}}$$

حال داریم:

$$(\sqrt{3+\sqrt{5}})\times(\sqrt{3-\sqrt{5}})\times(\sqrt[4]{9}+1)^{-1}=\sqrt{9-5}\times(\sqrt{3}+1)^{-1}=\frac{2}{\sqrt{3}+1}\times\frac{\sqrt{3}-1}{\sqrt{3}-1}=\frac{2(\sqrt{3}-1)}{2}=\sqrt{3}-1$$

۳۷-گزینه ۴ درست است.

با فرض $x^2-3x=t$ داریم:

$$t^2+5t+4=0\Rightarrow(t+1)(t+4)=0\Rightarrow t=-1, t=-4$$

$$\begin{cases} x^2-3x=-1\Rightarrow x^2-3x+1=0\xrightarrow{\Delta>0}\text{حاصل‌ضرب ریشه‌ها}=1 \\ x^2-3x=-4\Rightarrow x^2-3x+4=0\xrightarrow{\Delta<0}\text{ریشه ندارد} \end{cases}\Rightarrow\text{حاصل‌ضرب ریشه‌ها}=1$$

۳۸. گزینه ۴ درست است.

$$\begin{cases} \frac{۱}{\alpha}+\frac{۱}{\beta}=۴ \Rightarrow \frac{\alpha+\beta}{\alpha\beta}=۴ \Rightarrow \frac{\alpha+\beta}{\frac{۱}{۲}}=۴ \Rightarrow \alpha+\beta=۲ \\ \frac{۱}{\alpha}\times\frac{۱}{\beta}=۲ \end{cases}$$

بنابراین $f(۲)$ را می‌خواهیم که برابر -۲ می‌باشد.

۳۹ گزینه ۲ درست است.

ابتدا عبارت داده شده را برحسب $\alpha+\beta$ و $\alpha\beta$ مرتب می‌کنیم. کافی است طرفین تساوی را به توان ۲ برسانیم:

$$\alpha^۲(m+\beta)+\beta^۲(m+\alpha)+۲\alpha\beta\sqrt{(m+\alpha)(m+\beta)}=۵ \Rightarrow$$

$$m(\alpha^۲+\beta^۲)+\alpha\beta(\alpha+\beta)+۲\alpha\beta\sqrt{m^۲+m(\alpha+\beta)+\alpha\beta}=۵$$

حال داریم:

$$\begin{cases} \alpha+\beta=-۱ \\ \alpha\beta=-۱ \end{cases} \Rightarrow m(-۱)^۲-۲(-۱)+(-۱)(-۱)+۲(-۱)\sqrt{m^۲-m-۱}=۵$$

$$\Rightarrow ۳m+۱-۲\sqrt{m^۲-m-۱}=۵ \Rightarrow ۹m^۲-۲۴m+۱۶=۴(m^۲-m-۱) \Rightarrow$$

$$۵m^۲-۲۰m+۲۰=۰ \Rightarrow m^۲-۴m+۴=۰ \Rightarrow (m-۲)^۲=۰ \Rightarrow m=۲$$

۴۰. گزینه ۲ درست است.

$$\frac{-(x-۱)(x-۲)}{(x-۱)(x^۲+x+۱)}>۱ \xrightarrow{x\neq ۱} \frac{-x+۲}{x^۲+x+۱}-۱>۰ \Rightarrow \frac{-x^۲-۲x+۱}{x^۲+x+۱}>۰$$

عبارت $x^۲+x+۱$ همواره مثبت است، پس $-x^۲-۲x+۱$ باید مثبت باشد و داریم:

$$-x^۲-۲x+۱>۰ \Rightarrow -۱-\sqrt{۲}<x<-۱+\sqrt{۲} \Rightarrow$$

$$(a,b)=(-۱-\sqrt{۲},-۱+\sqrt{۲}) \Rightarrow \frac{a+b}{۲}=-۱$$

البته می‌توانستیم بگوییم a و b ریشه‌های معادلهٔ $-x^۲-۲x+۱$ هستند، پس $\frac{a+b}{۲}=\frac{-۲}{۳}=-۱$ می‌باشد.

۴۱. گزینه ۳ درست است.

$$۱۳\times\frac{\sqrt{۲(۲-\sqrt{۲})}\times\sqrt[۴]{۲(۳+۲\sqrt{۲})}}{\sqrt{۱۹-۸\sqrt{۳}}}=۱۳\times\frac{\sqrt[۴]{۴(۶-۴\sqrt{۲})}\times\sqrt[۴]{۶+۴\sqrt{۲}}}{\sqrt{(۴-\sqrt{۳})^{۲}}}$$

$$=۱۳\times\frac{\sqrt[۴]{۴(۳۶-۳۲)}}{۴-\sqrt{۳}}=\frac{۲۶}{۴-\sqrt{۳}}\times\frac{۴+\sqrt{۳}}{۴+\sqrt{۳}}=\frac{۲۶(۴+\sqrt{۳})}{۱۳}=۸+۲\sqrt{۳}$$

۴۲. گزینه ۲ درست است.

$$(x-\frac{۱}{x})^{۲}-۲(x-\frac{۱}{x})+۱=۰\xrightarrow{x-\frac{۱}{x}=t}t^{۲}-۲t+۱=۰\Rightarrow(t-۱)^{۲}=۰\Rightarrow t=۱$$

$$\alpha-\frac{۱}{\alpha}=۱\xrightarrow{\text{توان ۲}}\alpha^{۲}+\frac{۱}{\alpha^{۲}}-۲\alpha(\frac{۱}{\alpha})=۱\Rightarrow\alpha^{۲}+\frac{۱}{\alpha^{۲}}=۳\Rightarrow\frac{\alpha^{۴}+۱}{\alpha^{۲}}=۳$$

۴۳-گزینه ۲ درست است.

$$(\frac{x-۱}{x})^{۲}+۳-\frac{۲}{x}=۰\Rightarrow(۱-\frac{۱}{x})^{۲}+۲(۱-\frac{۱}{x})+۱=۰$$

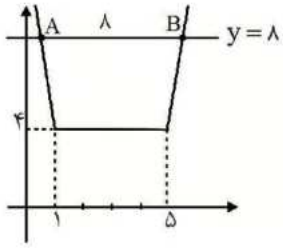
$$۱-\frac{۱}{x}=t\Rightarrow t^{۲}+۲t+۱=۰\Rightarrow(t+۱)^{۲}=۰\Rightarrow t=-۱\Rightarrow ۱-\frac{۱}{x}=-۱\Rightarrow x=\frac{۱}{۲}\Rightarrow\alpha=\frac{۱}{۲}$$

$$(۸\alpha^{-۱})^{\frac{۱}{۲}}=\sqrt{۸\times۲}=۴$$

۴۴-گزینه ۳ درست است.

به جای محاسبهٔ مساحت محدود بین دو نمودار داده شده می‌توانیم مساحت محدود به توابع $y=|x-۱|+|x-۵|$ و $y=۸$ را به دست آوریم:

$$|x-۱|+|x-۵|=۸\Rightarrow$$



$$\Rightarrow S=\frac{۱}{۲}(۸+۴)\times۴=۲۴$$

۴۵. گزینه ۴ درست است.

$$A=\sqrt{\sqrt[3]{\frac{36^3}{9}}}\times 3\sqrt[3]{3}=\sqrt[6]{4\times 36^2}\times 3\sqrt[3]{3}=2\sqrt[6]{9^2}\times 3\sqrt[3]{3}=18$$

$(\frac{1}{2A})^{-\frac{1}{2}}=(\frac{1}{36})^{-\frac{1}{2}}=36^{\frac{1}{2}}=\sqrt{36}=6\Rightarrow$ سه واحد از $3^2=9$ کمتر است.

۴۶. گزینه ۲ درست است.

$$\alpha^2\beta+\alpha\beta^2=\alpha\beta(\alpha+\beta)=PS$$

$$PS<0\Rightarrow(\frac{m-3}{1})(-\frac{2-m}{1})<0\Rightarrow(m-3)(m-2)<0\Rightarrow 2<m<3\Rightarrow(a,b)=(2,3)$$

$$\Rightarrow a+b=5$$

توجه کنید در این بازه همواره $\Delta>0$ است.

۴۷-گزینه ۲ درست است.

فرض می‌کنیم شرکت A به تنهایی در x روز پروژه را به اتمام برساند، پس:

$$\frac{1}{x}+\frac{1}{x+15}=\frac{1}{18}\Rightarrow 18(x+15)+18x=x(x+15)\Rightarrow x^2-21x-270=0$$

$$\Rightarrow(x-30)(x+9)=0\Rightarrow\begin{cases}x=30\\ x=-9 \quad \text{غ ق ق}\end{cases}$$

بعد از سه روز کار مشترک $3\times\frac{1}{18}=\frac{3}{18}$ پروژه انجام شده، پس $\frac{15}{18}$ پروژه را باید شرکت A انجام دهد. بنابراین داریم:

$$\text{تعداد روزها}=\frac{15}{18}\times 30=25$$

۴۸-گزینه ۳ درست است.

$$\left|\frac{x-4}{2x-3}\right|>1\Rightarrow\frac{|x-4|}{|2x-3|}>1\overset{x\neq\frac{3}{2}}{\Rightarrow}|x-4|>|2x-3|\Rightarrow(x-4)^2>(2x-3)^2$$

$$\Rightarrow((x-4)-(2x-3))((x-4)+(2x-3))>0$$

$$b-a=\frac{7}{3}-(-1)=\frac{10}{3}\Rightarrow(-x-1)(3x-7)>0\Rightarrow -1<x<\frac{7}{3},x\neq\frac{3}{2}\Rightarrow(a,b)=(-1,\frac{7}{3})\Rightarrow$$

۴۹. گزینه ۳ درست است.

$$\frac{۱}{\sqrt{۵}+\sqrt{۲}-\sqrt{۳}}\times\frac{\sqrt{۵}+\sqrt{۲}+\sqrt{۳}}{\sqrt{۵}+\sqrt{۲}+\sqrt{۳}}=\frac{\sqrt{۵}+\sqrt{۲}+\sqrt{۳}}{۵+۲+۲\sqrt{۱۰}-۳}\times\frac{۴-۲\sqrt{۱۰}}{۴-۲\sqrt{۱۰}}$$

$$=\frac{۲(\sqrt{۵}+\sqrt{۲}+\sqrt{۳})(۲-\sqrt{۱۰})}{۱۶-۴۰}=\frac{(\sqrt{۵}+\sqrt{۲}+\sqrt{۳})(۲-\sqrt{۱۰})}{-۱۲}$$

$$=\frac{\cancel{۲\sqrt{۵}}+۲\sqrt{۲}+۲\sqrt{۳}-۵\sqrt{۲}-\cancel{۲\sqrt{۵}}-\sqrt{۳۰}}{-۱۲}=\frac{۲\sqrt{۳}-۳\sqrt{۲}-\sqrt{۳۰}}{-۱۲}$$

$$\frac{\cancel{۲\sqrt{۳}-۳\sqrt{۲}-\sqrt{۳۰}}}{-۱۲}\times\frac{۱}{\cancel{۲\sqrt{۳}-۳\sqrt{۲}-\sqrt{۳۰}}}=-\frac{۱}{۱۲}$$

۵۰-گزینه ۴ درست است.

$$\frac{(\sqrt{۴+\sqrt{۷}}-\sqrt{۴-\sqrt{۷}})(\sqrt{۴+\sqrt{۷}}+\sqrt{۴-\sqrt{۷}}}{\sqrt{۴+\sqrt{۷}}+\sqrt{۴-\sqrt{۷}}}=\frac{۲\sqrt{۷}}{\sqrt{۴+\sqrt{۷}}+\sqrt{۴-\sqrt{۷}}}=A$$

$$A^۲=\frac{۲۸}{۴+\cancel{\sqrt{۷}}+۴-\cancel{\sqrt{۷}}+۲\sqrt{(۴+\sqrt{۷})(۴-\sqrt{۷})}}=\frac{۲۸}{۸+۶}=۲\Rightarrow A=\sqrt{۲}$$

۵۱-گزینه ۲ درست است.

$$۲(x^۲-۲x+۱)-۵|x-۱|+۲\le ۰$$

$$۲|x-۱|^۲-۵|x-۱|+۲\le ۰$$

$$|x-۱|=\frac{۵\pm\sqrt{۲۵-۱۶}}{۴}=\begin{cases}۲\\ \frac{۱}{۲}\end{cases}$$

$$(|x-۱|-۲)(|x-۱|-\frac{۱}{۲})\le ۰\Rightarrow\frac{۱}{۲}\le|x-۱|\le ۲$$

$$|x-۱|\le ۲\Rightarrow -۲\le x-۱\le ۲\Rightarrow -۱\le x\le ۳$$

$$|x-۱|\ge\frac{۱}{۲}\Rightarrow x-۱\ge\frac{۱}{۲}\quad \text{یا}\quad x-۱\le-\frac{۱}{۲}\Rightarrow x\le\frac{۱}{۲}\ \text{یا}\ x\ge\frac{۳}{۲}$$

مجموعه جواب : $(\frac{۳}{۲}\le x\le ۳)\cup(-۱\le x\le\frac{۱}{۲})$

$$[-۱,\frac{۱}{۲}]\cup[\frac{۳}{۲},۳]$$

۵۲. گزینه ۳ درست است.

x		-۲		$x_۱$		۱		$x_۲$	
$-x^۲+۳x+m$	$-$		$-$	۰	$+$		$+$	۰	$-$

$$x=-۲\Rightarrow -(-۲)^۲+۳(-۲)+m<۰\Rightarrow m<۱۰$$

$$x=۱\Rightarrow -(۱)^۲+۳(۱)+m>۰\Rightarrow m>-۲$$

$$\overset{\cap}{\Rightarrow}\ -۲<m<۱۰$$

۵۳. گزینه ۲ درست است.

$$S=۳\ ,\ P=۱$$

$$A = x_2^2\sqrt{x_1} + x_1^2\sqrt{x_2}$$
$$A^2 = x_2^4 . x_1 + x_1^4 . x_2 + 2x_1^2x_2^2\sqrt{x_1x_2}$$
$$A^2 = x_1x_2(x_1^3 + x_2^3) + 2x_1^2x_2^2 . \sqrt{x_1x_2}$$
$$A^2 = x_1x_2[(x_1 + x_2)^3 - 3x_1x_2(x_1 + x_2)] + 2(x_1x_2)^2 . \sqrt{x_1x_2}$$
$$A^2 = P[S^3 - 3PS] + 2P^2 . \sqrt{P} = 1[27 - 9] + 2 = 20$$
$$A = \sqrt{20} = 2\sqrt{5}$$

۵۴- گزینه ۳ درست است.

$$\frac{x\sqrt{x+\sqrt{x}}}{\sqrt{x-\sqrt{x}}} \times \frac{\sqrt{x-\sqrt{x}}}{\sqrt{x-\sqrt{x}}} = \frac{x\sqrt{x(x-1)}}{x-\sqrt{x}} \times \frac{x+\sqrt{x}}{x+\sqrt{x}} = \frac{x(x+\sqrt{x}).\sqrt{x(x-1)}}{x(x-1)}$$
$$\frac{\cancel{x}\,\cancel{(x+\sqrt{x})}.\sqrt{x(x-1)}}{\cancel{x}\,\cancel{(x-1)}} \times \frac{\cancel{x-1}}{\cancel{x+\sqrt{x}}} = \sqrt{x^2 - x}$$

۵۵- گزینه ۴ درست است.

x	$-\infty$		-4		-3		-1		0		1		4		$+\infty$
p(x)			0	$+$	∞	$-$	0	$-$	∞	$-$	∞	$-$	0		

۵۶- گزینه ۲ درست است.

$$\Delta = (a-2)^2 - 4(\frac{a}{4})(1) > 0 \Rightarrow a^2 - 5a + 4 > 0$$
$$(a-4)(a-1) > 0 \Rightarrow a < 1 \quad \text{یا} \quad a > 4$$
$$p = \frac{1}{\frac{a}{4}} < 0 \Rightarrow a < 0$$
$$s = \frac{-(a-2)}{\frac{a}{4}} < 0 \Rightarrow \frac{4(a-2)}{a} > 0 \Rightarrow a < 0 \quad \text{یا} \quad a > 2$$

اشتراک جواب‌ها $\Rightarrow a < 0$

۵۷. گزینه ۲ درست است.

$$|5-2x| + |3+2y| = 17 \rightarrow |3+2y| = 17 - |5-2x|$$

چون $|3+2y| \geq 0 \Rightarrow 17 - |5-2x| \geq 0 \rightarrow |5-2x| \leq 17$

$$-17 \leq 5 - 2x \leq 17 \xrightarrow{-5} -22 \leq -2x \leq 12 \xrightarrow{\div(-2)}$$
$$11 \geq x \geq -6 \xrightarrow{\text{x صحیح}} x = -6, -5, \ldots, -1, 0, 1, 2, \ldots, 11$$

۵۸. گزینه ۱ درست است.

اگر x_1 و x_2 محل برخورد با محور **x**ها باشند:

ضابطه سهمی $y = a(x - x_1)(x - x_2)$

$$y = a\left(x - (3 + \sqrt{2})\right)\left(x - (3 - \sqrt{2})\right)$$

محل برخورد با محور **y**ها $(0, -14) \xrightarrow{\text{جاگذاری در تابع}} -14 = a\left(0 - (3 + \sqrt{2})\right)\left(0 - (3 - \sqrt{2})\right) \rightarrow \boxed{a = -2}$

$$y = -2\left(x - (3 + \sqrt{2})\right)\left(x - (3 - \sqrt{2})\right)$$

$$\boxed{y = -2x^2 + 12x - 14} \rightarrow a^2 + b^2 + c^2 = (-2)^2 + 12^2 + (-14)^2 = 344$$

۵۹-گزینه ۴ درست است.

$$2\sqrt{2t - 1} = t + 1 \xrightarrow{\text{دو طرف به توان ۲}} 4(2t - 1) = (t + 1)^2 \rightarrow t^2 - 6t + 5 = 0$$

$$t = 1, t = 5 \Rightarrow \text{ریشه‌های جدید} \begin{cases} x_1 = 3(1) - 8 = -5 \\ x_2 = 3(5) - 8 = 7 \end{cases} \begin{cases} S = 2 & \text{مجموع ریشه‌ها} \\ P = -35 & \text{ضرب ریشه‌ها} \end{cases}$$

$$x^2 - Sx + P = 0$$

$$\boxed{x^2 - 2x - 35 = 0}$$

۶۰. گزینه ۴ درست است.

با فرض $\sqrt{x} + \sqrt{y} = M \xrightarrow{\text{دو طرف به توان ۲}} x + y + 2\sqrt{xy} = M^2 \rightarrow 19 + 2\sqrt{9} = M^2$

$$\rightarrow M = 5 \rightarrow \boxed{\sqrt{x} + \sqrt{y} = 5} \xrightarrow{\text{دو طرف به توان ۳}} x\sqrt{x} + y\sqrt{y} + 3\sqrt{xy}(\sqrt{x} + \sqrt{y}) = 125$$

$$\rightarrow x\sqrt{x} + y\sqrt{y} + 3\sqrt{9}(5) = 125 \rightarrow \boxed{x\sqrt{x} + y\sqrt{y} = 80}$$

۶۱. گزینه ۴ درست است.

$$\frac{4x^3 - 4x^2 + x}{x - 1} < 0 \Rightarrow \frac{x(4x^2 - 4x + 1)}{x - 1} < 0 \Rightarrow \frac{x(2x - 1)^2}{x - 1} < 0$$

مجموعه جواب این نامعادله، قرار است به فرم $(a, b) - \{c\}$ باشد، واضح است که a , b ریشه‌های غیرمکرر زوج صورت و مخرج و c ریشه مکرر زوج صورت بوده است، یعنی:

$$\begin{cases} a = 0 \\ b = 1 \\ c = \frac{1}{2} \end{cases}$$

$$\Rightarrow a + b - 2c = \text{صفر}$$

۶۲. گزینه ۳ درست است.

وقتی ریشه‌های معادله، دو عدد فرد متوالی هستند، حتماً اختلاف ریشه‌ها برابر با ۲ است. پس:

$$\frac{\sqrt{\Delta}}{|a|}=۲\xrightarrow{a=۲}\frac{\sqrt{\Delta}}{۲}=۲\Rightarrow\sqrt{\Delta}=۴\Rightarrow\Delta=۱۶$$

$$(-۲m)^۲-۴(۲)(۷m-۲۶)=۱۶\Rightarrow ۴m^۲-۵۶m+۲۰۸=۱۶\Rightarrow$$

$$۴m^۲-۵۶m+۱۹۲=۰\xrightarrow{\div ۴}m^۲-۱۴m+۴۸=۰\Rightarrow m=۶,۸$$

امّا دقت کنید که دو عدد با اختلاف ۲ لزوماً دو عدد فرد متوالی نیستند، شاید دو عدد زوج متوالی باشند! پس مقادیر به دست آمده برای m را چک می کنیم:

$m=۶\rightarrow$ معادله : $۲x^۲-۱۲x+۱۶=۰\rightarrow x^۲-۶x+۸=۰\rightarrow x=۲,۴$ غ ق ق (دو عدد زوج متوالی)

$m=۸\rightarrow$ معادله : $۲x^۲-۱۶x+۳۰=۰\rightarrow x^۲-۸x+۱۵=۰\rightarrow x=۳,۵$ ق ق (دو عدد فرد متوالی)

پس فقط $m=۸$ قابل قبول است، یعنی مجموع دو تاس ریخته شده باید برابر با ۸ باشد:

تاس‌ها $\rightarrow$ $(۲,۶)(۶,۲)(۳,۵)(۵,۳)(۴,۴)$: حالت ۵

پس احتمال موردنظر برابر با $\frac{۵}{۳۶}$ است.

۶۳. گزینه ۴ درست است.

معادله را به صورت ساده‌تری می‌نویسیم:

$$\sqrt{۲(x^۲-۳x+۴)}=-(x^۲-۳x)$$

حالا با تغییر متغییر $x^۲-۳x=t$ داریم:

$$\sqrt{۲(t+۴)}=-t$$

طرفین این معادله گنگ را به توان دو می‌رسانیم:

$$۲(t+۴)=t^۲\Rightarrow t^۲-۲t-۸=۰\Rightarrow t=۴,-۲$$

اگر ریشه‌های به دست آمده را در معادله گنگ اولیه (برحسب t) چک کنیم، $t=-۲$ قابل قبول و $t=۴$ غیر قابل قبول است. حالا داریم:

$$t=-۲\Rightarrow x^۲-۳x=-۲\Rightarrow x^۲-۳x+۲=۰\Rightarrow x=۱,۲$$

اگر واسطه هندسی بین این دو ریشه را k بنامیم داریم:

$$k^۲=۱\times۲\Rightarrow k=\pm\sqrt{۲}$$

پس واسطه هندسی منفی برابر با $-\sqrt{۲}$ است.

۶۴-گزینه ۱ درست است.

$$\left(x+\frac{1}{x}\right)^3=(3)^3 \rightarrow x^3+\frac{1}{x^3}+3x^2\times\frac{1}{x}+3x\times\frac{1}{x^2}=27$$

$$\rightarrow x^3+\frac{1}{x^3}+3\underbrace{\left(x+\frac{1}{x}\right)}_{=3}=27 \rightarrow \boxed{x^3+\frac{1}{x^3}=18}$$

$$A=\frac{3\sqrt{3}-8}{7+2\sqrt{3}}\times\frac{7-2\sqrt{3}}{7-2\sqrt{3}}+\sqrt{(2+\sqrt{3})^2}$$

$$=\frac{21\sqrt{3}+16\sqrt{3}-56-18}{49-12}+\left|\underbrace{2+\sqrt{3}}_{\text{عبارت مثبت}}\right|$$

$$=\frac{37\sqrt{3}-74}{37}+2+\sqrt{3}=\frac{\cancel{37}(\sqrt{3}-2)}{\cancel{37}}+2+\sqrt{3}=2\sqrt{3}$$

عبارت موردنظر سؤال $=A^2+B+1=(2\sqrt{3})^2+18+1=31$

۶۵- گزینه ۳ درست است.

اگر $|a|=-a$ باشد آنگاه $a\le 0$ بنابراین:

$x^2-5x-24\le 0 \Rightarrow$

x	$-\infty$		-3		8		$+\infty$
عبارت کل نامعادله		$+$	0	$-$	0	$+$	

$\Rightarrow -3\le x\le 8 \Rightarrow$ این بازه شامل ۱۲ عدد صحیح است.

۶۶- گزینه ۴ درست است.

$4x^2+6x-1=0$

$$\begin{cases}\alpha+\beta=\dfrac{-b}{a}=-\dfrac{3}{2}\\ \alpha\beta=\dfrac{c}{a}=\dfrac{-1}{4}\end{cases}$$

$ax^2+bx+c=0$ جمع ریشه‌های معادله $S=(\alpha+3\beta)+(\beta+3\alpha)=4(\alpha+\beta)=4\left(-\frac{3}{2}\right)=-6$

$ax^2+bx+c=0$ ضرب ریشه‌های معادله $P=(\alpha+3\beta)(\beta+3\alpha)=3(\alpha^2+\beta^2)+10\alpha\beta$

$$=3\left((\alpha+\beta)^2-2\alpha\beta\right)+10\alpha\beta$$

$$=3(\alpha+\beta)^2+4\alpha\beta$$

$$=3\left(-\frac{3}{2}\right)^2+4\left(-\frac{1}{4}\right)=\frac{23}{4}$$

$x^2-sx+P=0$

$$x^2-(-6)x+\frac{23}{4}=0 \rightarrow \boxed{4x^2+24x+23=0}$$

$a=4 \quad b=24 \quad c=23$

$a+b+c=51$

۶۷. گزینه ۱ درست است.

اگر سرعت قطار در مسیر برگشت x باشد، در مسیر رفت سرعت آن $x+20$ است:

$$t_2 - t_1 = \frac{36}{60} \rightarrow t_2 - t_1 = 0/6$$

$$\frac{240}{x} - \frac{240}{x+20} = \frac{6}{10} \rightarrow 240\left(\frac{20}{x(x+20)}\right) = \frac{6}{10}$$

$$x(x+20) = 8000 \rightarrow x = 80\frac{km}{h}$$

۶۸. گزینه ۴ درست است.

$$(x+\frac{1}{x}+\sqrt{2})^2(x+\frac{1}{x}-\sqrt{2})^2 = ((x+\frac{1}{x})^2-2)^2$$

$$=(x^2+\frac{1}{x^2}+2\cancel{x}.\frac{1}{\cancel{x}}-2)^2 = (x^2+\frac{1}{x^2})^2 = x^4+\frac{1}{x^4}+2x^2\times\frac{1}{x^2}$$

$$= x^4+\frac{1}{x^4}+2 \xrightarrow{x=\sqrt[4]{7-4\sqrt{3}}} 7-4\sqrt{3}+\frac{1}{7-4\sqrt{3}}+2 \xrightarrow{\text{گویا کردن مخرج}}$$

$$=7-4\sqrt{3}+\frac{1}{7-4\sqrt{3}}\times\frac{7+4\sqrt{3}}{7+4\sqrt{3}}+2$$

$$=7-4\sqrt{3}+\frac{7+4\sqrt{3}}{49-48}+2 = 7-\cancel{4\sqrt{3}}+7+\cancel{4\sqrt{3}}+2 = 16$$

۶۹-گزینه ۱ درست است.

$$2x^2-x+a-1=0 \xrightarrow{\text{شرط حداقل یک ریشه: } \Delta\geq 0} (-1)^2-4(2)(a-1)\geq 0 \rightarrow a\leq\frac{9}{8} \qquad (1)$$

$$ax^2+x+\frac{1}{4}=0 \xrightarrow{\text{شرط حداکثر یک ریشه: } \Delta\leq 0} 1^2-4(a)(\frac{1}{4})\leq 0 \rightarrow a\geq 1 \qquad (2)$$

$$\left.\begin{array}{l}(1),(2) \Rightarrow 1\leq a\leq\frac{9}{8} \\ (\text{حداقل } a)c=1 \quad (\text{حداکثر } a)b=\frac{9}{8}\end{array}\right\} \Rightarrow 8x^2-9x+1=0 \xrightarrow{\text{مجموع ضرایب}=0} \begin{cases}x=1\\ x=\frac{1}{8}\end{cases}$$

حاصل ضرب وارون ریشه‌ها $=1\times 8=8$

۷۰-گزینه ۲ درست است.

$$x=۳+۲\sqrt{۲}\rightarrow x^{۲}=(۳+۲\sqrt{۲})^{۲}=۹+۸+۱۲\sqrt{۲}=۱۷+۱۲\sqrt{۲}$$

$$x=۳+۲\sqrt{۲}\rightarrow x^{-۲}=\frac{۱}{x^{۲}}=\frac{۱}{(۳+۲\sqrt{۲})^{۲}}\times\frac{(۳-۲\sqrt{۲})^{۲}}{(۳-۲\sqrt{۲})^{۲}}=\frac{(۳-۲\sqrt{۲})^{۲}}{(۹-۸)^{۲}}=۹+۸-۱۲\sqrt{۲}=۱۷-۱۲\sqrt{۲}$$

حاصل عبارت خواسته شده را می‌یابیم.

$$\sqrt{(۱۷+۱۲\sqrt{۲})+۵}-\sqrt{(۱۷-۱۲\sqrt{۲})+۵}=\sqrt{۲۲+۱۲\sqrt{۲}}-\sqrt{۲۲-۱۲\sqrt{۲}}$$

$$=\sqrt{(۳\sqrt{۲}+۲)^{۲}}-\sqrt{(۳\sqrt{۲}-۲)^{۲}}=\left|۳\sqrt{۲}+۲\right|-\left|۳\sqrt{۲}-۲\right|=۴$$

۷۱- گزینه ۳ درست است.

$$\frac{۲۷-۸x^{۳}}{۳x+۱}\geq ۰\Rightarrow\frac{(۳-۲x)\overbrace{(۹+۶x+۴x^{۲})}^{\Delta<۰,\,a>۰\ \text{همواره مثبت}}}{۳x+۱}\geq ۰\Rightarrow\frac{۳-۲x}{۳x+۱}\geq ۰$$

$$\Rightarrow\frac{-۱}{۳}<x\leq\frac{۳}{۲}\xrightarrow{\times(-۵)}\frac{۵}{۳}>-۵x\geq\frac{-۱۵}{۲}\xrightarrow{+۲}$$

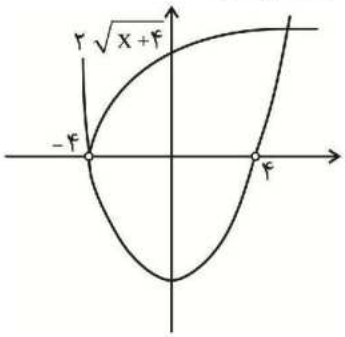
$\frac{۱۱}{۳}>۲-۵x\geq\frac{-۱۱}{۲}\rightarrow[۲-۵x]=-۶,-۵,\ldots,-۱,۰,۲,۳\rightarrow$ ۱۰عدد صحیح اعضای مجموعه جواب هستند.

۷۲. گزینه ۲ درست است.

معادله را با شرط $x\neq\pm۴$ طرفین وسطین می‌کنیم.

$$۲\sqrt{x+۴}=x^{۲}-۱۶$$

نمودار تابع‌های $y_۱=x^{۲}-۱۶$ و $y_۲=۲\sqrt{x+۴}$ را در دامنهٔ $\{x>-۴\}-\{۴\}$ رسم می‌کنیم:



دو نمودار یک بار هم دیگر را قطع می‌کنند پس معادله یک ریشه دارد.

۷۳. گزینه ۲ درست است.

با فرض $x^۲ = t$ معادله به‌صورت زیر در می‌آید:

$$t^۲ - ۲(m-۲)t + ۱۴ - m = ۰$$

این معادله باید دارای دو ریشه حقیقی متمایز مثبت باشد تا برای x، چهار جواب حقیقی متمایز به‌دست بیاید. برای آنکه معادله درجه دوم، دو ریشه مثبت داشته باشد، باید:

$$\begin{cases} \Delta > ۰ \Rightarrow (-۲(m-۲))^۲ - ۴(۱)(۱۴-m) > ۰ \Rightarrow (m-۲)^۲ - (۱۴-m) > ۰ \\ \qquad \Rightarrow m^۲ - ۳m - ۱۰ > ۰ \Rightarrow m < -۲ \text{ یا } ۵ < m \\ S > ۰ \Rightarrow ۲(m-۲) > ۰ \Rightarrow m > ۲ \\ P > ۰ \Rightarrow ۱۴ - m > ۰ \Rightarrow m < ۱۴ \end{cases}$$

از اشتراک بازه‌های فوق، به $۵ < m < ۱۴$ می‌رسیم و از آنجا که m عدد ظاهر شده در پرتاب تاس است، فقط $m = ۶$ قابل قبول است که با احتمال $\frac{۱}{۶}$ اتفاق می‌افتد.

۷۴. گزینه ۲ درست است.

برای سهمی $g(x) = -x^۲ + ۴x + k$ داریم:

$$\begin{cases} x_{\text{رأس}} = \frac{-b}{۲a} = \frac{-۴}{۲(-۱)} = ۲ \\ y_{\text{رأس}} = g(۲) = -۴ + ۸ + k = k + ۴ \end{cases}$$

برای سهمی $f(x) = ۲x^۲ + bx + c$ داریم:

$$\begin{cases} x_{\text{رأس}} = \frac{-b}{۲a} = \frac{-b}{۲(۲)} = \frac{-b}{۴} \xrightarrow{\text{باید}} \frac{-b}{۴} = ۲ \Rightarrow \boxed{b = -۸} \\ y_{\text{رأس}} = f(۲) = ۸ + ۲b + c \xrightarrow{b=-۸} = c - ۸ \xrightarrow{\text{باید}} c - ۸ = k + ۴ \Rightarrow \boxed{c = k + ۱۲} \end{cases}$$

با جایگذاری مقادیر b و c از بالا، ضابطه منحنی $y = (۲c - ۴)x^۲ + ۲bx + ۶$ به‌صورت زیر می‌شود.

$$y = (۲k + ۲۴ - ۴)x^۲ - ۱۶x + ۶ \Rightarrow y = (۲k + ۲۰)x^۲ - ۱۶x + ۶$$

حالا برای آن‌که این منحنی، خط $y = ۲$ را قطع نکند، باید معادله زیر جواب نداشته باشد:

$$(۲k + ۲۰)x^۲ - ۱۶x + ۶ = ۲ \Rightarrow (۲k + ۲۰)x^۲ - ۱۶x + ۴ = ۰ \Rightarrow (k + ۱۰)x^۲ - ۸x + ۲ = ۰$$

$$\Delta < ۰ \Rightarrow ۶۴ - ۴(k + ۱۰)(۲) < ۰ \Rightarrow ۸ - (k + ۱۰) < ۰ \Rightarrow -۲ < k$$

این بازه، فقط شامل یک عدد صحیح منفی یعنی $k = -۱$ است.

۷۵- گزینه ۱ درست است.

معادله درجهٔ دوم، زمانی فقط یک ریشه دارد که $\Delta = ۰$ باشد، پس:

$$x^۲ - (۱+\log a)x + \log a = ۰$$

$$\Delta = b^۲ - ۴ac = (۱+\log a)^۲ - ۴\log a = (۱+۲\log a + (\log a)^۲) - ۴\log a = (\log a)^۲ - ۲\log a + ۱$$
$$= (\log a - ۱)^۲$$

$$\Delta = ۰ \Rightarrow (\log a - ۱)^۲ = ۰ \Rightarrow \log a = ۱ \Rightarrow a = ۱۰$$

حالا با جایگذاری $a = ۱۰$ در معادله دوم داریم:

$$۳^{\log \sin x} \times ۳^{\log \cos x} = ۱ \Rightarrow ۳^{\log \sin x + \log \cos x} = ۱ \Rightarrow \log \sin x + \log \cos x = ۰$$

با استفاده از خاصیت $\log a + \log b = \log ab$ داریم:

$$\log \sin x \cos x = ۰ \Rightarrow \sin x \cos x = ۱ \Rightarrow \frac{۱}{۲}\sin ۲x = ۱ \Rightarrow \sin ۲x = ۲$$

واضح است که این معادله مثلثاتی جواب ندارد.

اختراعات و اکتشافات

1- ۲۰۰ کیلوگرم محلول آب نمک با غلظت ۴ درصد و ۳۰۰ کیلوگرم آب نمک با غلظت ۶ درصد را به همراه ۱۴ کیلوگرم نمک خالص، در یک ظرف جدید می‌ریزیم چند کیلوگرم از آب آن تبخیر کنیم تا غلظت نهایی ۱۰ درصد شود؟

۱) ۱۱۲ ۲) ۱۱۴ ۳) ۱۱۶ ۴) ۱۱۸

پاسخ: گزینه ۲ (ریاضی ۲- صفحه ۱۹ تا ۲۱ - متوسط)

دقّت کنید اگر وزن نمک در یک محلول n کیلوگرمی برابر m باشد آنگاه غلظت محلول برابر $\frac{m}{n}\times ۱۰۰$ درصد است.

	وزن کل محلول	نمک موجود در محلول
ظرف اوّل	۲۰۰	$۲۰۰\times ۰/۰۴=۸$
ظرف دوم	۳۰۰	$۳۰۰\times ۰/۰۶=۱۸$
ظرف نهایی	۵۱۴	$۸+۱۸+۱۴=۴۰$

اگر x کیلوگرم آب تبخیر کنیم وزن کل در ظرف نهایی برابر $۵۱۴-x$ می‌شود.

$$\frac{۱۰}{۱۰۰}=\frac{۴۰}{۵۱۴-x}\Rightarrow ۵۱۴-x=۴۰۰\Rightarrow x=۱۱۴$$

گروه آموزشی ماز

2- هرگاه $P(x)=\frac{ax-۱}{a-x}$ به‌طوریکه جدول تعیین علامت آن به‌صورت مقابل باشد، حدود a کدام است؟

x		a		$\frac{۱}{a}$	
p(x)	−	‖	+	|	−

۱) $a>۱$ ۲) $۰<a<۱$ ۳) $-۱<a<۰$ ۴) $a<-۱$

پاسخ: گزینه ۲ (ریاضی ۱- صفحه ۸۳ تا ۸۸ - متوسط)

نکته: جدول تعیین علامت هر دو عبارت $\frac{ax+b}{cx+d}$ و $(ax+b)(cx+d)$ به‌صورت مقابل است. $(ac\neq ۰)$

x		$-\frac{d}{c}$		$-\frac{b}{a}$	
	موافق علامت ac		مخالف علامت ac		موافق علامت ac

x		$-\frac{b}{a}$		$-\frac{d}{c}$	
	موافق علامت ac		مخالف علامت ac		موافق علامت ac

در این سؤال حاصل‌ضرب ضریب x صورت و مخرج برابر $-a$ است و چون علامت بین ریشه‌ها مثبت است پس $-a$ منفی و یا a مثبت است.

$$\begin{cases} a>۰ \\ a<\frac{۱}{a}\xrightarrow{a>۰} a^۲<۱\xrightarrow{a>۰} ۰<a<۱ \end{cases}$$

3 - اختلاف جواب‌های معادله‌ی $\sqrt{x^۲+۳x+۷}+\sqrt{x^۲+۳x-۱}=۴$ چقدر است؟

۱) $\sqrt{۱۱}$ ۲) $\sqrt{۱۳}$ ۳) $\sqrt{۱۵}$ ۴) $\sqrt{۱۷}$

پاسخ: گزینه ۴ (ریاضی ۲- صفحه ۲۳- متوسط)

فرض کنید $x^۲+۳x-۱=t$ باشد، در این صورت معادله را برحسب t می‌نویسیم، برای این کار یکی از رادیکال‌ها را به سمت راست برده و سپس دو طرف تساوی را به توان ۲ می‌رسانیم.

$$\sqrt{t+۸}+\sqrt{t}=۴\Rightarrow \sqrt{t+۸}=۴-\sqrt{t}$$

به توان ۲: $t+۸=۱۶+t-۸\sqrt{t}\Rightarrow ۸\sqrt{t}=۸\Rightarrow t=۱$

$$\Rightarrow x^۲+۳x-۱=۱\Rightarrow x^۲+۳x-۲=۰$$

$$|\alpha-\beta|=\frac{\sqrt{\Delta}}{|a|}=\sqrt{۹+۸}=\sqrt{۱۷}$$

نکته: در معادله درجه دوم $ax^۲+bx+c=۰$ تفاضل ریشه‌ها برابر است با: $\frac{\sqrt{\Delta}}{|a|}$.

4- دو شخص A و B دیواری را با هم در ۱۸ ساعت رنگ می‌زنند. بعد از ۱۲ ساعت کار مشترک A کار را رها می‌کند و B مابقی دیوار را در ۱۸ ساعت رنگ می‌زند. اگر B پس از ۱۲ ساعت کار مشترک، کار را رها می‌کرد، A مابقی دیوار را در چند ساعت رنگ می‌زد؟

۱) ۶ ۲) ۹ ۳) ۱۲ ۴) ۱۵

پاسخ: گزینه ۲ (ریاضی ۲- صفحه ۱۹ تا ۲۱- متوسط)

فرض کنید A به تنهایی در a ساعت و B به تنهایی در b ساعت دیوار را رنگ بزنند. طبق صورت سؤال روابط زیر برقرار است:

$$\frac{1}{a}+\frac{1}{b}=\frac{1}{18}$$

$$12\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}\right)+\frac{18}{b}=1 \Rightarrow \frac{18}{b}=\frac{1}{3}\Rightarrow b=54\Rightarrow a=\frac{18b}{b-18}=27$$

$$12\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}\right)+\frac{x}{a}=1\Rightarrow\frac{12}{18}+\frac{x}{27}=1\Rightarrow x=9$$

گروه آموزشی ماز

5- مجموعه جواب نامعادله‌ی $\left|\frac{2x+1}{ax-2}\right|<1$ به‌صورت $(-\infty,b)$ است. حاصل $a+b$ کدام است؟

۱) ۱/۵ ۲) ۱/۷۵ ۳) ۲/۲۵ ۴) ۲/۵

پاسخ: گزینه ۳ (ریاضی ۱- صفحه ۹۱ تا ۹۳- متوسط)

اگر مجموعه جواب نامعادله‌ی $ax^2+bx+c<0$ به‌صورت $(-\infty,\alpha)$ یا $(\alpha,+\infty)$ باشد آنگاه $a=0$ است. به بیان دیگر عبارت، درجه اوّل است.

$$\frac{2x+1}{ax-2}<1 \Rightarrow |2x+1|<|ax-2|$$

$$\xrightarrow{\text{به توان ۲}} 4x^2+4x+1<a^2x^2-4ax+4$$

$$\Rightarrow (4-a^2)x^2+(4+4a)x-3<0$$

$$4-a^2=0\Rightarrow\begin{cases}a=2\Rightarrow 12x-3<0\Rightarrow x<\frac{1}{4} & \checkmark\\ a=-2\Rightarrow -4x-3<0\Rightarrow x>-\frac{3}{4} & \times\end{cases}$$

چون مجموعه جواب به‌صورت $x<b$ است پس $b=\frac{1}{4}$ است. لذا $a+b=2/25$ است.

www.biomaze.ir

6- جدول تعیین علامت عبارت $P=(x+1)(2x^2+ax+3a)$ به‌صورت مقابل است. حاصل $a+b$ کدام است؟

x		-1		b	
p	−		−		+

۱) $\frac{3}{2}$ ۲) $\frac{1}{2}$ ۳) $-\frac{1}{2}$ ۴) $-\frac{3}{2}$

پاسخ: گزینه ۲ (ریاضی ۱- صفحه ۸۳ تا ۸۸- متوسط)

با توجّه به این که در $x=-1$ علامت عبارت P عوض نشده است پس $x=-1$ ریشه‌ی مضاعف $P=0$ است و این بدان معناست که $x=-1$ ریشه‌ی پرانتز دوم نیز هست.

$$\begin{cases}2x^2+ax+3a=0\\ x=-1\end{cases}\Rightarrow 2-a+3a=0\Rightarrow a=-1$$

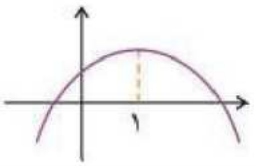
$$\Rightarrow P=(x+1)(2x^2-x-3)=(x+1)(x+1)(2x-3)$$

$$P=0\Rightarrow\begin{cases}x=-1 & \text{ریشه مضاعف}\\ x=\frac{3}{2}\Rightarrow b=\frac{3}{2}\end{cases}$$

بنابراین حاصل $a+b$ برابر است با: $a+b=-1+\frac{3}{2}=\frac{1}{2}$

www.mapedu.ir

7 - نمودار سهمی $f(x)=-ax^2+bx+a$ شکل روبه‌رو است. جمع مربع ریشه‌های $f(x)=0$ چه عددی است؟



۱) ۱۰
۲) ۹
۳) ۸
۴) ۶

پاسخ: گزینه ٤ (ریاضی ۲- فصل ۱- صفحه ١٤ تا ١٨- ساده)

هر تست ماز یک کلاس درس!

اگر α,β ریشه‌های معادله درجه دوم $f(x)=ax^2+bx+c=0$ و طول رأس سهمی f، برابر x_s باشد، آنگاه:

۱) $S=\alpha+\beta=-\frac{b}{a}$

۲) $P=\alpha\beta=\frac{c}{a}$

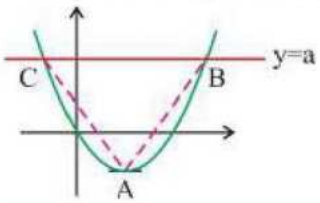
۳) $x_s=\frac{\alpha+\beta}{2}$

رأس سهمی وسط ریشه‌هاست.

پس $S=\alpha+\beta=2$ است از طرفی $P=\alpha\beta=\frac{a}{-a}=-1$ است.

$$\alpha^2+\beta^2=(\alpha+\beta)^2-2\alpha\beta=S^2-2P=4+2=6$$

8 - در شکل مقابل، نمودار سهمی $y=x^2-ax$ و خط $y=a$ رسم شده است. اگر مساحت مثلث ABC برابر ۱ باشد، حاصل a^2+4a کدام است؟



۱) ۸
۲) ۲
۳) ۶
۴) ۴

پاسخ: گزینه ٤ (ریاضی ۲- فصل ۱- صفحه ۱۱ تا ۱۸ - متوسط)

هر تست ماز یک کلاس درس!

روابط بین ریشه‌های معادله درجه ۲:

اگر $y=ax^2+bx+c$ یک سهمی با رأس S و α,β ریشه‌های معادلهٔ $ax^2+bx+c=0$ باشند آنگاه:

۱) $S=\alpha+\beta=-\frac{b}{a}$

۲) $P=\alpha\beta=\frac{c}{a}$

۳) $|\alpha-\beta|=\frac{\sqrt{\Delta}}{|a|}$

۴) $x_S=-\frac{b}{2a}$

۵) $y_S=-\frac{\Delta}{4a}$

$$y=a=x^2-ax\Rightarrow x^2-ax-a=0$$

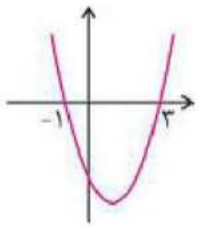
طول پاره‌خط BC برابر اختلاف ریشه‌های معادلهٔ بالاست.

$$BC=|\alpha-\beta|=\frac{\sqrt{a^2+4a}}{1}=\sqrt{a^2+4a}$$

عرض رأس سهمی داده شده برابر $y(\frac{a}{2})=-\frac{a^2}{4}$ است. پس ارتفاع مثلث برابر $a+\frac{a^2}{4}$ است.

$$S=\frac{1}{2}\left(a+\frac{a^2}{4}\right)\times\sqrt{a^2+4a}\xrightarrow{a^2+4a=t}\frac{1}{2}\frac{t}{4}\sqrt{t}=1\Rightarrow t^3=64\Rightarrow t=4$$

9 - نمودار سهمی $f(x)=ax^2+bx-3c$ به‌صورت مقابل است. اگر $f\left(\frac{c}{a}\right)=-8$ باشد، مقدار a کدام است؟



۱) ۳

۲) ۲

۳) $\frac{3}{2}$

۴) $\frac{4}{3}$

پاسخ: گزینه ۲ (ریاضی ۱- فصل ٤- صفحه ۷۸ تا ۸۲/ ریاضی ۲- فصل ۱- صفحه ۱۱ تا ۱۸- ساده)

هر تست ماز یک کلاس درس!

معادله سهمی:

اگر $x=\alpha$ و $x=\beta$ محل برخورد نمودار سهمی $y=f(x)$ با محور x ها باشد، معادلهٔ آن به‌صورت زیر است:

$$f(x)=a(x-\alpha)(x-\beta)$$

اگر معادله سهمی را به‌صورت $y=f(x)=ax^2+bx+c$ فرض کنید آنگاه:

$$1)\ S=\alpha+\beta=-\frac{b}{a}$$

$$2)\ P=\alpha\beta=\frac{c}{a}$$

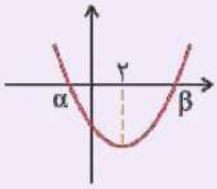
ضرب ریشه‌ها برابر $\frac{-3c}{a}$ است، پس $-\frac{3c}{a}=-3\Rightarrow\frac{c}{a}=1$

$$f\left(\frac{c}{a}\right)=-8\Rightarrow f(1)=-8\Rightarrow a+b-3c=-8\xrightarrow{c=a}b-2a=-8\ *$$

جمع ریشه‌ها: $-\frac{b}{a}=2\Rightarrow b=-2a\xrightarrow{*}2a-8=-2a\Rightarrow a=2$

سؤالات منتخب

نمودار سهمی $y=ax^2+bx-3a$ به‌صورت مقابل است. حاصل $\alpha^3+\beta^3$ کدام است؟



۱) ۷۲ ۲) ۸۴

۳) ۹۶ ۴) ۱۰۰ ✓

www.biomaze.ir

10 - اگر α,β ریشه‌های معادلهٔ $x^2-x-4=0$ و $\frac{2}{\beta^2+\beta},\frac{2}{\alpha^2+\alpha}$ ریشه‌های معادلهٔ $x^2+mx+n=0$ باشند، حاصل $m+n$ کدام است؟

۱) ۳ ۲) ۲- ۳) ۳- ۴) ۲

پاسخ: گزینه ۲ (ریاضی ۲- فصل ۱- صفحه ۱۱ تا ۱۳- سخت)

هر تست ماز یک کلاس درس!

تشکیل معادله درجه ۲:

معادله درجه دومی که ریشه‌های آن α,β باشد به‌صورت $x^2-Sx+P=0$ است که در آن $S=\alpha+\beta$ و $P=\alpha\beta$ است.

$$\begin{cases}\alpha+\beta=1\\ \alpha\beta=-4\end{cases}$$

$x=\alpha$ یکی از ریشه‌های معادله $x^2-x-4=0$ می‌باشد، بنابراین در این معادله صدق می‌کند، پس:

$$\alpha^2-\alpha-4=0\Rightarrow\alpha^2=\alpha+4\Rightarrow\alpha^2+\alpha=2\alpha+4\Rightarrow\frac{2}{\alpha^2+\alpha}=\frac{1}{\alpha+2}$$

www.mapedu.ir

β را هم در معادله صدق بدهیم، داریم: $\frac{۲}{\beta^۲+\beta}=\frac{۱}{\beta+۲}$

پس ریشه‌های معادله جدید $\frac{۱}{\alpha+۲}$ و $\frac{۱}{\beta+۲}$ است.

جمع ریشه‌های معادله جدید : $m=-\left(\frac{۱}{\alpha+۲}+\frac{۱}{\beta+۲}\right)=-\frac{\alpha+\beta+۴}{\alpha\beta+۲(\alpha+\beta)+۴}=-\frac{۵}{-۴+۲+۴}=-\frac{۵}{۲}$

$\Rightarrow m+n=-۲$

ضرب ریشه‌های معادله جدید : $n=\frac{۱}{\alpha+۲}\cdot\frac{۱}{\beta+۲}=\frac{۱}{\alpha\beta+۲(\alpha+\beta)+۴}=\frac{۱}{-۴+۲+۴}=\frac{۱}{۲}$

11 - اگر $x^۲+kx+۱=۰$ و $x^۲-\frac{۱}{x^۲}=۳\sqrt{۵}$ باشد، مقدار مثبت k کدام است؟

۱) ۵ ۲) ۶ ۳) ۳ ۴) ۴

پاسخ: گزینه ۳ (ریاضی ۲ـ صفحه ۱۸ ـ سخت)

دو طرف تساوی $x^۲+kx+۱=۰$ را بر x تقسیم می‌کنیم.

$$x+k+\frac{۱}{x}=۰\Rightarrow x+\frac{۱}{x}=-k$$

$$(x+\frac{۱}{x})^۲-(x-\frac{۱}{x})^۲=۴\Rightarrow(x-\frac{۱}{x})^۲=k^۲-۴$$

حال دو طرف تساوی را در $\left|x+\frac{۱}{x}\right|$ ضرب می‌کنیم:

$$\Rightarrow\left|x-\frac{۱}{x}\right|=\sqrt{k^۲-۴}$$

$$\Rightarrow\left|x^۲-\frac{۱}{x^۲}\right|=k\sqrt{k^۲-۴}=۳\sqrt{۵}$$

$$\Rightarrow k^۴-۴k^۲=۴۵\Rightarrow(k^۲-۹)(k^۲+۵)=۰\Rightarrow k=۳$$

www.biomaze.ir

12 - در معادله درجه دوم $f(x)=ax^۲+bx-۲=۰$ یکی از ریشه‌ها، سه برابر ریشهٔ دیگر است. عرض رأس سهمی f کدام است؟

۱) $-\frac{۲}{۳}$ ۲) $\frac{۲}{۳}$ ۳) $\frac{۴}{۳}$ ۴) $-\frac{۴}{۳}$

پاسخ: گزینه ۲ (ریاضی ۲ ـ صفحه ۱۳ تا ۱۸ ـ سخت)

روش اول: ریشه‌ها را ۱ و ۳ فرض می‌کنیم.

$$\begin{cases}f(x)=k(x-۳)(x-۱)\\ f(۰)=-۲\Rightarrow k=-\frac{۲}{۳}\end{cases}\Rightarrow f(x)=-\frac{۲}{۳}(x-۳)(x-۱)$$

چون ریشه‌ها ۱ و ۳ هستند با توجه به تقارن سهمی، طول راس سهمی برابر ۲ است، پس:

رأس سهمی : $x=۲\Rightarrow y_s=f(۲)=-\frac{۲}{۳}(-۱)(۱)=\frac{۲}{۳}$

روش دوم:

ریشه‌ها را α و β فرض کنید و $\alpha=۳\beta$ پس:

$$\begin{cases}۱)\ \alpha\beta=-\frac{۲}{a}\Rightarrow ۳\beta^۲=-\frac{۲}{a}\\ ۲)\ \alpha+\beta=-\frac{b}{a}\Rightarrow ۴\beta=-\frac{b}{a}\end{cases}\Rightarrow ۳(\frac{b^۲}{۱۶a^۲})=-\frac{۲}{a}\Rightarrow b^۲=-\frac{۳۲a}{۳}$$

$$y_s=-\frac{\Delta}{۴a}=-\frac{b^۲+۸a}{۴a}=-\frac{-\frac{۳۲a}{۳}+۸a}{۴a}=+\frac{۸a}{۱۲a}=+\frac{۲}{۳}$$

13 - قدر مطلق تفاضل ریشه‌های معادله $\sqrt{2x^2-x-2}=2x-2$ چه عددی است؟

۱) $\frac{1}{2}$ ۲) $\frac{3}{2}$ ۳) ۲ ۴) ۱

پاسخ: گزینه ۱ (ریاضی ۲ ـ صفحه ۲۳ ـ ساده)

با فرض آن که $2x-2\geq 0$ یعنی $x\geq 1$، طرفین تساوی را به توان ۲ می‌رسانیم.

$$\sqrt{2x^2-x-2}=2x-2 \Rightarrow 2x^2-x-2=4x^2+4-8x$$

$$\Rightarrow 2x^2-7x+6=0 \Rightarrow (x-2)(2x-3)=0 \begin{cases} x=2 \\ x=\frac{3}{2} \end{cases}$$

هر دو جواب قابل قبول هستند پس اختلاف جواب‌ها $\frac{1}{2}$ است.

www.biomaze.ir

14 - هرگاه $f(x)=\frac{2x+4}{x-2}$ در بازه $(-\infty,\alpha)$ در نابرابری $0<f(x)<2$ صدق کند، حداکثر مقدار α کدام است؟

۱) ۲ ۲) -2 ۳) $\frac{1}{2}$ ۴) $-\frac{1}{2}$

پاسخ: گزینه ۲ (ریاضی ۱ ـ صفحه ۹۳ ـ متوسط)

در واقع باید نامعادله $0<\frac{2x+4}{x-2}<2$ را حل کنیم.

این نامعادله را به دو نامعادله مجزای مقابل تبدیل می‌کنیم و جواب هر کدام را یافته و در انتها اشتراک آنها را به‌دست می‌آوریم.

$$\begin{cases} \frac{2x+4}{x-2}<2 \\ \frac{2x+4}{x-2}>0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} \frac{2x+4}{x-2}-2<0 \Rightarrow \frac{8}{x-2}<0 \Rightarrow x-2<0 \Rightarrow x<2 \\ \frac{2x+4}{x-2}>0 \Rightarrow (x<-2)\cup(x>2) \end{cases} \xrightarrow{\cap} x<-2$$

جواب نامعادله $(-\infty,-2)$ به دست آمد، یعنی حداکثر مقدار α برابر -2 است.

15 - اگر $A=\frac{3}{\sqrt[3]{4}-\sqrt[3]{2}+1}$ باشد، حاصل $(A-1)^9$ کدام است؟

۱) $\sqrt[3]{2}$ ۲) $2\sqrt[3]{2}$ ۳) ۴ ۴) ۸

پاسخ: گزینه ۴ (ریاضی ۱- صفحه ۴۸ تا ۶۷- متوسط)

هرتست ماز یک کلاس درس!

- برای گویا کردن مخرج کسرهایی که در آن عبارت‌های رادیکالی وجود دارد عموماً از اتحادهای مزدوج و چاق و لاغر استفاده می‌کنیم.

مثال: مخرج کسر $\frac{2}{\sqrt[3]{3}-1}$ را گویا کنید.

برای گویا کردن مخرج کسر از اتحاد چاق و لاغر استفاده می‌کنیم و صورت و مخرج کسر را در چاق عبارت مخرج ضرب می‌کنیم:

$$\frac{2}{\sqrt[3]{3}-1}\times\frac{\sqrt[3]{9}+\sqrt[3]{3}+1}{\sqrt[3]{9}+\sqrt[3]{3}+1}=\frac{2\left(\sqrt[3]{9}+\sqrt[3]{3}+1\right)}{\left(\sqrt[3]{3}\right)^3-(1)^3}$$

$$=\frac{2\left(\sqrt[3]{9}+\sqrt[3]{3}+1\right)}{3-1}=\frac{2\left(\sqrt[3]{9}+\sqrt[3]{3}+1\right)}{2}=\sqrt[3]{9}+\sqrt[3]{3}+1$$

چون مخرج کسر به صورت $\sqrt[3]{a^2}-\sqrt[3]{ab}+\sqrt[3]{b^2}$ است پس باید از اتحاد چاق و لاغر یعنی $\left(\sqrt[3]{a}+\sqrt[3]{b}\right)\left(\sqrt[3]{a^2}-\sqrt[3]{ab}+\sqrt[3]{b^2}\right)=a+b$ برای گویا کردن مخرج کسر استفاده می‌کنیم:

$$\frac{3}{\sqrt[3]{4}-\sqrt[3]{2}+1}\times\frac{\sqrt[3]{2}+1}{\sqrt[3]{2}+1}=\frac{3\left(\sqrt[3]{2}+1\right)}{2+1}=\sqrt[3]{2}+1$$

$$\Rightarrow (A-1)^9=\left(\sqrt[3]{2}\right)^9=2^3=8$$

سوالات منتخب:

۱- حاصل عبارت $\frac{\sqrt{27}-1}{4+\sqrt{3}}+\left(2-\sqrt{3}\right)^{-1}$ کدام است؟ *(تجربی خارج ۹۹)*

۱) $1+2\sqrt{3}$ ✓ ۲) $2\sqrt{3}$ ۳) $1+\sqrt{3}$ ۴) ۱

۲- حاصل عبارت $\frac{1}{\sqrt{3}-\sqrt{2}+1}$ پس از گویا کردن مخرج، کدام است؟

۱) $\frac{2-\sqrt{2}+\sqrt{6}}{4}$ ✓ ۲) $\frac{2+\sqrt{2}-\sqrt{6}}{4}$

۳) $\frac{2-\sqrt{2}+\sqrt{3}+\sqrt{6}}{4}$ ۴) $\frac{2+\sqrt{2}+\sqrt{3}-\sqrt{6}}{4}$

16- اگر $A=\frac{\sqrt[3]{2}\times\sqrt[6]{3^5}\times\sqrt[5]{4}}{(6)^{\frac{11}{15}}}$ باشد، حاصل $\frac{1}{A^{10}+1}$ کدام است؟

۱) ۲ ۲) $\frac{1}{2}$ ۳) $\frac{1}{4}$ ۴) $\frac{3}{2}$

پاسخ: گزینه ۳ (ریاضی ۱- صفحه ۴۸ تا ۶۷- دشوار)

هرتست ماز یک کلاس درس!

- برای ساده کردن حاصل‌ضرب چند رادیکال با فرجه‌های متفاوت ابتدا کوچک‌ترین مضرب مشترک فرجه‌ها را بدست می‌آوریم و با استفاده از ویژگی $\left(\sqrt[n]{a^m}=\sqrt[kn]{a^{km}}\right)$، حاصل‌ضرب چند رادیکال با فرجه‌های مختلف را به صورت یک رادیکال با فرجهٔ یکسان می‌نویسیم.

مثال: حاصل عبارت زیر را بدست آورید.

$$\sqrt{2}\times\sqrt[3]{3}\times\sqrt[6]{4}$$

$$\sqrt{2}\times\sqrt[3]{3}\times\sqrt[6]{4}=\sqrt[6]{2^3}\times\sqrt[6]{3^2}\times\sqrt[6]{2^2}=\sqrt[6]{2^3\times3^2\times2^2}=\sqrt[6]{2^5\times3^2}$$

در صورت کسر همهٔ فرجه‌ها را یکسان می‌کنیم تا بتوانیم رادیکال‌ها را در هم ضرب کنیم. بنابراین خواهیم داشت:

$$A=\frac{\sqrt[3]{2}\times\sqrt[6]{3^5}\times\sqrt[5]{2^2}}{(6)^{\frac{11}{15}}}=\frac{\sqrt[30]{2^{10}\times3^{25}\times2^{12}}}{(6)^{\frac{11}{15}}}=\frac{\sqrt[30]{2^{22}\times3^{22}\times3^3}}{(6)^{\frac{11}{15}}}$$

$$\Rightarrow A=\frac{\sqrt[30]{6^{22}}\times\sqrt[10]{3}}{(6)^{\frac{11}{15}}}\Rightarrow A=\frac{(6)^{\frac{22}{30}=\frac{11}{15}}\times(3)^{\frac{1}{10}}}{(6)^{\frac{11}{15}}}=(3)^{\frac{1}{10}}$$

$$\Rightarrow\frac{1}{A^{10}+1}=\frac{1}{(3^{10})^{\frac{1}{10}}+1}=\frac{1}{4}$$

سوالات منتخب:

۱- اگر $A=\frac{\sqrt{۲\sqrt{\sqrt[۳]{۴}}}}{\sqrt{۲\sqrt{۲\sqrt[۳]{۲}}}}$ باشد، حاصل $\sqrt{۷+A^{-۶}}$ کدام است؟

۱) ۱ ۲) ۱/۵ ۳) ۲ ۴) ۳ ✓

۲- اگر $A=\frac{\sqrt{۳}\times\sqrt[۳]{۳}\times\sqrt[۳]{۴}}{\sqrt[۶]{۳^{۵}}}$ باشد، مقدار $\left(A^{۴}+۱\right)^{-\frac{۱}{۲}}$ کدام است؟

۱) $\frac{۱}{۲}$ ✓ ۲) $\frac{۲}{۳}$ ۳) $\frac{۵}{۲}$ ۴) $\frac{۴}{۵}$

www.biomaze.ir

17- مجموعه جواب نامعادلهٔ $۲x-۱<\left||x-۱|+x\right|<۵$ شامل چند عدد صحیح است؟

۱) ۳ ۲) ۲ ۳) بی‌شمار ۴) صفر

پاسخ: گزینه ۳ (ریاضی ۱- صفحه ۸۸ تا ۹۳- دشوار)

هرتست ماز یک کلاس درس!

برای حل نامعادلات به شکل $h(x)<|f(x)|<g(x)$ به صورت زیر عمل می‌کنیم:

۱) برای بدست آوردن مجموعهٔ جواب نامعادلهٔ $|f(x)|<g(x)$ داریم:

$$|f(x)|<g(x)\Rightarrow \overbrace{-g(x)<\underbrace{f(x)<+g(x)}_{a}}^{b}$$

با تحلیل نامعادلات a و b و اشتراک‌گیری از مجموعهٔ جواب آن‌ها، مجموعه جواب نامعادلهٔ $|f(x)|<g(x)$ بدست می‌آید.

۲) برای بدست آوردن مجموعه جواب نامعادله $h(x)<|f(x)|$ داریم:

$$h(x)<|f(x)|\Rightarrow \underbrace{f(x)>+h(x)}_{c} \text{ یا } \underbrace{f(x)<-h(x)}_{d}$$

با تحلیل نامعادلات c و d و اجتماع‌گیری از مجموعه جواب آن‌ها، مجموعه جواب نامعادلهٔ $h(x)<|f(x)|$ بدست می‌آید.

۳) اشتراک مجموعه جواب‌های (۱) و (۲)، پاسخ نامعادلهٔ $h(x)<|f(x)|<g(x)$ خواهد بود.

برای حل این نامعادله ابتدا باید ریشه داخل قدرمطلق $|x-۱|$ را بازه‌بندی کنیم.

$$۱)\ x\geq ۱: ۲x-۱<|x-۱+x|<۵\Rightarrow ۲x-۱<|۲x-۱|<۵$$

$$\Rightarrow\begin{cases}۲x-۱<|۲x-۱|\xrightarrow{u<|u|}u<۰\Rightarrow ۲x-۱<۰\Rightarrow x<\frac{۱}{۲}\xrightarrow{x\geq ۱}x\in\varnothing\\ |۲x-۱|<۵\Rightarrow -۵<۲x-۱<۵\Rightarrow -۲<x<۳\xrightarrow{x\geq ۱}۱\leq x<۳\end{cases}$$

از اشتراک جواب‌های بدست آمده درمی‌یابیم در بازهٔ $x\geq ۱$ جواب نداریم. $(x\in\varnothing)$

$$۲)\ x<۱: ۲x-۱<|۱-x+x|<۵\Rightarrow ۲x-۱\underbrace{<۱<۵}_{\text{همواره برقرار}}$$

$$\Rightarrow ۲x-۱<۱\Rightarrow ۲x<۲\Rightarrow x<۱\xrightarrow{x<۱}x<۱$$

پس اشتراک جواب بدست آمده در نامعادلهٔ (۲) با بازهٔ $x<۱$، به صورت $(-\infty,۱)$ خواهد بود. مجموعه جواب نامعادله از اجتماع مجموعه جواب‌های (۱) و (۲) بدست می‌آید. پس مجموعه جواب برابر است با $(-\infty,۱)\cup\varnothing=(-\infty,۱)$ که شامل بی‌شمار عدد صحیح است.

www.mapedu.ir

سوالات منتخب:

۱- در بازهٔ (a,b) نمودار تابع با ضابطهٔ $y=\left|2x^2-4\right|$ در زیرخط $y=2x$ واقع است. بیشترین مقدار $b-a$ کدام است؟ *(تجربی داخل ۹۹)*

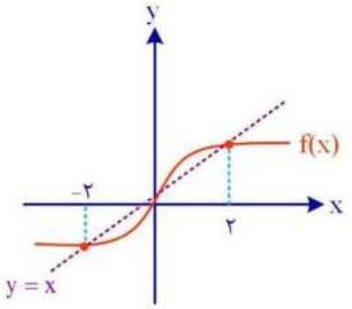
۱) ۱ ✓ ۲) ۲ ۳) ۳ ۴) ۴

۲- مجموعه جواب نامعادله، $3-|x-1|>|2x|$ شامل چند عدد صحیح است؟

۱) ۱ ۲) ۲ ✓ ۳) ۳ ۴) ۴

گروه آموزشی ماز

18 - شکل مقابل نمودار تابع $y=f(x)$ و نیمساز ناحیه اول و سوم را نشان می‌دهد. اگر مجموعه جواب نامعادلهٔ $f^2(x)-xf(x)<0$ به صورت $\mathbb{R}-[a,b]$ باشد، حاصل $a-b$ کدام است؟



۱) ۱-
۲) ۲-
۳) ۳-
۴) ۴-

پاسخ: گزینه ۴ (ریاضی ۱- صفحه ۸۸ تا ۹۳- متوسط)

هرتست ماز یک کلاس درس!

- اگر نمودار تابع $y=f(x)$ را در اختیار داشته باشیم و بخواهیم نامعادله یا معادله‌ای بر حسب $f(x)$ حل کنیم، باید توجه داشته باشیم:

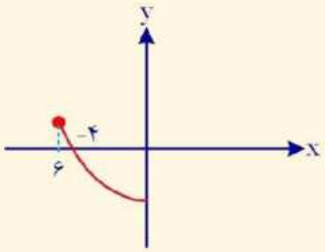
۱) جواب معادلهٔ $f=0$ شامل نقاطی است که نمودار با محور x ها برخورد داشته باشد.

۲) جواب نامعادلهٔ $f>0$ شامل بازه‌ای است که در آن بازه، نمودار f بالاتر از محور x ها قرار دارد.

۳) جواب نامعادلهٔ $f<0$ شامل بازه‌ای است که در آن بازه، نمودار f پایین‌تر از محور x ها قرار دارد.

مثال: شکل روبرو نمودار تابع $y=f(x)$ است. دامنهٔ تابع $\sqrt{xf(x)}$ کدام است؟

عبارت $xf(x)$ زیر رادیکال با فرجهٔ زوج قرار دارد، پس باید: $xf(x)\geq 0$



x		۶		۴		۰	
x			−		−	●	
f(x)			+	●	−		
xf(x)			−	●	+	●	

$\Rightarrow x\in[-4,0]$

با فرض $A=f^2(x)-xf(x)$ داریم:

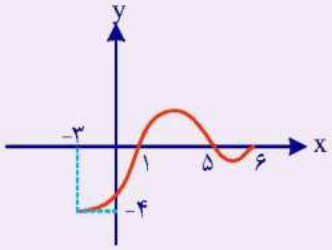
$f^2(x)-xf(x)<0 \Rightarrow f(x)\big(f(x)-x\big)<0$

x		-۲		۰		۲	
f(x)	−		−	●	+		+
f(x) − x	+	●	−	●	+	●	−
A	−	●	+	●	+	●	−

پس عبارت $f^2(x)-xf(x)$ در بازهٔ $\mathbb{R}-[-2,2]$ منفی است، پس $a=-2$ و $b=2$ و $a-b=-4$ است.

سوالات منتخب:

۱- شکل روبرو نمودار تابع $y=f(x)$ است، مجموعه جواب نامعادلهٔ $xf(x)<0$ کدام است؟



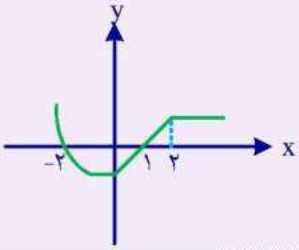
۱) $[1,5)\cup(5,6]$

۲) $(-3,0)\cup[1,5]$

۳) $[0,1)\cup[5,6]$

۴) $(0,1)\cup(5,6)$ ✓

۲- شکل روبه‌رو نمودار تابع $y=f(x)$ است. مجموعه جواب نامعادلهٔ $\frac{(x-1)f(x)}{x+3}<0$ کدام است؟



۱) $(-3,1]$

۲) $(-\infty,2)$

۳) $(-3,-2)$ ✓

۴) $[1,+\infty)$

www.biomaze.ir

19 - تعداد و علامت جواب‌های معادلهٔ $\sqrt{x^2-4}+\sqrt{9-\sqrt{4-x^2}}=3$ کدام است؟

۱) دو جواب مثبت ۲) دو جواب منفی ۳) دو جواب قرینه ۴) دو جواب برابر

پاسخ: گزینه ۳ (ریاضی ۲- صفحه ۱۹ تا ۲۴- دشوار)

هر تست ماز یک کلاس درس!

- معادلات دارای عبارات رادیکالی را معادلات گنگ یا رادیکالی می‌نامیم.
- در حل معادلات رادیکالی سعی می‌کنیم عبارات رادیکالی را یک طرف تساوی برده و سایر عبارات را به طرف دیگر تساوی ببریم. سپس طرفین تساوی را به توان یک عدد مناسب می‌رسانیم تا رادیکال‌ها حذف شده، سپس ریشه‌های معادله را در صورت وجود بدست می‌آوریم.
- توجه داشته باشید که در نهایت ریشه‌های بدست آمده را با دامنهٔ رادیکال‌ها مقایسه کرده یا در معادله صدق دهید، چرا که معمولاً به توان رساندن باعث ایجاد ریشهٔ زائد خواهد شد.

چون عبارات، زیر رادیکال فرجه زوج هستند، قبل از شروع به حل محدودهٔ آن‌ها را تعیین می‌کنیم.

۱) $x^2-4\ge 0\Rightarrow x^2\ge 4\Rightarrow |x|\ge 2\Rightarrow x\ge 2$ یا $x\le -2$

۲) $4-x^2\ge 0\Rightarrow x^2\le 4\Rightarrow |x|\le 2\Rightarrow -2\le x\le +2$

۳) $9-\sqrt{4-x^2}\ge 0\Rightarrow 9\ge\sqrt{4-x^2}\Rightarrow 81\ge 4-x^2\Rightarrow x^2\ge -77\Rightarrow x\in\mathbb{R}$

از اشتراک جواب (۱) و (۲) و (۳) فقط $x=-2$ و $x=2$ قابل قبول است که باید در معادله امتحان شوند.

$x=2\rightarrow\sqrt{0}+\sqrt{9}=3\Rightarrow 3=3\Rightarrow x=2$ قابل قبول

$x=-2\rightarrow\sqrt{0}+\sqrt{9}=3\Rightarrow 3=3\Rightarrow x=-2$ قابل قبول

پس معادله فوق دارای **دو جواب قرینه** می‌باشد.

سوالات منتخب:

۱- تعداد و علامت جواب معادلهٔ $\sqrt{x+6}-\sqrt{2x+5}=1$ چگونه است؟

۱) فقط یک جواب منفی ✓ ۲) فقط یک جواب مثبت

۳) دو جواب مثبت و منفی ۴) دو جواب مثبت

۲- معادلهٔ $\sqrt{x^3-x}+\sqrt{x^2-x}+\sqrt{x^2-1}=0$ چند جواب دارد؟

۱) صفر ۲) ۱ ✓ ۳) ۲ ۴) ۳

www.mapedu.ir

20 - دو دونده در یک مسیر ۸۰ متری دور زمین فوتبال شروع به دویدن می‌کنند. دونده اول در هر ثانیه ۴ متر بیشتر از دومی طی می دوم ۱۶ متر بر ثانیه باشد، دونده اول دو دور مسیر را چند ثانیه زودتر طی کرده است؟

۱) ۲ ۲) ۳ ۳) ۴ ۴) ۵

پاسخ: گزینه ۱ (ریاضی ۲- صفحه ۱۹ تا ۲۴- متوسط)

هر تست ماز یک کلاس درس!

- اگر جسمی فاصله x_1 تا x_2 را در مدت زمان t طی کند، سرعت متوسط آن برابر است با:

$$v = \frac{x_2 - x_1}{t} = \frac{\Delta x}{t}$$

از رابطهٔ فوق با طرفین وسطین کردن رابطه، نتایج زیر حاصل می‌شود:

$$1)\ \Delta x = vt \qquad 2)\ t = \frac{\Delta x}{v}$$

مثال: خودرویی مسافتی را با سرعت v در زمان t می‌پیماید. اگر سرعت خودرو ۲ برابر شود همان مسافت را در چند برابر زمان اولیه می‌پیماید؟

$$t = \frac{\Delta x}{v} \Rightarrow \frac{t_2}{t_1} = \frac{\Delta x_2}{\Delta x_1} \times \frac{v_1}{v_2} \xrightarrow[v_2 = 2v_1]{\Delta x_1 = \Delta x_2} \frac{t_2}{t_1} = 1 \times \frac{v_1}{2v_1} \Rightarrow \frac{t_2}{t_1} = \frac{1}{2}$$

$$\Rightarrow t_2 = \frac{1}{2} t_1$$

اگر سرعت دوندهٔ اول را v_1 بنامیم و سرعت دوندهٔ دوم را v_2 بنامیم، چون دونده اول در هر ثانیه ۴ متر از دومی بیشتر طی می‌کند، داریم:

$$v_1 - v_2 = 4(\frac{m}{s}) \Rightarrow v_1 = v_2 + 4 \xrightarrow{v_2 = 16(\frac{m}{s})} v_1 = 16 + 4 = 20(\frac{m}{s})$$

زمان طی شده توسط دو دونده در دو دور مسیر (۱۶۰ متر) برابر است با:

دونده اول: $t = \frac{\Delta x}{v} \Rightarrow t = \frac{160}{20} = 8(s)$

دونده دوم: $t = \frac{\Delta x}{v} \Rightarrow t = \frac{160}{16} = 10(s)$

$\Rightarrow 10 - 8 = 2(s)$

پس دوندهٔ اولی دو دور مسیر را ۲ ثانیه زودتر طی می‌کند.

سوالات منتخب:

۱- بهروز یک مجله را به تنهایی ۹ ساعت زودتر از فرهاد تایپ می‌کند. اگر هر دو با هم کار کنند، در ۲۰ ساعت این کار انجام می‌شود. بهروز به تنهایی در چند ساعت این کار را انجام می‌دهد؟ *(ریاضی داخل ۹۸)*

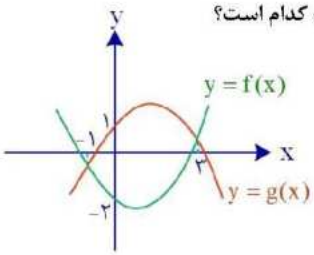
۱) ۳۲ ۲) ۳۳ ۳) ۳۵ ۴) ۳۶ ✓

۲- ۱۰ کیلوگرم محلول آب نمک با غلظت ۲۴درصد را با ۴۰ کیلوگرم محلول آب نمک با غلظت ۱۴درصد مخلوط می‌کنیم. به محلول حاصل چند کیلوگرم نمک اضافه کنیم تا غلظت آن به ۲۰درصد برسد؟

۱) ۲ ۲) ۳/۲۵ ۳) ۲/۵ ✓ ۴) ۳/۷۵

www.biomaze.ir

21 - نمودار توابع درجه دوم f و g به صورت مقابل می‌باشد. فاصلهٔ رأس سهمی تابع $y = f(x) - g(x)$ تا مبدأ مختصات کدام است؟



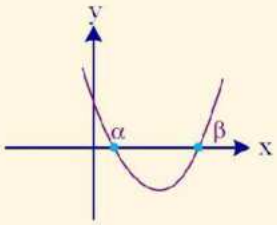
۱) $\sqrt{15}$
۲) ۴
۳) $\sqrt{17}$
۴) $3\sqrt{2}$

www.mapedu.ir

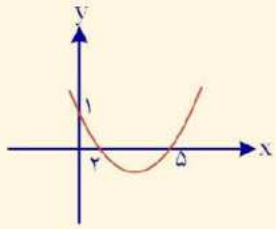
پاسخ: گزینه ۳ (ریاضی ۲- صفحه ۱۱ تا ۱۸- دشوار)

هرتست ماز یک کلاس درس!

- اگر α و β ریشه‌های یک معادلهٔ درجه دو باشند، معادلهٔ سهمی به صورت $y = k(x-\alpha)(x-\beta)$ خواهد بود و برای بدست آوردن k، یکی از نقاط داده شده از سهمی را درون آن قرار می‌دهیم.



مثال: معادلهٔ سهمی روبرو را بدست آورید.



$$y = k(x-۲)(x-۵) \xrightarrow{(۰,۱)} ۱ = k(۰-۲)(۰-۵)$$

$$\Rightarrow k = \frac{۱}{۱۰}$$

$$\rightarrow y = \frac{۱}{۱۰}(x-۲)(x-۵)$$

ابتدا ریشه‌های تابع درجه دوم $y = f(x) - g(x)$ را تعیین می‌کنیم، از آن جایی که نمودار دو تابع f و g در دو نقطه با طول‌های ۱- و ۳ متقاطع‌اند، پس:

$$y = f(x) - g(x) = ۰ \Rightarrow f(x) = g(x) \Rightarrow x = -۱ \ , \ x = ۳$$

پس معادلهٔ منحنی $y = f(x) - g(x)$ را به صورت $y = k(x+۱)(x-۳)$ در نظر می‌گیریم و با قرار دادن $x = ۰$ در آن داریم:

$$y = f(x) - g(x) = k(x+۱)(x-۳) \xrightarrow{x=۰} f(۰) - g(۰) = k(۰+۱)(۰-۳)$$

$$\xrightarrow[g(۰)=۱]{f(۰)=-۲} -۲-۱ = -۳k \Rightarrow k = ۱ \Rightarrow y = (x+۱)(x-۳)$$

$$\Rightarrow y = x^۲ - ۲x - ۳ \Rightarrow x_s = \frac{-b}{۲a} = \frac{-(-۲)}{۲(۱)} = ۱ \xrightarrow[\text{در معادله } y]{x=۱} y_s = -۴$$

پس فاصله رأس سهمی تا مبدأ برابر است با:

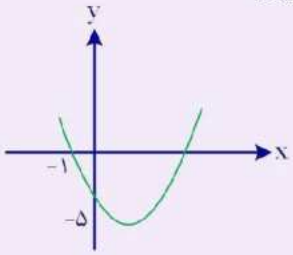
$$|OS| = \sqrt{(۱-۰)^۲ + (-۴-۰)^۲} = \sqrt{۱۷}$$

سوالات منتخب:

۱- مساحت مثلثی که از اتصال نقاط برخورد سهمی به معادلهٔ $y = -۲x^۲ - ۲x + ۴$ با محورهای مختصات ایجاد می‌شود، کدام است؟

۱) ۳ ۲) ۴ ۳) ۶ ✓ ۴) ۸

۲- اگر سهمی مقابل نسبت به خط $x = ۲$ متقارن باشد، عرض رأس سهمی چقدر است؟



۱) ۶-

۲) ۷-

۳) ۸-

۴) ۹- ✓

گروه آموزشی ماز

22- اگر α و β ریشه‌های معادلهٔ درجهٔ دوم $x^۲ - ۴x + ۲ = ۰$ باشند، حاصل عبارت $\frac{\alpha^۲+۲}{۳\alpha} + \frac{۲\beta}{\beta^۲+۲}$ کدام است؟

۱) $\frac{۱۱}{۳}$ ۲) $\frac{۱۳}{۳}$ ۳) $\frac{۱۳}{۶}$ ۴) $\frac{۱۱}{۶}$

پاسخ: گزینه ۴ (ریاضی ۲- صفحه ۱۱ تا ۱۸- متوسط)

هرتست ماز یک کلاس درس!

- در بعضی از سوالات، α و β به عنوان ریشه‌های معادلهٔ درجهٔ دوم داده می‌شود و حاصل یک عبارت نامتقارن برحسب α و β خواسته می‌شود، برای حل این سوالات باید به این نکته توجه کرد که ریشه‌های معادله در آن صدق می‌کنند، بنابراین با جایگذاری α و β در معادلهٔ درجهٔ دوم داده شده، به دو معادله برحسب α و β می‌رسیم و با مرتب کردن این معادله‌ها برحسب عبارت داده شده در سوال، می‌توانیم حاصل آن عبارت را بدست آوریم.

می‌توانیم معادله را به صورت $x^2+2=4x$ بازنویسی کرده و از آن‌جایی که α و β ریشه‌های معادله هستند، آن‌ها را در معادله قرار می‌دهیم.

$$\begin{matrix} x=\alpha \to \alpha^2+2=4\alpha \\ x=\beta \to \beta^2+2=4\beta \end{matrix} \Rightarrow \frac{\alpha^2+2}{3\alpha}+\frac{2\beta}{\beta^2+2}=\frac{4\alpha}{3\alpha}+\frac{2\beta}{4\beta}=\frac{4}{3}+\frac{1}{2}=\frac{11}{6}$$

سوالات منتخب:

۱- اگر x_1 و x_2 ریشه‌های معادلهٔ درجهٔ دوم $x^2-x-5=0$ باشند، حاصل $(x_1^2-5)(x_2^2-5)$ کدام است؟

۱) ۳ ۲) -2 ۳) ۴ ۴) -5 ✔

۲- اگر α و β ریشه‌های معادلهٔ درجهٔ دوم $x^2+6x+4=0$ باشند، مقدار $\alpha^2-6\beta+5$ کدام است؟

۱) ۳۲ ۲) ۳۷ ✔ ۳) ۴۲ ۴) ۵۳

www.biomaze.ir

23- اگر $\sin\alpha$ و $\cos\alpha$ ریشه‌های معادلهٔ $2x^2+mx+m-1=0$ باشند، حاصل $\sin 2\alpha$ کدام است؟

۱) $\frac{\sqrt{3}}{2}$ ۲) $\frac{\sqrt{2}}{2}$ ۳) $\frac{1}{3}$ ۴) -1

پاسخ: گزینه ۴ (ریاضی ۲- صفحه ۱۱ تا ۱۸- دشوار)

هرتست ماز یک کلاس درس!

- در برخی از سوالات که توابع مثلثاتی به عنوان ریشه‌های معادلهٔ درجه دوم داده می‌شوند، می‌بایست با استفاده از روابط مثلثاتی، رابطه‌ای برحسب S و P معادلهٔ درجه دوم پیدا کرده و مجهولات مدنظر را محاسبه کنیم.

مثال: اگر $\tan\alpha$ و $\cot\alpha$ ریشه‌های معادلهٔ $x^2-2mx+m-1$ باشند، حاصل $\tan\alpha+\cot\alpha$ کدام است؟

$$S=-\frac{-2m}{1}=2m=\tan\alpha+\cot\alpha$$

$$P=\frac{m-1}{1}=\tan\alpha\cot\alpha$$

همچنین میدانیم حاصل $\tan\alpha\cot\alpha$ برابر ۱ است، پس:

$$m-1=\tan\alpha\cot\alpha \Rightarrow m=2 \Rightarrow \tan\alpha+\cot\alpha=2m=4$$

ابتدا S و P معادلهٔ $2x^2+mx+m-1=0$ را محاسبه می‌کنیم و از آن جایی که $\sin\alpha$ و $\cos\alpha$ ریشه‌های معادله هستند، داریم:

$$S=\sin\alpha+\cos\alpha=-\frac{m}{2} \qquad P=\frac{m-1}{2}=\sin\alpha\cos\alpha$$

همچنین می‌دانیم $\sin^2\alpha+\cos^2\alpha=1$ و با استفاده از اتحاد $a^2+b^2=(a+b)^2-2ab$ داریم:

$$\sin^2\alpha+\cos^2\alpha=1 \Rightarrow (\sin\alpha+\cos\alpha)^2-2\sin\alpha\cos\alpha=1 \Rightarrow S^2-2P=1 \Rightarrow$$

$$(-\frac{m}{2})^2-2(\frac{m-1}{2})=1 \Rightarrow \frac{m^2}{4}-m+1=1 \Rightarrow m^2-4m=0 \Rightarrow \begin{cases} m=0 \\ m=4 \end{cases}$$

$$\sin 2\alpha=2\sin\alpha\cos\alpha=2(\frac{m-1}{2})=m-1 \xlongequal{m=0} 0-1=-1$$

$m=4$ قابل قبول نیست چون به ازای آن $\sin 2\alpha=3$ خواهد شد و می‌دانیم که همواره $-1\le\sin 2\alpha\le+1$ است.

www.mapedu.ir

سوالات منتخب:

۱- در معادله درجهٔ دوم $2x^2+ax+9=0$ یک ریشه دو برابر ریشهٔ دیگر است، مجموع دو ریشهٔ مثبت کدام است؟

۱) ۳/۵ ۲) ۴ ۳) ۴/۵ ✓ ۴) ۵

۲- اگر $x_1=\tan a$ و $x_2=\cot a$ ریشه‌های معادلهٔ $2x^2-5x+m-3=0$ باشند، مقدار m کدام است؟

۱) ۲ ۲) ۶ ۳) ۵ ✓ ۴) ۳

گروه آموزشی ماز

24- به ازای چند مقدار صحیح از m، نمودار تابع $f(x)=-x^2+mx+m-3$، فقط از ناحیهٔ دوم مختصات عبور نمی‌کند؟

۱) ۱ ۲) ۲ ۳) ۳ ۴) هیچ‌مقدار m

پاسخ: گزینه ۱ (ریاضی ۲- صفحه ۱۱ تا ۱۸- متوسط)

هر تست ماز یک کلاس درس!

- برای آن که نمودار سهمی فقط از یک ناحیهٔ خاص مختصات عبور نکند، داریم:

۱) فقط از ناحیهٔ اول عبور نکند: $\Delta>0, a<0, P\geq 0, S<0$

۲) فقط از ناحیهٔ دوم عبور نکند: $\Delta>0, a<0, P\geq 0, S>0$

۳) فقط از ناحیهٔ سوم عبور نکند: $\Delta>0, a>0, P\geq 0, S>0$

۴) فقط از ناحیهٔ چهارم عبور نکند: $\Delta>0, a>0, P\geq 0, S<0$

برای آن که نمودار سهمی به معادلهٔ $f(x)=-x^2+mx+m-3$ فقط از ناحیهٔ دوم مختصات عبور نکند باید:

$a<0, \Delta>0, P\geq 0, S>0$

۱) $a<0 \Rightarrow -1<0$

۲) $\Delta=(m)^2-4(-1)(m-3)>0 \Rightarrow m^2+4m-12>0 \Rightarrow (m+6)(m-2)>0$

$\Rightarrow m<-6$ یا $m>2$

۳) $P=\frac{m-3}{-1}\geq 0 \Rightarrow 3-m\geq 0 \Rightarrow m\leq 3$

۴) $S=\frac{-m}{-1}>0 \Rightarrow m>0$

با گرفتن اشتراک از مجموعه جواب‌های (۱)، (۲)، (۳) و (۴) داریم: $2<m\leq 3$

تنها مقدار صحیح در بازه $(2,3]$، $m=3$ است.

سوالات منتخب:

۱- معادلهٔ درجه دوم $2x^2+mx+m+6=0$ دارای دو ریشهٔ مثبت است. بازهٔ مقادیر m کدام است؟ *(تجربی خارج ۹۹)*

۱) $(-4,0)$ ۲) $(-4,-2)$ ۳) $(-6,0)$ ۴) $(-6,-4)$ ✓

۲- به ازای کدام مجموعه مقادیر m سهمی به معادلهٔ $y=(1-m)x^2+2(m-3)x-1$ همواره پایین محور x هاست؟ *(ریاضی خارج ۹۸)*

۱) $1<m<5$ ۲) $2<m<5$ ✓ ۳) $2<m<4$ ۴) $2<m<6$

25 - ساده شده عبارت $A=\frac{1}{\sqrt{3}-\sqrt{3-\sqrt{3}}}+\frac{1}{\sqrt{3}+\sqrt{3-\sqrt{3}}}$ کدام است؟

۱) $\sqrt{3}$ ۲) $2\sqrt{3}$ ۳) ۲ ۴) $\frac{\sqrt{3}}{3}$

پاسخ: گزینه ۳ (ریاضی ۱ ـ متوسط)

نکته) $\frac{1}{\sqrt{\alpha}+\sqrt{\beta}}=\frac{\sqrt{\alpha}-\sqrt{\beta}}{\alpha-\beta}$ و $\frac{1}{\sqrt{\alpha}-\sqrt{\beta}}=\frac{\sqrt{\alpha}+\sqrt{\beta}}{\alpha-\beta}$

ابتدا تک‌تک مخرج‌ها را گویا می‌کنیم:

$$\alpha=\frac{1}{\sqrt{3}-\sqrt{3-\sqrt{3}}}\times\frac{\sqrt{3}+\sqrt{3-\sqrt{3}}}{\sqrt{3}+\sqrt{3-\sqrt{3}}}=\frac{\sqrt{3}+\sqrt{3-\sqrt{3}}}{3-3+\sqrt{3}}$$

$$\beta=\frac{1}{\sqrt{3}+\sqrt{3-\sqrt{3}}}\times\frac{\sqrt{3}-\sqrt{3-\sqrt{3}}}{\sqrt{3}-\sqrt{3-\sqrt{3}}}=\frac{\sqrt{3}-\sqrt{3-\sqrt{3}}}{3-3+\sqrt{3}}$$

$$A=\alpha+\beta=\frac{\sqrt{3}+\sqrt{3-\sqrt{3}}}{\sqrt{3}}+\frac{\sqrt{3}-\sqrt{3-\sqrt{3}}}{\sqrt{3}}=\frac{2\sqrt{3}}{\sqrt{3}}=2$$

سوالات منتخب:

ساده شدهٔ عدد $A=\frac{1}{3-\sqrt{6}}-\frac{\sqrt{18}}{\sqrt{27}}$ کدام است؟

۱) ۱ ✓ ۲) ۲ ۳) ۱− ۴) ۲−

گروه آموزشی ماز

26 - هرگاه حاصل $\sqrt[n]{2\sqrt[4]{6}}\times\sqrt[4]{54}\times\sqrt[2n]{12}$ برابر ۶ باشد. عدد طبیعی n کدام است؟

۱) ۶ ۲) ۳ ۳) ۴ ۴) ۸

پاسخ: گزینه ۲ (ریاضی ۱ ـ متوسط)

نکته) ۱) $\sqrt[n]{a^m}=a^{\frac{m}{n}}$ ۲) $(a^m)^n=a^{mn}$ ۳) $a^m\times a^n=a^{m+n}$

ابتدا تک تک عبارت‌ها را ساده می‌کنیم:

$$A=\sqrt[2n]{12}\times\sqrt[4]{54}\times\sqrt[n]{2\sqrt[4]{6}}$$

$$\sqrt[2n]{12}=(2^2\times3)^{\frac{1}{2n}}=2^{\frac{1}{n}}\times3^{\frac{1}{2n}}$$

$$\sqrt[4]{54}=(2\times3^3)^{\frac{1}{4}}=2^{\frac{1}{4}}\times3^{\frac{3}{4}}$$

$$\sqrt[n]{2\sqrt[4]{6}}=(2\times2^{\frac{1}{4}}\times3^{\frac{1}{4}})^{\frac{1}{n}}=2^{\frac{5}{4n}}\times3^{\frac{1}{4n}}$$

$$A=2^{\frac{1}{n}+\frac{1}{4}+\frac{5}{4n}}\times3^{\frac{1}{2n}+\frac{3}{4}+\frac{1}{4n}}\Rightarrow2^{\frac{9+n}{4n}}\times3^{\frac{3+3n}{4n}}$$

چون قرار است $A=6$ باشد، پس:

$$9+n=4n\Rightarrow n=3$$
$$3+3n=4n\Rightarrow n=3$$

یعنی $n=3$ قابل قبول است.

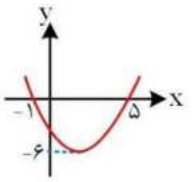
سوالات منتخب:

اگر ریشه nام عدد a برابر ۶۴− باشد، حاصل $\sqrt[n]{\sqrt[3]{a^2}}$ کدام است؟

۱) ۴ ۲) ۴− ۳) ۱۶ ✓ ۴) ۱۶−

www.biomaze.ir

27 - نمودار سهمی $f(x)=ax^2+bx+c$ به شکل روبه‌رو است. مقدار $b+c$ کدام است؟



۱) ۱۲−
۲) ۹−
۳) ۸−
۴) ۶−

پاسخ: گزینه ۴ (ریاضی ۱ ـ متوسط)

نکته) اگر α و β ریشه‌های سهمی $f(x)=0$ باشند، ضابطهٔ سهمی $f(x)=k(x-\alpha)(x-\beta)$ است.

با توجه به نکته بالا، ضابطه سهمی به صورت مقابل است: $f(x)=k(x+1)(x-5)$

با توجه به نمودار، $x=2$ طول رأس سهمی است، بنابراین $S\Big|_{-6}^{2}$ رأس سهمی است. پس $f(2)=-6$ یعنی:

$$-6=k\times 3\times(-3)\Rightarrow k=\frac{2}{3}$$

$$f(x)=\frac{2}{3}(x^2-4x-5)=\frac{2}{3}x^2-\frac{8}{3}x-\frac{10}{3}$$

$$b+c=-\frac{18}{3}=-6$$

سوالات منتخب:

اگر $x=2$ و $x=-3$ صفرهای سهمی $y=f(x)$ باشند به طوری که سهمی محور عرض‌ها را در نقطه‌ای به عرض ۱۲ قطع کند. حداکثر مقدار سهمی چه عددی است؟

۱) ۲۵ ۲) ۱۲/۵ ✓ ۳) ۱۷/۵ ۴) ۱۵

گروه آموزشی ماز

28 - در بازهٔ (α,β) نمودار تابع $y=\frac{5x+1}{x+1}$ بالای خط $y=2$ و پایین‌تر از خط $y=3$ قرار گرفته است. حداکثر مقدار $\beta-\alpha$ کدام است؟

۱) $\frac{2}{3}$ ۲) $\frac{4}{3}$ ۳) $\frac{1}{3}$ ۴) $\frac{1}{6}$

پاسخ: گزینه ۱ (ریاضی ۱ ـ متوسط)

نکته)

۱) $|\alpha|<|\beta|\Rightarrow(\alpha+\beta)(\alpha-\beta)<0$

۲) $a<x<b\Leftrightarrow\left|x-\frac{a+b}{2}\right|<\frac{b-a}{2}$

$$2<\frac{5x+1}{x+1}<3\Rightarrow\frac{-1}{2}<\frac{5x+1}{x+1}-\frac{5}{2}<\frac{1}{2}\Rightarrow\left|\frac{5x+1}{x+1}-\frac{5}{2}\right|<\frac{1}{2}\Rightarrow\left|\frac{10x+2-5x-5}{2(x+1)}\right|<\frac{1}{2}$$

$$\Rightarrow\left|\frac{5x-3}{2(x+1)}\right|<\frac{1}{2}\Rightarrow|5x-3|<|x+1|$$

$$(6x-2)(4x-4)<0\Rightarrow\underset{\alpha}{\frac{1}{3}}<x<\underset{\beta}{1}$$

$$\beta-\alpha=1-\frac{1}{3}=\frac{2}{3}$$

سوالات منتخب:

نمودار تابع $y=\frac{3x^2-2x}{x^2+4}$ در بازهٔ (α,β) پایین‌تر از خط $y=2$ است. حداکثر $\beta-\alpha$ کدام است؟

۱) ۴ ۲) ۶ ✓ ۳) ۸ ۴) ۱۲

www.biomaze.ir

29 - هرگاه معادلهٔ $x+\frac{4}{x+2}=a+1$ ریشهٔ مضاعف داشته باشد، a کدام است؟

۱) ۱ یا ۷ ۲) ۱- یا ۷- ۳) ۱- یا ۷ ۴) ۱ یا ۷-

پاسخ: گزینه ۴ (ریاضی ۱ ـ متوسط)

نکته) معادله درجه دوم به شرطی ریشه مضاعف دارد که $\Delta = ۰$ باشد.

$$x^۲ + ۲x + ۴ = (a+۱)(x+۲) \Rightarrow x^۲ + ۲x - (a+۱)x + ۴ - (۲a+۲) = ۰$$

$$x^۲ + (۱-a)x + (۲-۲a) = ۰$$

$$\Delta = ۰ \Rightarrow (a^۲ - ۲a + ۱) - ۴(۲-۲a) = ۰$$

$$a^۲ + ۶a - ۷ = ۰ \begin{cases} a = ۱ \\ a = -۷ \end{cases}$$

سوالات منتخب:

به ازای کدام مقدار m خط $y = ۲x - ۴$ بر منحنی $y = (m+۳)x^۲ + mx$ مماس است؟

۱) ۱۸ و ۲− ۲) ۲۲ و ۲ ۳) ۲۲ و ۲− ✓ ۴) ۱۱ و ۴

گروه آموزشی ماز

30- علی کاری را به تنهایی ۱۰ ساعت زودتر از رضا انجام می‌دهد. اگر هر دو باهم کار کنند مدت زمانی که طول می‌کشد تا کار انجام شود ۸ ساعت کمتر از زمانی است که علی کار را انجام می‌دهد. در این صورت علی به تنهایی در چند ساعت کار را انجام می‌دهد؟

۱) ۱۵ ۲) ۴۰ ۳) ۲۰ ۴) ۲۵

پاسخ: گزینه ۳ (ریاضی ۲ ـ متوسط)

فرض کنیم علی به تنهایی کار را در x ساعت تمام کند، در این صورت رضا کار را در $x+۱۰$ ساعت به تنهایی تمام می‌کند. اگر هر دو با هم کار کنند، کار در $x-۸$ ساعت تمام می‌شود، پس:

$$\frac{۱}{x} + \frac{۱}{x+۱۰} = \frac{۱}{x-۸}$$

$$\xrightarrow{\times x(x+۱۰)(x-۸)} (x+۱۰)(x-۸) + x(x-۸) = x(x+۱۰) \Rightarrow x^۲ + ۲x - ۸۰ + x^۲ - ۸x = x^۲ + ۱۰x$$

$$\Rightarrow x^۲ - ۱۶x - ۸۰ = ۰ \Rightarrow (x-۲۰)(x+۴) = ۰ \Rightarrow x = ۲۰$$

سوالات منتخب:

۳۰۰ کیلوگرم آب نمک با غلظت ۵ درصد داریم، اگر ۷ کیلوگرم نمک به آن اضافه کنیم چند کیلوگرم از آن محلول بخار کنیم تا به غلظت ۸ درصد برسیم؟

۱) ۳۰ ۲) ۳۱ ۳) ۳۲ ✓ ۴) ۲۳

www.biomaze.ir

31 - اگر α ریشهٔ معادله $۲x + \sqrt{۲-x} = ۱$ باشد، مقدار $\alpha - \frac{۱}{\alpha}$ کدام است؟

۱) $\frac{۹}{۴}$ ۲) $\frac{-۱۵}{۴}$ ۳) $\frac{۱۵}{۴}$ ۴) صفر

پاسخ: گزینه ۳ (ریاضی ۲ ـ متوسط)

$$\sqrt{۲-x} = ۱-۲x \Rightarrow ۱-۲x \geq ۰ \ , \ ۲-x \geq ۰ \Rightarrow x \leq \frac{۱}{۲}$$

$$۲-x = ۴x^۲ - ۴x + ۱ \Rightarrow ۴x^۲ - ۳x - ۱ = ۰$$

$$(x-۱)(۴x+۱) = ۰ \Rightarrow \begin{cases} x = ۱ \ \text{غ ق ق} \\ x = -\frac{۱}{۴} \end{cases}$$

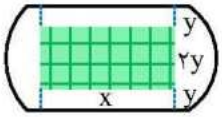
$$\alpha = -\frac{۱}{۴} \Rightarrow \alpha - \frac{۱}{\alpha} = -\frac{۱}{۴} + ۴ = \frac{۱۵}{۴}$$

سوالات منتخب:

اگر $x = ۳$ یکی از جواب‌های معادله $\sqrt{۳x+k} = ۲ + \sqrt{x+۱}$ باشد، جواب دیگر کدام است؟

۱) ۱ ۲) ۱− ✓ ۳) ۷ ۴) ۲

32- یک استادیوم ورزشی با یک زمین چمن به شکل مقابل، از این زمین چمن، دو نیم دایره در انتها و ۲ حاشیه در کنارها در حال ساخت است. اگر محیط استادیوم ۱۲۰۰π متر باشد، طول زمین چمن چقدر باشد تا مساحت زمین چمن بیشترین مقدار ممکن باشد؟



۱) ۲۰۰π

۲) ۴۰۰π

۳) ۶۰۰π

۴) ۳۰۰π

پاسخ: گزینه ۴ (ریاضی ۱ ـ متوسط)

نکته) تابع $y = ax^۲ + bx + c$ که $a < ۰$ در حالتی بیشترین است که $x = -\frac{b}{۲a}$ و البته حداکثر مقدار آن $\frac{۴ac - b^۲}{۴a}$ است.

$$\text{محیط استادیوم} = ۲x + ۲\pi(۲y) = ۲x + ۴\pi y \Rightarrow ۲x + ۴\pi y = ۱۲۰۰\pi$$

$$\text{مساحت زمین چمن} = ۲xy = (۱۲۰۰\pi - ۴\pi y).y = ۱۲۰۰\pi y - ۴\pi y^۲$$

در حالتی این تابع درجه ۲ به بیشترین مقدار ممکن می‌رسد که:

$$y = -\frac{b}{۲a} = \frac{۱۲۰۰\pi}{۸\pi} = \frac{۱۲۰۰}{۸} = ۱۵۰$$

$$y = ۱۵۰ \Rightarrow ۲x + ۶۰۰\pi = ۱۲۰۰\pi \Rightarrow x = \frac{۶۰۰}{۲}\pi \Rightarrow x = ۳۰۰\pi$$

سوال منتخب:

با ۱۲۰ متر طناب می‌خواهیم در کنار یک رودخانه مستطیلی با مساحت ماکزیمم ایجاد کنیم. بیشترین مساحت مستطیل چه عددی است؟

۱) ۳۲۰۰ ۲) ۲۷۰۰ ۳) ۳۶۰۰ ۴) ۱۸۰۰ ✓

33- حاصل عبارت $\left(\frac{\sqrt{۲}+\sqrt{۵}}{\sqrt{۱۰}+۲}\right)\left(\sqrt{۳-\sqrt{۵}} - \sqrt{۳+\sqrt{۵}}\right)$ کدام است؟

۱) -۱ ۲) $-\sqrt{۲}$ ۳) ۱ ۴) $\sqrt{۲}$

پاسخ: گزینه ۱ (ریاضی ۱ ـ فصل ۳)

پاسخ تشریحی:

ابتدا حاصل هر یک از پرانتزها را به صورت جداگانه به دست آورده و سپس آن‌ها را در هم ضرب می‌کنیم:

$$A = \frac{\sqrt{۲}+\sqrt{۵}}{\sqrt{۱۰}+۲} \times \frac{\sqrt{۱۰}-۲}{\sqrt{۱۰}-۲} = \frac{\overbrace{\sqrt{۲۰}}^{۲\sqrt{۵}} - ۲\sqrt{۲} + \overbrace{\sqrt{۵۰}}^{۵\sqrt{۲}} - ۲\sqrt{۵}}{۱۰-۴} = \frac{۲\sqrt{۵} - ۲\sqrt{۲} + ۵\sqrt{۲} - ۲\sqrt{۵}}{۶} = \frac{۳\sqrt{۲}}{۶} = \frac{\sqrt{۲}}{۲}$$

$$B = \sqrt{۳-\sqrt{۵}} - \sqrt{۳+\sqrt{۵}} \xrightarrow{\text{طرفین توان ۲}} B^۲ = (۳-\sqrt{۵}) + (۳+\sqrt{۵}) - ۲\sqrt{(۳-\sqrt{۵})(۳+\sqrt{۵})}$$

$$\Rightarrow B^۲ = ۶ - ۲\sqrt{۴} \Rightarrow B^۲ = ۶ - ۴ = ۲ \Rightarrow B = \pm\sqrt{۲}$$

از طرفی طبق رابطه $B = \sqrt{۳-\sqrt{۵}} - \sqrt{۳+\sqrt{۵}}$ می‌توان دریافت که $B < ۰$ است، بنابراین تنها $B = -\sqrt{۲}$ قابل قبول است، در نتیجه:

$$\left(\frac{\sqrt{۲}+\sqrt{۵}}{\sqrt{۱۰}+۲}\right)\left(\sqrt{۳-\sqrt{۵}} - \sqrt{۳+\sqrt{۵}}\right) = A \times B = \left(\frac{\sqrt{۲}}{۲}\right) \times (-\sqrt{۲}) = -۱$$

34- اگر $-2<\frac{1-3x}{x+1}<0$ باشد، مجموعه مقادیر $\left[\frac{x}{2}\right]$ چند عضو دارد؟

۱) ۱ ۲) ۲ ۳) ۳ ۴) ۴

پاسخ: گزینه ۲ (ریاضی ۱ ـ فصل ٤)

پاسخ تشریحی:

ابتدا نامعادله داده شده را به صورت زیر، به دو نامعادله تبدیل کرده و هر یک را به صورت جداگانه حل می‌کنیم و درنهایت از جواب‌های به دست آمده اشتراک می‌گیریم:

$$-2<\frac{1-3x}{x+1}<0$$

$$A:\frac{1-3x}{x+1}<0\rightarrow x<-1 \text{ یا } x>\frac{1}{3}$$

$$B:\frac{1-3x}{x+1}>-2\Rightarrow\frac{1-3x}{x+1}+2>0\Rightarrow\frac{-x+3}{x+1}>0\Rightarrow -1<x<3$$

حال از مجموعه جواب‌های نامعادله‌های A و B اشتراک می‌گیریم:

$$\xrightarrow{\text{اشتراک}}\frac{1}{3}<x<3$$

در مرحله بعد، باید محدوده $\frac{x}{2}$ را پیدا کنیم:

$$\frac{1}{3}<x<3\Rightarrow\frac{1}{6}<\frac{x}{2}<\frac{3}{2}$$

با توجه به نامعادله فوق، می‌توان نتیجه گرفت هر مقداری که برای $\frac{x}{2}$ در بازه $(\frac{1}{6},\frac{3}{2})$ اختیار کنیم، جزء صحیح آن، تنها دو مقدار صفر یا ۱ را به خود می‌گیرد. به عبارت دیگر:

$$\begin{cases}\frac{1}{6}<\frac{x}{2}<1\Rightarrow\left[\frac{x}{2}\right]=0\\ 1\le\frac{x}{2}<\frac{3}{2}\Rightarrow\left[\frac{x}{2}\right]=1\end{cases}$$

35- فرض کنید $a=\sqrt[4]{7-4\sqrt{3}}$، مقدار $(a+\frac{1}{a}+\sqrt{2})^2(a+\frac{1}{a}-\sqrt{2})^2$ کدام است؟

۱) ۹ ۲) ۱۶ ۳) ۲۵ ۴) ۴۹

پاسخ: گزینه ۲ (ریاضی ۱ ـ فصل ۳)

نکته۱)

اتحاد مزدوج $(a-b)(a+b)=a^2-b^2$

نکته۲)

اگر مخرج کسری به صورت $\sqrt{m}\pm\sqrt{n}$ باشد برای گویا کردن آن کسر، صورت و مخرج آن کسر را در مزدوج مخرج ضرب می‌کنیم.

ابتدا عبارت خواسته شده را به صورت زیر ساده سازی می‌کنیم:

$$(a+\frac{1}{a}+\sqrt{2})^2(a+\frac{1}{a}-\sqrt{2})^2\xrightarrow{\text{اتحاد مزدوج}}\left((a+\frac{1}{a})^2-2\right)^2=\left(a^2+\frac{1}{a^2}+2-2\right)^2=\left(a^2+\frac{1}{a^2}\right)^2=a^4+\frac{1}{a^4}+2$$

حال در رابطه فوق به جای a، فرض سوال یعنی $a=\sqrt[4]{7-4\sqrt{3}}$ را جایگذاری می‌کنیم:

$$(\sqrt[4]{7-4\sqrt{3}})^4+\frac{1}{(\sqrt[4]{7-4\sqrt{3}})^4}+2=7-4\sqrt{3}+\frac{1}{7-4\sqrt{3}}+2\quad(*)$$

حال کسر $\frac{1}{7-4\sqrt{3}}$ را گویا می‌کنیم:

$$\frac{1}{7-4\sqrt{3}}\times\frac{7+4\sqrt{3}}{7+4\sqrt{3}}=\frac{7+4\sqrt{3}}{49-48}=7+4\sqrt{3}$$

حال حاصل به دست آمده را در عبارت (*) قرار می‌دهیم:

$$7-4\sqrt{3}+(7+4\sqrt{3})+2=14+2=16$$

36- رأس سهمی $y=-ax^2+ax+2$ روی سهمی $y=2bx^2-bx-1$ قرار دارد و برعکس. مقدار $b-a$ چقدر است؟

۱) -6 ۲) 6 ۳) -18 ۴) 18

پاسخ: گزینه ۲ (ریاضی ۱ ـ فصل ٤)

پاسخ تشریحی:

ابتدا مختصات رأس هر کدام از سهمی‌ها را پیدا می‌کنیم:

$$y_1=-ax^2+ax+2:\begin{cases} x_S=-\dfrac{b}{2a}=\dfrac{-a}{-2a}=\dfrac{1}{2} \\ y_S=-\dfrac{\Delta}{4a}=\dfrac{-\left(a^2+8a\right)}{4(-a)}=\dfrac{a}{4}+2 \end{cases}\Rightarrow S_1=(\frac{1}{2},\frac{a}{4}+2)$$

$$y_2=2bx^2-bx-1:\begin{cases} x_S=-\dfrac{b}{2a}=\dfrac{-(-b)}{2(2b)}=\dfrac{1}{4} \\ y_S=-\dfrac{\Delta}{4a}=-\dfrac{b^2+8b}{4(2b)}=-\dfrac{b^2+8b}{8b}=-\dfrac{b}{8}-1 \end{cases}\Rightarrow S_2=(\frac{1}{4},-\frac{b}{8}-1)$$

از طرفی می‌دانیم که رأس هر دو سهمی بر روی یکدیگر قرار دارد، بنابراین می‌توان گفت که مختصات رأس سهمی y_1 در معادله سهمی y_2 صدق می‌کند و مختصات رأس سهمی y_2 نیز در معادله سهمی y_1 صدق می‌کند، یعنی:

$$y_1=-ax^2+ax+2\xrightarrow{S_2(\frac{1}{4},-\frac{b}{8}-1)}-a(\frac{1}{4})^2+a(\frac{1}{4})+2=-\frac{b}{8}-1$$

$$\Rightarrow\frac{-a}{16}+\frac{a}{4}+2=-\frac{b}{8}-1\xrightarrow[\times 16]{\text{طرفین}}-a+4a+32=-2b-16\Rightarrow 3a+2b=-48$$

و همچنین:

$$y_2=2bx^2-bx-1\xrightarrow{S_1(\frac{1}{2},\frac{a}{4}+2)}2b(\frac{1}{2})^2-b(\frac{1}{2})-1=\frac{a}{4}+2$$

$$\Rightarrow\frac{2b}{4}-\frac{b}{2}-1=\frac{a}{4}+2\Rightarrow\frac{a}{4}+2=-1\Rightarrow\frac{a}{4}=-3\Rightarrow a=-12$$

حال به کمک رابطه $3a+2b=-48$ داریم:

$$3a+2b=-48\xrightarrow{a=-12}3(-12)+2b=-48\Rightarrow-36+2b=-48\Rightarrow 2b=-12\Rightarrow b=-6$$

در نتیجه:

$$\begin{cases} a=-12 \\ b=-6 \end{cases}\Rightarrow b-a=-6-(-12)=-6+12=6$$

37- مجموعه جواب نامعادلهٔ $\frac{7x-8}{x^2-x-2} > \frac{x}{x-2}$ به صورت بازه، کدام است؟

۱) $(-4,2)\cup(2,1)$ ۲) $(2,4)$ ۳) $(-1,2)\cup(2,4)$ ۴) $(-1,2)$

پاسخ: گزینه ۳ (ریاضی ۱ ـ فصل ٤)

روش اول:

ابتدا همه عوامل را به سمت چپ می‌بریم و مخرج مشترک می‌گیریم:

$$\frac{7x-8}{x^2-x-2} > \frac{x}{x-2} \Rightarrow \frac{7x-8}{(x-2)(x+1)} - \frac{x}{x-2} > 0 \Rightarrow \frac{7x-8-x(x+1)}{(x-2)(x+1)} > 0$$

$$\Rightarrow \frac{-x^2+6x-8}{(x-2)(x+1)} > 0 \xrightarrow{\times(-1)} \frac{x^2-6x+8}{(x-2)(x+1)} < 0 \Rightarrow \frac{(x-2)(x-4)}{(x-2)(x+1)} < 0$$

$$\xrightarrow{x\neq 2} \frac{x-4}{x+1} < 0 \Rightarrow -1 < x < 4$$

می‌دانیم که $x \neq 2$ است، پس:

مجموعه جواب: $(-1,4)-\{2\} = (-1,2)\cup(2,4)$

روش دوم:

رد گزینه به وسیله عددگذاری!

گروه آموزشی ماز

38 - اگر a و b اعداد طبیعی و ریشه‌های معادلهٔ $x^2-(a^2+b^2-12)x+a+b-1=0$ باشند، مقدار $a+b$ کدام است؟

۱) ۲ ۲) ۵ ۳) ۹ ۴) ۱۲

پاسخ: گزینه ۲ (ریاضی ۲ ـ فصل ۱)

پاسخ تشریحی:

a و b ریشه‌های معادله $x^2-(a^2+b^2-12)x+a+b-1=0$ هستند، پس:

$$\begin{cases} \text{جمع ریشه‌ها} = \frac{-(\text{ضریب } x)}{\text{ضریب } x^2} \Rightarrow a+b = a^2+b^2-12 \ (A) \\ \text{ضرب ریشه‌ها} = \frac{\text{مقدار ثابت}}{\text{ضریب } x^2} \Rightarrow ab = a+b-1 \ (B) \end{cases}$$

حال در رابطه A به کمک اتحاد $(a+b)^2 = a^2+b^2+2ab$ داریم:

$$a+b = \underbrace{a^2+b^2}_{(a+b)^2-2ab} - 12 \Rightarrow a+b = ((a+b)^2 - 2\underbrace{ab}_{a+b-1}) - 12 \Rightarrow a+b = (a+b)^2 - 2(a+b-1) - 12$$

حال در رابطه بالا، $a+b$ را برابر t فرض کرده و داریم:

$$t = t^2 - 2(t-1) - 12 \Rightarrow t = t^2 - 2t + 2 - 12 \Rightarrow t^2 - 3t - 10 = 0$$

$$\Rightarrow (t-5)(t+2) = 0 \Rightarrow \begin{cases} t-5=0 \to t=5 \to a+b=5 \ \checkmark \\ t+2=0 \to t=-2 \to a+b=-2 \ \times \end{cases}$$

توجه: چون a و b اعدادی طبیعی هستند، بنابراین $a+b=-2$ غیرقابل قبول است. (جمع دو تا عدد طبیعی که منفی نمیشه!)

39 - اگر $3a+\sqrt{2a^2+4a}=2$ باشد، عدد $\frac{a+1}{a}$ کدام است؟

۱) ۱/۵ ۲) ۲/۵ ۳) ۳/۵ ۴) ۴/۵

پاسخ: گزینه ٤ (ریاضی ۲ ـ فصل ۱)

ابتدا $3a$ را به طرف راست تساوی برده و طرفین را به توان ۲ می‌رسانیم:

$$\sqrt{2a^2+4a}=2-3a \xrightarrow{\text{طرفین به توان ۲}} 2a^2+4a=9a^2-12a+4 \Rightarrow 7a^2-16a+4=0$$

$$\Rightarrow a=\frac{16\pm\sqrt{144}}{14}=\frac{16\pm12}{14}\Rightarrow \begin{cases} a=2 \times \\ a=\frac{2}{7} \checkmark \end{cases}$$

دقت شود که $a=2$ در معادله اصلی صدق نمی‌کند. حال مقدار خواسته شده برابر است با:

$$\frac{a+1}{a}=1+\frac{1}{a}=1+\frac{1}{\frac{2}{7}}=1+\frac{7}{2}=4/5$$

گروه آموزشی ماز

40 - فرض کنید $A(-1,9)$ رأس سهمی $y=ax^2+bx+c$ گذرا بر نقطهٔ $(3,1)$ باشد. این سهمی از کدام‌یک از نقاط زیر می‌گذرد؟

۱) $(5,-7)$ ۲) $(5,-9)$ ۳) $(2,5)$ ۴) $(1,5)$

پاسخ: گزینه ۲ (ریاضی ۲ ـ فصل ۱)

نکته)

اگر $S(\alpha,\beta)$ مختصات رأس سهمی باشد، معادله آن را می‌توان به صورت $y=a(x-\alpha)^2+\beta$ نشان داد.

می‌دانیم اگر $S(\alpha,\beta)$ مختصات رأس یک سهمی باشد، $y=a(x-\alpha)^2+\beta$، معادله آن سهمی است بنابراین در این سوال معادله سهمی به صورت $y=a(x+1)^2+9$ است.

و چون سهمی مورد نظر از نقطهٔ $(3,1)$ می‌گذرد، پس این نقطه در ضابطهٔ سهمی صدق می‌کند، پس:

$$1=a(3+1)^2+9\Rightarrow -8=16a\Rightarrow a=-\frac{1}{2}$$

با به دست آمدن $a=-\frac{1}{2}$، ضابطه سهمی به صورت $y=-\frac{1}{2}(x+1)^2+9$ در می‌آید که نقطه $(5,-9)$ در آن صدق می‌کند.

گروه آموزشی ماز

41 - در بازهٔ (a,b) نمودار تابع $y=(x-1)^2$ بالاتر از نمودار تابع $y=4x^4$ است. بیشترین مقدار $b-a$، کدام است؟

۱) ۱ ۲) $\frac{3}{2}$ ۳) ۲ ۴) $\frac{5}{2}$

پاسخ: گزینه ۲ (ریاضی ۱ ـ فصل ٤)

می‌دانیم که اگر در بازهٔ (a,b) نمودار $y=(x-1)^2$ بالاتر از نمودار $y=4x^4$ باشد، خواهیم داشت:

$$(x-1)^2>4x^4\Rightarrow (x-1)^2-4x^4>0\Rightarrow (x-1)^2-(2x^2)^2>0 \xrightarrow{\text{مزدوج}} \left((x-1)-2x^2\right)\left((x-1)+2x^2\right)>0$$

$$\Rightarrow \underbrace{(-2x^2+x-1)}_{\Delta<0}(2x^2+x-1)>0$$

$$2x^2+x-1<0\Rightarrow (x+1)(2x-1)<0\Rightarrow -1<x<\frac{1}{2}$$

بنابراین بیشترین مقدار $b-a$ برابر است با:

$$\Rightarrow \frac{1}{2}-(-1)=\frac{3}{2}$$

42 - فرض کنید x_1 و x_2 ریشه‌های معادلهٔ $x=x^2-4$ باشند، ریشه‌های کدام معادله $x_1^3+\frac{1}{x_2}$ و $x_2^3+\frac{1}{x_1}$ است؟

۱) $4x^2=51x+221$ ۲) $4x^2+51x=221$ ۳) $4x^2=51x+197$ ۴) $4x^2+51x=197$

پاسخ: گزینه ۱ (ریاضی ۲ ـ فصل ۱)

نکته)

اگر α و β ریشه‌های معادله درجه دوم $ax^2+bx+c=0$ باشند:

- $S=\alpha+\beta=-\frac{b}{a}$
- $P=\alpha\beta=\frac{c}{a}$
- $\alpha^2+\beta^2=S^2-2P$
- $\alpha^3+\beta^3=S^3-3PS$

ابتدا معادله $x=x^2-4$ را به صورت زیر نوشته و داریم:

$$x=x^2-4\Rightarrow x^2-x-4=0\Rightarrow\begin{cases}x_1+x_2=-\frac{b}{a}=1\\ x_1x_2=\frac{c}{a}=-4\end{cases}\quad(*)$$

حال با داشتن ریشه‌های معادله جدید، می‌توان مجموع و حاصل‌ضرب آن‌ها را محاسبه کرد:

$$P_{new}=(x_1^3+\frac{1}{x_2})(x_2^3+\frac{1}{x_1})=(x_1^3x_2^3)+\underbrace{x_1^2+x_2^2}_{(x_1+x_2)^2-2x_1x_2}+\frac{1}{x_1x_2}=(x_1x_2)^3+(x_1+x_2)^2-2x_1x_2+\frac{1}{x_1x_2}$$

حال طبق روابط $(*)$ داریم:

$$P_{new}=(-4)^3+(1)^2-2(-4)+\frac{1}{-4}=-64+1+8-\frac{1}{4}=-\frac{221}{4}$$

$$S_{new}=(x_1^3+\frac{1}{x_2})+(x_2^3+\frac{1}{x_1})=x_1^3+x_2^3+\frac{1}{x_1}+\frac{1}{x_2}=(x_1+x_2)^3-3x_1x_2(x_1+x_2)+\frac{x_1+x_2}{x_1x_2}$$

$$\xrightarrow{(*)}S_{new}=(1)^3-3(-4)(1)+\frac{1}{-4}=1+12-\frac{1}{4}=\frac{51}{4}\Rightarrow\begin{cases}S_{new}=\frac{51}{4}\\ P_{new}=\frac{-221}{4}\end{cases}$$

می‌دانیم که اگر S و P به ترتیب مجموع و حاصل‌ضرب ریشه‌های معادله‌ای باشند، آن‌گاه آن معادله را می‌توان به صورت $x^2-Sx+P=0$ نمایش داد. لذا:

$$x^2-\frac{51}{4}x-\frac{221}{4}=0\xrightarrow{\times 4}4x^2-51x-221=0\Rightarrow 4x^2=51x+221$$

43 - معادله $\frac{1}{\sqrt{2-x}+2}-\frac{1}{2-\sqrt{2-x}}=\frac{2-x}{5\sqrt{2-x}}$ چند ریشه مثبت دارد؟

۱) صفر ۲) ۱ ۳) ۲ ۴) ۳

پاسخ: گزینه ۱ (ریاضی ۲ ـ فصل ۱)

پاسخ تشریحی:

ابتدا در سمت چپ معادله داده شده، مخرج مشترک می‌گیریم:

$$\frac{1}{\sqrt{2-x}+2}-\frac{1}{2-\sqrt{2-x}}=\frac{2-x}{5\sqrt{2-x}}\Rightarrow\frac{(2-\sqrt{2-x})-(\sqrt{2-x}+2)}{4-(2-x)}=\frac{2-x}{5\sqrt{2-x}}\Rightarrow\frac{-2\sqrt{2-x}}{2+x}=\frac{2-x}{5\sqrt{2-x}}$$

مزدوج

حال مخرج کسر در سمت راست تساوی فوق را گویا می‌کنیم: $(x\neq 2)$

$$\frac{-2\sqrt{2-x}}{2+x}=\frac{2-x}{5\sqrt{2-x}}\times\frac{\sqrt{2-x}}{\sqrt{2-x}}\Rightarrow\frac{-2\sqrt{2-x}}{2+x}=\frac{\sqrt{2-x}}{5}$$

عبارت $\sqrt{2-x}$ را از طرفین تساوی ساده کرده و داریم:

$$\frac{-2}{2+x}=\frac{1}{5}\Rightarrow 2+x=-10\Rightarrow x=-12$$

لذا معادله داده شده، فاقد ریشه مثبت است.

گروه آموزشی ماز

44 - پرنده‌ای فاصلهٔ یک کیلومتر را در جهت موافق باد رفته و در جهت مخالف باد برگشته است. اگر سرعت باد ۵ کیلومتر در ساعت و مدت رفت و برگشت ۹ دقیقه باشد، سرعت پرنده در هوای آرام، چند کیلومتر در ساعت است؟

۱) ۱۲ ۲) ۱۲/۵ ۳) ۱۳/۵ ۴) ۱۵

پاسخ: گزینه ٤ (ریاضی ۲ ـ فصل ۱)

اگر سرعت پرنده در هوای آرام را V فرض کنیم، سرعت پرنده در جهت موافق باد $V+5$ و در جهت مخالف باد $V-5$ است.

از طرفی می‌دانیم که $t=\frac{x}{V}$ است و می‌دانیم که مدت زمان رفت و برگشت در مجموع ۹ دقیقه است، پس:

$$t_1+t_2=9\Rightarrow\frac{1}{V+5}+\frac{1}{V-5}=\frac{9}{60}\Rightarrow\frac{2V}{V^2-25}=\frac{3}{20}\Rightarrow 3V^2-75=40V\Rightarrow 3V^2-40V-75=0$$

$$V=\frac{40\pm\sqrt{2500}}{6}\Rightarrow\begin{cases}V=15 \ \checkmark\\ V=\frac{-5}{3} \ \times\end{cases}$$

توجه: به واحدها دقت کن.

45- اختلاف ریشه‌های معادله $\sqrt{2x+4}-\sqrt{x-5}=3$ چند واحد است؟

۱) ۲۲ ۲) ۲۴ ۳) ۲۱ ۴) ۲۷

پاسخ: گزینه ۲ (ریاضی ۲ ـ صفحه ۲۲ و ۲۳ ـ متوسط)

نکته:

در معادلات گنگ (رادیکالی) به شکل $\sqrt{f(x)}=g(x)$ کافیست طرفین معادله را به توان دو برسانیم و سپس بررسی کنیم کدام جواب‌های بدست آمده در معادله صدق می‌کنند.

پاسخ تشریحی:

$$\sqrt{2x+4}-\sqrt{x-5}=3 \rightarrow \sqrt{2x+4}=\sqrt{x-5}+3 \xrightarrow{\text{توان ۲}} 2x+4=x-5+9+6\sqrt{x-5} \rightarrow x=6\sqrt{x-5} \xrightarrow{\text{توان ۲}} x^2=36(x-5)$$

$$\rightarrow x^2-36x+180=0 \rightarrow (x-6)(x-30)=0 \rightarrow x=6, x=30$$

هر دو جواب بدست آمده در معادله صدق می‌کند:

$x=6 \rightarrow \sqrt{16}-\sqrt{1}=3$ ✓

$x=30 \rightarrow \sqrt{64}-\sqrt{25}=3$ ✓

پس اختلاف ریشه‌ها برابر است با: $30-6=24$

سوالات منتخب:

معادله $\sqrt{x+1}-\sqrt{2x-5}=1$ چند جواب دارد؟ (کتاب درسی ریاضی ۱۱، صفحه ۲۳)

۱) ۱ ✓ ۲) ۲ ۳) ۳ ۴) صفر

گروه آموزشی ماز

46- اگر $\frac{1}{a-\sqrt{a}}+\frac{1}{a+\sqrt{a}}=\frac{2}{3}$ باشد، به ازای چند مقدار صحیح m، معادله $\frac{m}{x-1}-\frac{a}{x-2}=1$ جواب ندارد؟

۱) ۷ ۲) ۹ ۳) ۱۰ ۴) بی‌شمار

پاسخ: گزینه ۱ (ریاضی ۲ ـ صفحه ۱۹ تا ۲۱ ـ سخت)

نکته:

هر معادله گویا به شکل $\frac{f(x)}{g(x)}=0$ در می‌آید. در این صورت باید $f(x)=0$ و $g(x)\neq 0$ را حل کنیم. همچنین در معادلات می‌توانیم طرفین وسطین کنیم و سپس چک کنیم جواب‌های بدست آمده، مخرج‌ها را صفر نکنند.

پاسخ تشریحی:

ابتدا معادله گنگ داده شده را حل می‌کنیم:

$$\frac{1}{a-\sqrt{a}}+\frac{1}{a+\sqrt{a}}=\frac{2}{3}\to\frac{a+\sqrt{a}+a-\sqrt{a}}{a^2-a}=\frac{2}{3}\to\frac{2a}{a(a-1)}=\frac{2}{3}\to\frac{1}{a-1}=\frac{1}{3}\to a-1=3\to a=4$$

حال در معادله دوم $a=4$ را جایگذاری می‌کنیم:

$$\frac{m}{x-1}-\frac{4}{x-2}=1\to\frac{mx-2m-4x+4}{x^2-3x+2}=1\to\frac{(m-4)x+4-2m}{x^2-3x+2}=1\to x^2-3x+2=(m-4)x+4-2m$$

$$\to x^2+(1-m)x-2+2m=0\ (*)$$

اگر قرار باشد معادله ریشه نداشته باشد، باید در معادله بالا، یا $\Delta<0$ باشد و یا $\Delta\geq 0$ باشد ولی ریشه‌های بدست آمده، ریشه‌های مخرج کسرها باشند، پس حالات زیر را داریم:

۱) $\Delta<0\to(1-m)^2-4(1)(2m-2)<0\to m^2-2m+1+8-8m<0\to m^2-10m+9<0\to(m-1)(m-9)<0\to 1<m<9$

۲) ریشه معادله $(*)$ باشد. $x=1\to 1+1-m-2+2m=0\to m=0$

اگر $m=0$ باشد، معادله $(*)$ دارای دو ریشه $x=-2$ و $x=1$ است که $x=-2$ قابل قبول است. پس $m=0$ قابل قبول نیست.

۳) ریشه معادله $(*)$ باشد. $x=2\to 4+2-2m-2+2m=0\to 4=0\to$ نادرست $\to$ هیچ مقدار m به دست نمی‌آید.

پس مجموعه مقادیر قابل قبول m، همان بازه $1<m<9$ است که شامل ۷ عدد صحیح $2,3,\dots,8$ است.

سوالات منتخب

اگر $\frac{1}{a^3+1}+\frac{1}{a^3-1}=2$ باشد، حاصل $\left(\frac{1}{a^3-\sqrt{a^3}+1}+\frac{1}{a^3+\sqrt{a^3}+1}\right)^{1401}$ چقدر است؟ (ریاضی داخل ۱۴۰۱)

۱) ۲ ۲) ۲- ۳) ۱ ✓ ۴) ۱-

گروه آموزشی ماز

47- یک پله‌برقی به طول ۳۰ متر با سرعت ثابت به سمت بالا حرکت می‌کند. اگر پله‌برقی حرکت نکند، یک بچه شیطون با سرعت ۰/۵ متر بر ثانیه از آن بالا می‌رود و با سرعت ۱ متر بر ثانیه پایین می‌آید. اگر پله‌برقی روشن شود، این بچه در عرض ۹۰ ثانیه از پله‌ها بالا می‌رود و برمی‌گردد. در این صورت سرعت حرکت پله‌برقی چند متر بر ثانیه است؟

۱) ۰/۷ ۲) ۰/۸ ۳) ۰/۶ ۴) ۰/۵

پاسخ: گزینه ٤ (ریاضی ۲ ـ صفحه ۲۰ و ۲۱ ـ متوسط)

نکته:

یکی از مسائل کاربردی در معادلات گویا، مسائل سرعت است. در این صورت از رابطه $v=\frac{x}{t}$ استفاده می‌کنیم که در آن v سرعت و x و t به ترتیب جابه‌جایی و زمان هستند.

پاسخ تشریحی:

دقت کنید که وقتی روی پله‌برقی و در جهت آن حرکت کنیم، سرعت ما با پله‌برقی جمع و وقتی خلاف جهت آن حرکت می‌کنیم، سرعت‌ها از هم کم می‌شوند. بنابراین مجموع زمان رفت و برگشت برابر است با:

$$\frac{30}{0/5+v}+\frac{30}{1-v}=90\to\frac{1}{v+0/5}+\frac{1}{1-v}=3\to\frac{1-v+v+0/5}{-v^2+0/5v+0/5}=3\to\frac{1/5}{-v^2+0/5v+0/5}=3$$

$$\to\frac{1}{-v^2+0/5v+0/5}=2\to -2v^2+v+1=1\to v(1-2v)=0\to v=0,\frac{1}{2}$$

سوالات منتخب

سرعت یک قایق موتوری، در آب راکد ۱۰۰ متر بر دقیقه است. این قایق فاصلهٔ ۱۲۰۰ متری در رودخانه را رفته و برگشته است. اختلاف زمان رفت و برگشت ۵ دقیقه است. سرعت آب رودخانه، چند متر بر دقیقه است؟ (تجربی داخل ۹۸)

۱) ۱۲ ۲) ۱۵ ۳) ۲۰ ✓ ۴) ۲۵

گروه آموزشی ماز

48- مجموع جواب‌های معادله $\sqrt{1-x}+\frac{3}{\sqrt{1-x}}=4$ کدام است؟

۱) ۸ ۲) -8 ۳) ۴ ۴) -4

پاسخ: گزینه ۲ (ریاضی ۲ ـ صفحه ۲۲ تا ۲۴ ـ ساده)

پاسخ تشریحی:

$$\sqrt{1-x}+\frac{3}{\sqrt{1-x}}=4 \Rightarrow \frac{(1-x)+3}{\sqrt{1-x}}=4 \Rightarrow \frac{-x+4}{\sqrt{1-x}}=4$$

$$\Rightarrow 4\sqrt{1-x}=-x+4 \xrightarrow{\text{طرفین به توان ۲}} 16(1-x)=x^2-8x+16$$

$$\Rightarrow 16-16x=x^2-8x+16 \Rightarrow x^2+8x=0 \Rightarrow x(x+8)=0 \Rightarrow \begin{cases} x=0 \\ x=-8 \end{cases}$$

مجموع جوابهای معادله مذکور برابر -8 است.

گروه آموزشی ماز

49- اگر $x^2-|2x|<8$ باشد، حاصل $\left[\frac{x}{3}\right]$ کدام نمی‌تواند باشد؟

۱) ۱ ۲) -1 ۳) -2 ۴) ۲

پاسخ: گزینه ٤ (ریاضی ۱ ـ صفحه ۹۱ و ۹۲ / ریاضی ۲ ـ صفحه ٥٤ و ٥٥ ـ متوسط)

نکته:

یک ویژگی مهم قدرمطلق: $a^2=|a|^2 \,,\, \left|\frac{a}{b}\right|=\frac{|a|}{|b|} \,,\, |ab|=|a||b|$

پاسخ تشریحی:

پس $|2x|=|2||x|=2|x|$ و $x^2=|x|^2$

حل نامعادله:

$$|x|^2-2|x|-8<0 \rightarrow (|x|-4)(\overbrace{|x|+2}^{\text{همواره مثبت}})<0$$

$|x|\geq 0$ بنابراین عبارت $|x|+2$ همواره مثبت است. پس در تعیین علامت عبارت بالا نقشی ندارد.

$$\rightarrow |x|-4<0 \rightarrow |x|<4$$

نامعادلات ساده قدرمطلقی:

$|x| \le a \xrightarrow{a>0} -a \le x \le a$

$|x| \ge a \xrightarrow{a>0} x \ge a$ یا $x \le -a$

بنابراین مجموعه جواب نامعادله $|x| < ۴$ برابر است با: $-۴ < x < ۴$

حال عبارت $\left[\frac{x}{۳}\right]$ را می‌یابیم:

$$-۴ < x < ۴ \to -\frac{۴}{۳} < \frac{x}{۳} < \frac{۴}{۳} \to \left[\frac{x}{۳}\right] = -۲, -۱, ۰, ۱$$

گروه آموزشی ماز

50- فاصله $x \in (a,b)$ روی محور اعداد حقیقی از عدد ۳، همواره کمتر از نصف آن عدد است. در صورتی که $b-a$ بیشینه باشد، طول وسط بازه مذکور کدام است؟

۱) ۲ ۲) ۳ ۳) ۴ ۴) ۵

پاسخ: گزینه ۳ (ریاضی ۱ ـ صفحه ۹۱ و ۹۲ ـ متوسط)

نکته ۱:

فاصله عدد x از m روی محور اعداد برابر است با: $|x-m|$

نکته ۲:

در نامعادلات $|f(x)| < g(x)$ می‌توان با بازه‌بندی مناسب از شر قدرمطلق خلاص شد.

پاسخ تشریحی:

پس فاصلهٔ x از ۳، برابر است با $|x-۳|$، یعنی باید نامعادله زیر را حل کنیم:

$$|x-۳| < \frac{x}{۲}$$

$$\text{I)}\ x \ge ۳ \to x-۳ < \frac{x}{۲} \to \frac{x}{۲} < ۳ \to x < ۶ \xrightarrow{\text{اشتراک با } x \ge ۳} ۳ \le x < ۶$$

$$\text{II)}\ x < ۳ \to ۳-x < \frac{x}{۲} \to \frac{۳x}{۲} > ۳ \to x > ۲ \xrightarrow{\text{اشتراک با } x < ۳} ۲ < x < ۳$$

اجتماع موارد بالا به شکل $(۲,۶)$ است که وسط آن برابر است با: $\frac{۲+۶}{۲} = ۴$

گروه آموزشی ماز

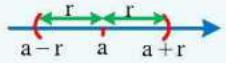
51- مجموعه جواب نامعادله‌های $x^۲-۲x+b<۰$ و $|x-a|<۳$ یکسان‌اند. مقدار $a+b$ کدام است؟

۱) ۵ ۲) -۵ ۳) ۷ ۴) -۷

پاسخ: گزینه ٤ (ریاضی ۱ ـ صفحه ۹۱ تا ۹۳ ـ متوسط)

نکته:

در نامعادلات به شکل $|x-a| < r$، مجموعه جواب به شکل $(a-r, a+r)$ است که در آن a مرکز بازه و r شعاع بازه است.



پاسخ تشریحی:

بنابراین a وسط بازه و شعاع بازه ۳ است.

در نامعادله اول نیز، مجموعه جواب بین دو ریشه است. پس وسط دو ریشه آن برابر است با a:

$$\frac{\text{مجموع ریشه‌ها}}{۲}=a\rightarrow\frac{۲}{۲}=a\rightarrow a=۱$$

پس مجموعه جواب نامعادله قدرمطلقی به شکل $(-۲,۴)$ است. بنابراین $x=-۲,۴$ ریشه‌های عبارت درجه دوم هستند:

$$x^۲-۲x+b=۰\xrightarrow{x=۴}۱۶-۸+b=۰\rightarrow b=-۸$$

پس: $a+b=-۷$ است.

گروه آموزشی ماز

52- نامعادله $\frac{۳}{x^۲-x+۱}<b$ به ازای هر عدد حقیقی برقرار است. در این صورت b کدام‌یک از اعداد زیر می‌تواند باشد؟

۱) ۳ ۲) ۴ ۳) ۲ ۴) ۵

پاسخ: گزینه ٤ (ریاضی ۱ ـ صفحه ۸٦ تا ۹۳ ـ متوسط)

نکته۱:

اگر عبارت همواره مثبت در یک نامعادله دیدید، می‌توانید طرفین وسطین کنید.

نکته۲:

در عبارت درجه دوم اگر $\Delta<۰$ و $a>۰$ باشد، عبارت مذکور همواره مثبت و اگر $\Delta<۰$ و $a<۰$، عبارت مذکور همواره منفی است.

پاسخ تشریحی:

روش اول:

در عبارت $x^۲-x+۱$، دلتا برابر است با $\Delta=۱-۴=-۳$ و $a>۰$ است، پس این عبارت همواره مثبت است. با طرفین وسطین آن داریم:

$$۳<bx^۲-bx+b\rightarrow bx^۲-bx+b-۳>۰$$

اگر مجموعه جواب نامعادله بالا $\mathbb{R}$ باشد، یعنی عبارت $bx^۲-bx+b-۳$ همواره مثبت است، پس Δ آن منفی و $a>۰$ است:

$$b^۲-۴(b)(b-۳)<۰\rightarrow b(b-۴b+۱۲)<۰\rightarrow b(۱۲-۳b)<۰\xrightarrow{\text{خارج دو ریشه}}b>۴ \text{ یا } b<۰$$

$$a>۰\rightarrow b>۰$$

اشتراک شرایط بالا برابر است با: $b>۴$

تنها عدد در این بازه $b=۵$ است.

روش دوم:

رأس عبارت $x^۲-x+۱$ را می‌یابیم:

$$y=x^۲-x+۱\rightarrow-\frac{b}{۲a}=\frac{۱}{۲},-\frac{\Delta}{۴a}=-\frac{-۳}{۴}=\frac{۳}{۴}\rightarrow S(\frac{۱}{۲},\frac{۳}{۴})$$

با توجه به اینکه در این عبارت ضریب $x^۲$ مثبت است، داریم:

$$x^۲-x+۱\geq\frac{۳}{۴}\rightarrow\frac{۱}{x^۲-x+۱}\leq\frac{۴}{۳}\rightarrow\frac{۳}{x^۲-x+۱}\leq۴$$

بنابراین نامعادله داده شده در صورت سوال زمانی همواره برقرار است که $b>۴$ باشد.

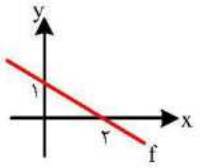
سوالات منتخب

به ازای کدام مجموعه مقادیر m، سهمی به معادلهٔ $y=(۱-m)x^۲+۲(m-۳)x-۱$، همواره پایین محور xها است؟ (ریاضی خارج ۹۸)

۱) $۱<m<۵$ ۲) $۲<m<۵$ ✓ ۳) $۲<m<۴$ ۴) $۲<m<۶$

گروه آموزشی ماز

53- اگر نمودار تابع خطی $y=f(x)$ به شکل مقابل باشد، مجموعه جواب نامعادله $\frac{f(x)}{f(x)-۲}<۱$ کدام است؟



۱) $x>۰$

۲) $x>-۱$

۳) $x>-۲$

۴) $x>-۳$

پاسخ: گزینه ۳ (ریاضی ۱ ـ صفحه ۸۷ و ۸۸ ـ متوسط)

نکته:

خط با عرض از مبدأ b و طول از مبدأ a دارای معادله $\frac{x}{a}+\frac{y}{b}=۱$ است.

پاسخ تشریحی:

پس ضابطه خط مذکور به شکل روبه‌رو است:

$$\frac{x}{۲}+\frac{y}{۱}=۱\rightarrow y=-\frac{x}{۲}+۱$$

حال نامعادله را حل می‌کنیم:

$$\frac{f(x)}{f(x)-۲}<۱\rightarrow\frac{-\frac{x}{۲}+۱}{-\frac{x}{۲}+۱-۲}<۱\rightarrow\frac{-\frac{x}{۲}+۱}{-\frac{x}{۲}-۱}<۱\rightarrow\frac{-x+۲}{-x-۲}<۱\rightarrow\frac{-x+۲+x+۲}{-x-۲}<۰$$

$$\frac{۴}{-x-۲}<۰\rightarrow -x-۲<۰\rightarrow x>-۲$$

سوالات منتخب

اگر $\frac{۴-۲x}{۳x+۱}\geq ۰$ باشد، مجموعه مقادیر $[۳x]$ چند عضو دارد؟ (تجربی داخل ۱۴۰۱)

۱) ۵ ۲) ۶ ۳) ۷ ۴) ۸ ✓

گروه آموزشی ماز

54- اگر جدول تعیین علامت تابع $p(x)=(x-a)(x^۲+x+c)$ به شکل زیر باشد، حاصل‌ضرب مقادیر مختلف abc کدام است؟

x		b		۱	
P(x)	−	۰	−	۰	+

۱) -۱ ۲) ۱

۳) ۴ ۴) -۴

پاسخ: گزینه ۲ (ریاضی ۱ ـ صفحه ۸۶ تا ۹۱ ـ متوسط)

نکته:

در تعیین علامت عبارت‌هایی نظیر $(x-a_۱)^{n_۱}(x-a_۲)^{n_۲}...$، اگر n_i زوج باشد، تابع حوالی a_i تغییر علامت نمی‌دهد و اگر n_i فرد باشد، تابع حوالی a_i تغییر علامت می‌دهد.

پاسخ تشریحی:

$x=1$ می‌تواند ریشه $(x-a)$ یا (x^2+x+c) باشد. پس دو حالت در نظر می‌گیریم:

در $x=b$ تغییر علامت نداریم، پس $x=b$ باید ریشه مضاعف $x^2+x+c=0$ باشد:

I) $x=1 \to 1-a=0 \to a=1$ ریشه $x-a$ باشد.

$$x^2+x+c=0 \xrightarrow{\text{ریشه مضاعف}} \Delta=0 \to 1-4c=0 \to c=\frac{1}{4} \xrightarrow{\text{ریشه مضاعف}} b=-\frac{1}{2} \to abc=-\frac{1}{8}$$

II) $x=1 \to 1+1+c=0 \to c=-2$ ریشه x^2+x+c باشد.

از طرفی بنابراین x^2+x-2 به شکل $(x-1)(x+2)$ است. پس ریشه دیگر $b=-2$ است و باید ریشه عبارت $(x-a)$ نیز باشد:

$-2-a=0 \to a=-2$

$\to abc=-8$

پس حاصل‌ضرب مقادیر abc برابر است با: $-8(-\frac{1}{8})=1$

سوالات منتخب

مجموعه جواب نامعادله $\frac{x^3-x}{x^2-2x+2} \le 0$ شامل چند عدد طبیعی است؟ (کتاب درسی ریاضی ۱۰ صفحه ۹۳)

۱) صفر ۲) ۱ ✓ ۳) ۲ ۴) بی‌شمار

گروه آموزشی ماز

55- اعداد a، b و c، سه جملهٔ متوالی از یک دنباله هندسی هستند. در مورد ریشه‌های معادله $ax^2+bx+c=0$، کدام گزینه درست است؟ $(b\neq 0)$

۱) دو ریشهٔ حقیقی دارد.
۲) یک ریشه مضاعف دارد.
۳) حداکثر یک ریشه دارد.
۴) ریشه حقیقی ندارد.

پاسخ: گزینه ٤ (ریاضی ۱ ـ صفحه ۷٤ تا ۷۷ ـ ساده)

پاسخ تشریحی:

طبق فرض مسئله، اعداد a، b و c، سه جملهٔ متوالی از یک دنباله هندسی هستند، پس می‌توان نوشت:

$$a,b,c \xrightarrow{\text{سه جمله دنباله هندسی}} b^2=ac$$

در نهایت با تشکیل Δ در معادلهٔ $ax^2+bx+c=0$، داریم:

$$\Delta=b^2-4ac \xrightarrow{ac=b^2} b^2-4b^2=-3b^2<0$$

پس معادله ریشهٔ حقیقی ندارد. (توجه کنید که چون طبق فرض مسئله $b\neq 0$ است، $\Delta=0$ قابل قبول نیست.)

گروه آموزشی ماز

56- در معادله درجه دوم $x^2-7x+1=0$، حاصل $\sqrt{\alpha}+\frac{1}{\sqrt{\alpha}}$ کدام است؟ (α یکی از ریشه‌های معادله است.)

۱) ۲) ۳) ۴)

پاسخ: گزینه ۲ (ریاضی ۲ ـ صفحه ۱۳ ـ متوسط)

پاسخ تشریحی:

در معادله داده شده $\Delta>0$ است. پس معادله دو ریشه حقیقی دارد. طبق فرض مسئله، یکی از ریشه‌های معادله α است. اگر ریشه دیگر را β درنظر بگیریم، خواهیم داشت:

$$x^2-7x+1=0 \Rightarrow P=\alpha\beta=\frac{c}{a}=1 \Rightarrow \beta=\frac{1}{\alpha}$$

پس خواسته مسئله $\sqrt{\alpha}+\sqrt{\beta}$ می‌شود که برای به دست آوردن مقدار آن می‌توان نوشت:

$$\sqrt{\alpha}+\sqrt{\beta}=\sqrt{S+2\sqrt{P}}=\sqrt{7+2\sqrt{1}}=\sqrt{7+2}=\sqrt{9}=3$$

گروه آموزشی ماز

57- اگر $x_1=\sin\theta$ و $x_2=\cos\theta$، ریشه‌های معادله درجه دوم $x^2-mx+(1-m)=0$ باشند، m کدام است؟

۱) $1,-3$ ۲) -3 ۳) ۴) $\varnothing$

پاسخ: گزینه ۳ (ریاضی ۲ ـ صفحه ۱۳ ـ متوسط)

پاسخ تشریحی:

از مثلثات می‌دانیم $\sin^2\theta+\cos^2\theta=1$ است. از طرفی طبق فرض مسئله $\cos\theta,\sin\theta$، ریشه‌های معادله هستند. پس داریم:

$$\sin^2\theta+\cos^2\theta=1\xrightarrow{x_1=\sin\theta,\,x_2=\cos\theta}x_1^2+x_2^2=1$$

یعنی مجموع مربعات دو ریشه برابر با ۱ است. در نتیجه می‌توان نوشت:

$$x_1^2+x_2^2=1\Rightarrow S^2-2P=1\Rightarrow(+m)^2-2(1-m)=1\Rightarrow m^2+2m-3=0$$

$$\Rightarrow(m-1)(m+3)=0\Rightarrow\begin{cases}m=1\\m=-3\end{cases}$$

حالا با جایگذاری مقادیر به بدست آمده در معادله داده شده، داریم:

چنل مرجع : آزمون وی ای پی

$$m=1:x^2-x=0\Rightarrow x(x-1)=0\Rightarrow x=0,x=1\checkmark$$

$$m=-3:x^2+3x+4=0\Rightarrow\Delta=-7\Rightarrow\text{ریشه ندارد}$$

گروه آموزشی ماز

58- اگر α و β ریشه‌های معادله درجه دوم $2x^2-mx+m+6=0$ باشند، به ازای کدام مجموعه مقادیر m، نقطه $A(\alpha,\beta)$ در ناحیهٔ سوم محورهای مختصات قرار دارد؟

۱) $(-4,0)$ ۲) $(-4,-2)$ ۳) $(-6,0)$ ۴) $(-6,-4)$

پاسخ: گزینه ٤ (ریاضی ۲ ـ صفحه ۱۵ تا ۱۸ ـ متوسط)

پاسخ تشریحی:

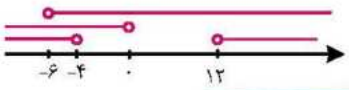
می‌دانیم اگر نقطه‌ای در ناحیه سوم محورهای مختصات باشد، هم طول و هم عرض آن منفی است. پس باید α و β هر دو منفی باشند. یعنی معادله درجه دوم $2x^2-mx+m+6=0$ دو ریشه منفی دارد که در این صورت باید $\Delta>0$، $S<0$ و $P>0$ باشد. در نتیجه می‌توان نوشت:

$$\Delta>0:(-m)^2-4(2)(m+6)>0\Rightarrow m^2-8m-48>0\Rightarrow(m-12)(m+4)>0\xrightarrow{\text{تعیین علامت}}m<-4\ \text{یا}\ m>12\quad(1)$$

$$S<0:\frac{-(-m)}{2}<0\Rightarrow\frac{m}{2}<0\Rightarrow m<0\quad(2)$$

$$P>0:\frac{m+6}{2}>0\Rightarrow m+6>0\Rightarrow m>-6\quad(3)$$

مجموعه مقادیر m، اشتراک (۱)، (۲) و (۳) است، پس داریم:



$$\xrightarrow{\cap}-6<m<-4$$

گروه آموزشی ماز

59- در یک معادله درجه دوم، واسطه حسابی ریشه‌ها، ۲ و واسطه هندسی مثبت آن‌ها ۱/۵ می‌باشد. این معادله کدام است؟

۱) $4x^2+16x+9=0$ ۲) $4x^2-16x+9=0$

۳) $4x^2+8x-9=0$ ۴) $4x^2-8x+9=0$

پاسخ: گزینه ۲ (ریاضی ۲ ـ صفحه ۱۱ تا ۱۳ ـ متوسط)

پاسخ تشریحی:

واسطه حسابی دو عدد α و β برابر $\frac{\alpha+\beta}{۲}$ و واسطه هندسی مثبت آن‌ها $\sqrt{\alpha\beta}$ است. پس داریم:

$$\frac{\alpha+\beta}{۲}=۲\Rightarrow \alpha+\beta=۴\Rightarrow S=۴$$

$$\sqrt{\alpha\beta}=\frac{۳}{۲}\xrightarrow{\text{توان ۲}}\alpha\beta=\frac{۹}{۴}\Rightarrow P=\frac{۹}{۴}$$

حالا برای نوشتن معادله درجه دوم با استفاده از رابطه $x^۲-Sx+P=۰$ می‌توان نوشت:

$$x^۲-۴x+\frac{۹}{۴}=۰\xrightarrow{\times ۴}۴x^۲-۱۶x+۹=۰$$

گروه آموزشی ماز

60- مجموع ریشه‌های معادله $x^۲+\frac{۱}{x^۲}+۲x+\frac{۲}{x}=۶$ کدام است؟

۱) ۲) ۳) -۳ ۴)

پاسخ: گزینه ۳ (ریاضی ۲ ـ صفحه ۱۱ ـ متوسط)

پاسخ تشریحی:

می‌دانیم $(x+\frac{۱}{x})^۲=x^۲+\frac{۱}{x^۲}+۲$ است. پس ابتدا معادله را به صورت زیر بازنویسی می‌کنیم:

$$x^۲+\frac{۱}{x^۲}+۲(x+\frac{۱}{x})-۶=۰\Rightarrow (x+\frac{۱}{x})^۲-۲+۲(x+\frac{۱}{x})-۶=۰\Rightarrow (x+\frac{۱}{x})^۲+۲(x+\frac{۱}{x})-۸=۰$$

حالا با تغییر متغیر $x+\frac{۱}{x}=t$ داریم:

$$t^۲+۲t-۸=۰\Rightarrow (t+۴)(t-۲)=۰\Rightarrow t=-۴, t=۲$$

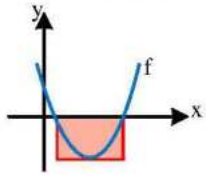
$$t=۲: x+\frac{۱}{x}=۲\xrightarrow{\times x}x^۲+۱=۲x\Rightarrow x^۲-۲x+۱=۰\Rightarrow (x-۱)^۲=۰\Rightarrow x=۱$$

$$t=-۴: x+\frac{۱}{x}=-۴\xrightarrow{\times x}x^۲+۱=-۴x\Rightarrow x^۲+۴x+۱=۰\xrightarrow{\Delta>۰}S=\frac{-b}{a}=-۴$$

در نتیجه مجموع ریشه‌های معادله برابر با $۱+(-۴)=-۳$ است.

گروه آموزشی ماز

61- سهمی $f(x)=x^۲-۸mx+۴$ را در نظر بگیرید. اگر α و β صفرهای این سهمی باشند و سه عدد $\log_۲^\beta$ ، m و $\log_۲^\alpha$ تشکیل دنباله حسابی دهند، مساحت مستطیل مقابل کدام است؟



۱) $۲۴\sqrt{۲}$

۲) $۴۸\sqrt{۲}$

۳) $۲۴\sqrt{۳}$

۴) $۴۸\sqrt{۳}$

پاسخ: گزینه ٤ (ریاضی ۲ ـ صفحه ۱۱ تا ۱۸ ـ متوسط)

پاسخ تشریحی:

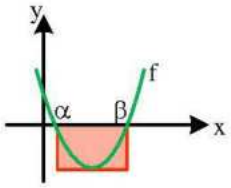
طبق فرض مسئله α و β ریشه‌های معادله $x^۲-۸mx+۴=۰$ هستند و چون طبق فرض مسئله، سه عدد $\log_۲^\beta$ ، m و $\log_۲^\alpha$ تشکیل دنباله حسابی می‌دهند، می‌توان نوشت:

$$\log_۲^\alpha, m, \log_۲^\beta \xrightarrow{\text{دنباله حسابی}} ۲m=\log_۲^\alpha+\log_۲^\beta \Rightarrow ۲m=\log_۲^{\alpha\beta} \xrightarrow{P=\alpha\beta=\frac{c}{a}=۴} ۲m=\log_۲^۴ \Rightarrow ۲m=۲ \Rightarrow m=۱$$

در نتیجه $f(x)=x^۲-۸x+۴$ است و برای به دست آوردن مساحت مستطیل می‌توان نوشت:

$$\text{طول}: |\alpha-\beta|=\sqrt{S^۲-۴P}=\sqrt{۶۴-۱۶}=\sqrt{۴۸}=۴\sqrt{۳}$$

$$\text{عرض}: \frac{-\Delta}{۴a}=\frac{-(۶۴-۱۶)}{۴}=\frac{-۴۸}{۴}=-۱۲$$



در نتیجه مساحت مستطیل $S=۴۸\sqrt{۳}$ است.

گروه آموزشی ماز

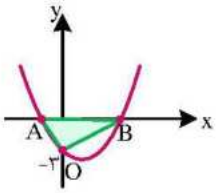
62- مساحت مثلثی که از اتصال نقاط برخورد منحنی تابع $y=x^۲+mx-۳$ با محورهای مختصات به دست می‌آید، برابر با ۶ است. محور تقارن نمودار این تابع، کدام می‌تواند باشد؟

۱)
۲) $y=۱$
۳) $x=۲$
۴) $y=۲$

پاسخ: گزینه ۱ (ریاضی ۲ ـ صفحه ۱۱ تا ۱۸ ـ متوسط)

پاسخ تشریحی:

با توجه به اینکه در منحنی سهمی $y=x^۲+mx-۳$ ، ضریب $x^۲$ مثبت، $\frac{c}{a}$ عددی منفی و عرض نقطه تلاقی نمودار تابع با محور عرض‌ها برابر با -۳ است، شکل تقریبی زیر را برای نمودار تابع در نظر می‌گیریم:



طبق فرض مسئله، مساحت مثلث $\overset{\triangle}{OAB}$ برابر ۶ است. پس داریم:

$$\frac{۱}{۲}\times \text{ارتفاع} \times \text{قاعده}=۶ \Rightarrow \frac{۱}{۲}\times ۳\times AB=۶ \Rightarrow AB=۴$$

از طرفی می‌دانیم AB برابر با تفاضل طول نقاط برخورد نمودار تابع با محور طول‌ها است. در نتیجه می‌توان نوشت:

$$|\alpha-\beta|=\frac{\sqrt{\Delta}}{|a|}=۴ \Rightarrow \frac{\sqrt{m^۲-۴(-۳)(۱)}}{۱}=۴ \xrightarrow{\text{توان ۲}} m^۲+۱۲=۱۶$$

$$\Rightarrow m^۲=۴ \Rightarrow \begin{cases} m=۲ \checkmark \\ m=-۲ \checkmark \end{cases}$$

در نتیجه، محور تقارن سهمی برابر است با:

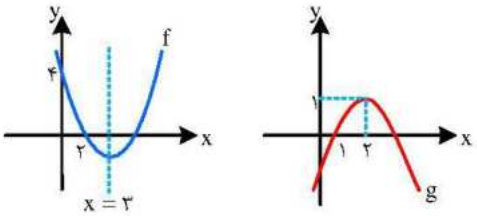
$$m=۲: y=x^۲+۲x-۳ \xrightarrow{\text{محور تقارن}} x=\frac{-۲}{۲}=-۱$$

$$m=-۲: y=x^۲-۲x-۳ \xrightarrow{\text{محور تقارن}} x=\frac{-(-۲)}{۲}=۱$$

که با توجه به گزینه‌ها، $x=۱$ پاسخ مسئله است.

گروه آموزشی ماز

63- نمودارهای دو سهمی f و g به صورت مقابل رسم شده‌اند. مجموع طول نقاط برخورد نمودار آن‌ها کدام است؟



۱) $\frac{۱۴}{۳}$

۲) $\frac{-۱۴}{۳}$

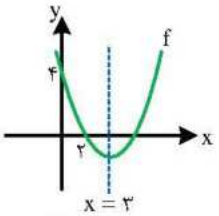
۳) $\frac{۱۶}{۳}$

۴) $\frac{-۱۶}{۳}$

پاسخ: گزینه ۱ (ریاضی ۲ ـ صفحه ۱۴ تا ۱۸ ـ متوسط)

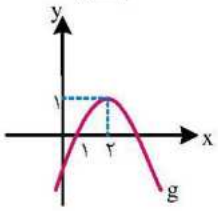
پاسخ تشریحی:

ابتدا ضابطه هر یک از سهمی‌های f و g را می‌نویسیم. پس داریم:



$$f(x)=k(x-۲)(x-۴)\xrightarrow{(۰,۴)\in f}۴=k(-۲)(-۴)\Rightarrow k=\frac{۱}{۲}$$

$$\Rightarrow f(x)=\frac{۱}{۲}(x-۲)(x-۴)$$



$$g(x)=k(x-۲)^۲+۱\xrightarrow{(۱,۰)\in g}۰=k+۱\Rightarrow k=-۱$$

$$\Rightarrow g(x)=-(x-۲)^۲+۱$$

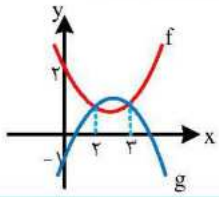
در آخر، خواسته مسئله، به دست آوردن مجموع جواب‌های معادله $f(x)=g(x)$ است و در نتیجه می‌توان نوشت:

$$f(x)=g(x)\Rightarrow\frac{۱}{۲}(x-۲)(x-۴)=-(x-۲)^۲+۱\xrightarrow{\times ۲}x^۲-۶x+۸=-۲x^۲+۸x-۸+۲\Rightarrow ۳x^۲-۱۴x+۱۴=۰$$

$$S=\frac{-b}{a}=\frac{۱۴}{۳}$$

گروه آموزشی ماز

64- نمودار دو سهمی f و g به صورت مقابل رسم شده است. $g(۵)-f(۵)$ کدام است؟



۱) -۲

۲) -۳

۳)

۴)

پاسخ: گزینه ۲ (ریاضی ۲ ـ صفحه ۱۴ تا ۱۸ ـ دشوار)

پاسخ تشریحی:

نمودار دو سهمی f و g در نقطه‌هایی به طول‌های $x=۲$ و $x=۳$ متقاطع هستند. پس $g(۲)-f(۲)=۰$ و $g(۳)-f(۳)=۰$ هستند. پس این دو نقطه، نقاط برخورد نمودار تابع $g-f$ با محور xها هستند و برای محاسبه ضابطه تابع $g-f$، داریم:

$$(g-f)(x)=k(x-۲)(x-۳)$$

برای به دست آوردن مقدار k، با توجه به این که $g(0)=-1$ و $f(0)=2$ است، پس می‌توان نتیجه گرفت که $(g-f)(0)=-1-2=-3$ است و می‌توان نوشت:

$$-3=k(-2)(-3)\Rightarrow 6k=-3\Rightarrow k=\frac{-1}{2}$$

در نتیجه ضابطه تابع $(g-f)(x)=\frac{-1}{2}(x-2)(x-3)$ است و برای محاسبه خواسته مسئله داریم:

$$g(5)-f(5)=(g-f)(5)=\frac{-1}{2}(5-2)(5-3)=\frac{-1}{2}(3)(2)=-3$$

گروه آموزشی ماز

65- نقطهٔ A به طول ۶ روی محور xها قرار دارد. کوتاه‌ترین فاصلهٔ نقطهٔ A از منحنی تابع $y=3\sqrt{x+1}$ کدام است؟

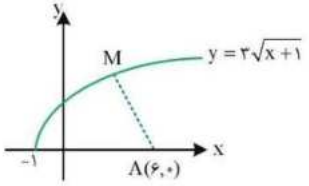
۱) $\frac{2}{3}\sqrt{19}$ ۲) $\frac{3}{2}\sqrt{19}$ ۳) $\frac{2}{3}\sqrt{21}$ ۴) $\frac{3}{2}\sqrt{21}$

پاسخ: گزینه ۲ (ریاضی ۲ ـ صفحه ۵ و ۱۴ ـ متوسط)

پاسخ تشریحی:

اگر نقطه‌ای روی منحنی $y=3\sqrt{x+1}$ که کوتاه‌ترین فاصله را از نقطهٔ $A(6,0)$ دارد، نقطهٔ $M(x,y)$ در نظر بگیریم. در این صورت داریم:

$$d=AM=\sqrt{(x-6)^2+(y-0)^2}=\sqrt{(x-6)^2+(3\sqrt{x+1}-0)^2}$$
$$=\sqrt{x^2-12x+36+9x+9}=\sqrt{x^2-3x+45}$$



اگر بخواهیم d مینیمم شود باید عبارت $x^2-3x+45$ مینیمم شود و بنابراین داریم:

$$x_{min}=\frac{3}{2}\Rightarrow d_{min}=\sqrt{\frac{9}{4}-\frac{9}{2}+45}=\sqrt{-\frac{9}{4}+45}=\sqrt{\frac{171}{4}}=\frac{\sqrt{171}}{2}=\frac{3\sqrt{19}}{2}$$

سوالات منتخب:

اگر کمترین مقدار عبارت $P(x)=x^2-6x+2m$ برابر ۵ باشد، مقدار m کدام است؟

۱) ۵ ۲) ۱۰ ۳) ۱۲ ۴) ۷ ✓

گروه آموزشی ماز

66- اگر α و β ریشه‌های معادلهٔ $4x^2+6x-1=0$ باشند، ریشه‌های کدام‌یک از معادلات زیر $\beta+3\alpha$ و $\alpha+3\beta$ است؟

۱) $4x^2+24x+23=0$ ۲) $4x^2+24x-23=0$

۳) $4x^2+24x+17=0$ ۴) $4x^2+24x-17=0$

پاسخ: گزینه ۱ (ریاضی ۲ ـ صفحه ۱۳ ـ متوسط)

پاسخ تشریحی:

$$4x^2+6x-1=0\Rightarrow S=\alpha+\beta=-\frac{3}{2}\quad,\quad P=\alpha\beta=\frac{-1}{4}$$

حال باید مجموع و حاصل‌ضرب ریشه‌های معادلهٔ مطلوب را به دست آوریم که برابر است با:

$$S_{\text{جدید}}=(\alpha+3\beta)+(\beta+3\alpha)=4(\alpha+\beta)=4(-\frac{3}{2})=-6$$

$$P_{\text{جدید}}=(\alpha+3\beta)(\beta+3\alpha)=\alpha\beta+3\alpha^2+3\beta^2+9\alpha\beta=3(\alpha^2+\beta^2)+10\alpha\beta$$
$$=3\left((\alpha+\beta)^2-2\alpha\beta\right)+10\alpha\beta=3(\frac{9}{4}+\frac{1}{2})+10(-\frac{1}{4})=\frac{33}{4}-\frac{10}{4}=\frac{23}{4}$$

معادلهٔ مطلوب: $x^2-Sx+P=0\Rightarrow x^2+6x+\frac{23}{4}=0\xrightarrow{\text{طرفین در ۴ ضرب}}4x^2+24x+23=0$

توجه شود که اگر بخواهیم معادلهٔ درجه دومی با ریشه‌های مشخص x_1 و x_2 بنویسیم در این صورت حاصل‌جمع و حاصل‌ضرب این ریشه‌ها را به دست آورده و S و P می‌نامیم، سپس معادلهٔ مطلوب را به صورت $x^2 - Sx + P = 0$ می‌نویسیم.

67- اتومبیلی فاصلهٔ بین دو شهر A و B را که ۲۴۰ کیلومتر است را به صورت رفت و برگشت طی می‌کند. اگر در مسیر رفت ۲۰کیلومتر بر ساعت سریع‌تر براند، ۳۶ دقیقه زودتر می‌رسد، سرعت اتومبیل در مسیر برگشت، چند کیلومتر بر ساعت بوده است؟

۱) ۱۰۰ ۲) ۹۰ ۳) ۸۰ ۴) ۱۲۰

پاسخ: گزینه ۳ (ریاضی ۲ ـ صفحه ۲۰ و ۲۱ ـ متوسط)

پاسخ تشریحی:

اگر سرعت اتومبیل را در مسیر برگشت برابر x فرض کنیم، در مسیر رفت $x+20$ خواهد بود.

$$t_2 - t_1 = \frac{36}{60} \Rightarrow t_2 - t_1 = 0/6 \Rightarrow \frac{240}{x} - \frac{240}{x+20} = 0/6 \Rightarrow 240\left(\frac{1}{x} - \frac{1}{x+20}\right) = 0/6 \Rightarrow 240\left(\frac{20}{x(x+20)}\right) = \frac{6}{10}$$

$$\Rightarrow x(x+20) = 8000 \Rightarrow x = 80\frac{km}{h}$$

سوالات منتخب:

یازده کیلوگرم رنگ با غلظت ۴۰ درصد با چهار کیلوگرم از همان نوع با غلظت ۷۰ درصد مخلوط شده‌اند. با تبخیر چند کیلوگرم آن، غلظت محلول به ۵۰ درصد می‌رسد؟ (ریاضی خارج ۹۲)

۱) ۰/۴ ۲) ۰/۵ ۳) ۰/۶ ✓ ۴) ۰/۸

گروه آموزشی ماز

68- مجموع ریشه‌های معادلهٔ $x^2 - 3x = \sqrt{x^2 - 3x + 2}$ کدام است؟

۱) -3 ۲) ۳ ۳) -6 ۴) ۶

پاسخ: گزینه ۲ (ریاضی ۲ ـ صفحه ۲۳ ـ متوسط)

پاسخ تشریحی:

با تغییر متغیر $x^2 - 3x + 2 = t$ خواهیم داشت:

$t - 2 = \sqrt{t} \Rightarrow$ باید $t - 2 \geq 0 \Rightarrow t \geq 2$ (۱)

با شرط $t \geq 2$ طرفین معادله را به توان ۲ می‌رسانیم:

$$t^2 - 4t + 4 = t \Rightarrow t^2 - 5t + 4 = 0 \Rightarrow (t-1)(t-4) = 0 \Rightarrow t = 1, t = 4$$

پس با توجه به رابطهٔ (۱) مشخص می‌شود که $t = 1$ غیرقابل قبول است و فقط $t = 4$ قابل قبول است.

$$t = 4 \Rightarrow x^2 - 3x + 2 = 4 \Rightarrow x^2 - 3x - 2 = 0 \Rightarrow \Delta > 0$$

مجموع ریشه‌های این معادله برابر $S = 3$ است.

توجه: چون که ما با شرط $t \geq 2$ جواب $t = 1$ را حذف کردیم پس معادله ریشه اضافی ندارد و هر دو ریشه معادله $x^2 - 3x - 2 = 0$ قابل قبول‌اند.

سوالات منتخب:

مجموع ریشه‌های معادلهٔ $\frac{1-\sqrt{x}}{1+\sqrt{x}} = 1 - x$ کدام است؟

۱) ۱ ✓ ۲) ۲ ۳) ۴ ۴) صفر

گروه آموزشی ماز

69- در تجزیهٔ عبارت $8a^9-a^6b^3+8a^3b^3-b^6$ کدام عامل وجود ندارد؟

۱) $2a-b$ ۲) a^2+b ۳) $a^4-a^2b+b^2$ ۴) $4a^2-2ab+b^2$

پاسخ: گزینه ٤ (ریاضی ۱ ـ صفحه ٦٧ ـ متوسط)

پاسخ تشریحی:

$$8a^9-a^6b^3+8a^3b^3-b^6=8a^9+8a^3b^3-a^6b^3-b^6=8a^3(a^6+b^3)-b^3(a^6+b^3)=(a^6+b^3)(8a^3-b^3)$$
$$=(a^2+b)(a^4-a^2b+b^2)(2a-b)(4a^2+2ab+b^2)$$

بنابراین در تجزیهٔ عبارت داده شده عامل‌های $(2a-b)$ و (a^2+b) و $(a^4-a^2b+b^2)$ وجود دارند، اما عامل $4a^2-2ab+b^2$ وجود ندارد.

سوالات منتخب:

کدام گزینه عاملی از عبارت x^4+16x^2+100 است؟

۱) x^2+x+10 ۲) $x^2-2x+10$ ✓ ۳) x^2-x+10 ۴) $x^2-5x+10$

گروه آموزشی ماز

70- حاصل عبارت $\frac{a^8-1}{a^6-a^4+a^2-1}\div(a^3+a)$ به ازای $a=2-\sqrt{3}$ کدام است؟

۱) $2+\sqrt{3}$ ۲) $2-\sqrt{3}$ ۳) $7-4\sqrt{3}$ ۴) $7+4\sqrt{3}$

پاسخ: گزینه ۱ (ریاضی ۱ ـ صفحه ٦٥ ـ متوسط)

پاسخ تشریحی:

$$\frac{a^8-1}{a^6-a^4+a^2-1}\div(a^3+a)=\frac{(a^4-1)(a^4+1)}{a^4(a^2-1)+(a^2-1)}\div(a^3+a)=\frac{(a^2-1)(a^2+1)(a^4+1)}{(a^2-1)(a^4+1)}\div(a^3+a)$$
$$=(a^2+1)\div(a^3+a)=\frac{a^2+1}{a^3+a}=\frac{a^2+1}{a(a^2+1)}=\frac{1}{a}$$

بنابراین حاصل عبارت $\frac{1}{a}$ به ازای $a=2-\sqrt{3}$ برابر است با:

$$\frac{1}{a}=\frac{1}{2-\sqrt{3}}=\frac{1}{2-\sqrt{3}}\times\frac{2+\sqrt{3}}{2+\sqrt{3}}=\frac{2+\sqrt{3}}{4-3}=2+\sqrt{3}$$

سوالات منتخب:

اگر $\alpha=\sqrt[4]{3\sqrt{2}-4}$ و $\beta=\sqrt[4]{3\sqrt{2}+4}$ باشند، حاصل عبارت $(\alpha^2+\beta^2-\alpha\beta)(\alpha^2+\beta^2+\alpha\beta)$ کدام است؟ (ریاضی داخل ۹۵)

۱) ۶ ۲) ۸ ۳) $6\sqrt{2}$ ۴) $7\sqrt{2}$ ✓

گروه آموزشی ماز

71- عدد a^2-a ریشه دوم ندارد. کدام گزینه نادرست است؟

۱) $|a^3-a^2|=a^2-a^3$

۲) $a\in(a^2,\sqrt{a})$

۳) $[a^3,\sqrt[3]{a}]\subseteq[a^2,\sqrt{a}]$

۴) $[a^3,\sqrt{a}]\cap[a^2,\sqrt[3]{a}]=[a^2,\sqrt{a}]$

پاسخ: گزینه ۳ (ریاضی ۱ ـ صفحه ۵۲ و ۵۴ تا ۵۶ ـ متوسط)

پاسخ تشریحی:

طبق فرض مسئله عدد a^2-a ریشه دوم ندارد پس $a^2-a<0$ است و داریم:

$$a^2-a<0 \xrightarrow{\text{تعیین علامت}} \begin{array}{c|ccccc} & & 0 & & 1 & \\ \hline a^2-a & + & 0 & - & 0 & + \end{array} \Rightarrow 0<a<1$$

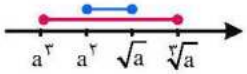
از طرفی می‌دانیم اگر $0<a<1$ باشد، $a^3<a^2<a<\sqrt{a}<\sqrt[3]{a}$ است. حالا به بررسی همه گزینه‌ها می‌پردازیم:

بررسی موارد:

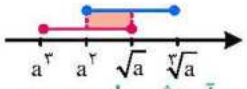
۱) $a^3<a^2 \Rightarrow a^3-a^2<0 \Rightarrow |\underbrace{a^3-a^2}_{\text{منفی}}|=a^2-a^3$ ✓

۲) $a^2<a<\sqrt{a} \Rightarrow a\in(a^2,\sqrt{a})$ ✓

۳) $[a^3,\sqrt[3]{a}]\subseteq[a^2,\sqrt{a}]$ ×



۴) $[a^3,\sqrt{a}]\cap[a^2,\sqrt[3]{a}] \xrightarrow{\cap} [a^2,\sqrt{a}]$ ✓



گروه آموزشی ماز

72- با توجه به معادله $(\sqrt{9^{a+3}})(\sqrt[3]{64^{b-8}})=6^{1-a}$، حاصل ab کدام است؟

۱) -9

۲) 9

۳) 8

۴) -8

پاسخ: گزینه ۱ (ریاضی ۱ ـ صفحه ۵۹ و ۶۰ ـ متوسط)

پاسخ تشریحی:

ابتدا هر یک از عبارت‌های داده شده را تا حد ممکن ساده می‌کنیم:

$$\sqrt{9^{a+3}}=\sqrt{(3^2)^{a+3}}=3^{\frac{2(a+3)}{2}}=3^{a+3}$$

$$\sqrt[3]{64^{b-8}}=\sqrt[3]{(4^3)^{b-8}}=4^{\frac{3(b-8)}{3}}=4^{b-8}=(2^2)^{b-8}=2^{2b-16}$$

$$6^{1-a}=(2\times3)^{1-a}=2^{1-a}\times3^{1-a}$$

حالا با حل دستگاه شامل معادلات $3^{a+3}=3^{1-a}$ و $2^{2b-16}=2^{1-a}$ مقادیر a و b را به دست می‌آوریم:

$$3^{a+3}=3^{1-a}\Rightarrow a+3=1-a\Rightarrow 2a=-2\Rightarrow a=-1$$

$$2^{2b-16}=2^{1-a}\Rightarrow 2b-16=1-a \xrightarrow{a=-1} 2b-16=2\Rightarrow 2b=18\Rightarrow b=9$$

در آخر برای محاسبه خواسته مسئله می‌توان نوشت:

$$ab=(-1)(9)=-9$$

گروه آموزشی ماز

73- حاصل عبارت $\left(\sqrt{3+\sqrt{8}}-1\right)\left(\sqrt{3-\sqrt{5}}-\sqrt{3+\sqrt{5}}\right)$ کدام است؟

۱) ۱ ۲) ۱- ۳) ۲ ۴) ۲-

پاسخ: گزینه ٤ (ریاضی ۱ ـ صفحه ٦٣ و ٦٤ ـ متوسط)

پاسخ تشریحی:

$$\sqrt{3+\sqrt{5}} > \sqrt{3-\sqrt{5}} \rightarrow A=\sqrt{3-\sqrt{5}}-\sqrt{3+\sqrt{5}} < 0 \ *$$

$$A=\sqrt{3-\sqrt{5}}-\sqrt{3+\sqrt{5}} \rightarrow A^2=3-\sqrt{5}+3+\sqrt{5}-2\sqrt{9-5}=6-2\sqrt{4}=2 \rightarrow A=\pm\sqrt{2} \xrightarrow{*} A=-\sqrt{2}$$

$$\sqrt{3+\sqrt{8}}-1=\sqrt{3+2\sqrt{2}}-1=\sqrt{(\sqrt{2}+1)^2}-1=\sqrt{2}+1-1=\sqrt{2}$$

$$\xrightarrow{\times} = -2$$

گروه آموزشی ماز

74- اگر $\frac{a}{b}+\frac{b}{a}=6$ باشد، حاصل $\frac{a+b}{a-b}$ کدام می‌تواند باشد؟ $(ab\neq 0)$

۱) $\sqrt{2}$ ۲) ۲ ۳) ۴ ۴) $2\sqrt{2}$

پاسخ: گزینه ۱ (ریاضی ۱ ـ صفحه ٥٦ و ٦٢ ـ ساده)

پاسخ تشریحی:

طبق فرض مسئله $\frac{a}{b}+\frac{b}{a}=6$ است. پس داریم:

$$\frac{a}{b}+\frac{b}{a}=6 \Rightarrow \frac{a^2+b^2}{ab}=6 \Rightarrow a^2+b^2=6ab$$

حالا برای محاسبه خواسته مسئله با فرض این که $A=\frac{a+b}{a-b}$ باشد، می‌توان نوشت:

$$A=\frac{a+b}{a-b} \xrightarrow{\text{توان ۲}} A^2=\frac{a^2+b^2+2ab}{a^2+b^2-2ab} \xrightarrow{a^2+b^2=6ab} A^2=\frac{6ab+2ab}{6ab-2ab}=\frac{8ab}{4ab}=2 \xrightarrow{\sqrt{\ }} A=\pm\sqrt{2}$$

با توجه به گزینه‌ها پاسخ تست $A=\sqrt{2}$ است.

گروه آموزشی ماز

75- اگر $5x^2+y^2-4xy-2x+1=0$ باشد، واسطه حسابی دو عدد x و y کدام است؟

۱) ۱ ۲) ۱/۵ ۳) ۲ ۴) ۲/۵

پاسخ: گزینه ۲ (ریاضی ۱ ـ صفحه ٦٢ تا ٦٥ ـ متوسط)

پاسخ تشریحی:

ابتدا به جای $5x^2$ قرار می‌دهیم x^2+4x^2 و سپس با یک دسته‌بندی مناسب عبارت داده شده را به صورت مجموع دو عبارت مربع کامل می‌نویسیم. ببینید:

$$5x^2+y^2-4xy-2x+1=0 \Rightarrow x^2+4x^2+y^2-4xy-2x+1=0 \Rightarrow (x^2-2x+1)+(4x^2-4xy+y^2)=0$$

$$\Rightarrow (x-1)^2+(2x-y)^2=0$$

از طرفی می‌دانیم مجموع چند عبارت نامنفی وقتی صفر می‌شود که همه آن‌ها صفر باشند و در نتیجه برای به دست آوردن مقادیر x و y می‌توان نوشت:

$$x-1=0 \Rightarrow x=1$$

$$2x-y=0 \xrightarrow{x=1} 2-y=0 \Rightarrow y=2$$

در آخر واسطه حسابی دو عدد $\frac{x+y}{2}=\frac{1+2}{2}=\frac{3}{2}=1/5$ است.

گروه آموزشی ماز

76- اگر $\sqrt[3]{x+1}-\sqrt[3]{x-5}=2$ باشد، حاصل $\sqrt[3]{x^2-4x-5}$ کدام است؟

۱) $\frac{1}{3}$ ۲) $-\frac{1}{3}$ ۳) $\frac{2}{3}$ ۴) $-\frac{2}{3}$

پاسخ: گزینه ۲ (ریاضی ۱ ـ صفحه ٦٢ ـ متوسط)

پاسخ تشریحی:

با استفاده از اتحاد مکعب دو جمله‌ای یعنی $(a-b)^3=a^3-b^3-3ab(a-b)$ طرفین معادله داده شده را به توان ۳ می‌رسانیم. پس داریم:

$$\sqrt[3]{x+1}-\sqrt[3]{x-5}=2\xrightarrow{\text{توان ۳}}(x+1)-(x-5)-3\sqrt[3]{x+1}\sqrt[3]{x-5}(\sqrt[3]{x+1}-\sqrt[3]{x-5})=8$$

$$\xrightarrow{\sqrt[3]{x+1}-\sqrt[3]{x-5}=2}6-3\sqrt[3]{x^2-4x-5}\ (2)=8\Rightarrow -6\sqrt[3]{x^2-4x-5}=2\Rightarrow\sqrt[3]{x^2-4x-5}=\frac{-2}{6}=\frac{-1}{3}$$

گروه آموزشی ماز

77- برای عدد مثبت a اگر $\sqrt{a}>a$ و $a^2+\frac{1}{a^2}=18$ باشد، $\frac{a^6-1}{a^3}$ کدام است؟

۱) -86 ۲) 86 ۳) -76 ۴) 76

پاسخ: گزینه ۳ (ریاضی ۱ ـ صفحه ٦٢ تا ٦٤ ـ متوسط)

پاسخ تشریحی:

$$\sqrt{a}>a\rightarrow 0<a<1*$$

$$a^2+\frac{1}{a^2}=18\xrightarrow{-2}a^2+\frac{1}{a^2}-2=16\rightarrow(a-\frac{1}{a})^2=16\rightarrow a-\frac{1}{a}=\pm4\rightarrow a-\frac{1}{a}=-4**$$

$$\frac{a^6-1}{a^3}=a^3-\frac{1}{a^3}=(a-\frac{1}{a})(a^2+\frac{1}{a^2}+1)\xrightarrow{**}(-4)(19)=-76$$

گروه آموزشی ماز

78- عبارت $4x^2+(2x+1)(y-1)+2x$ بر کدام یک از عبارت‌های زیر بخش‌پذیر است؟

۱) $x-2y+1$ ۲) $x+2y-1$ ۳) $2x-y+1$ ۴) $2x+y-1$

پاسخ: گزینه ٤ (ریاضی ۱ ـ صفحه ٦٣ و ٦٤ ـ متوسط)

پاسخ تشریحی:

با یک دسته‌بندی مناسب عبارت داده شده را تجزیه می‌کنیم. پس داریم:

$$4x^2+(2x+1)(y-1)+2x=(4x^2+2x)+(2x+1)(y-1)=(2x)(2x+1)+(2x+1)(y-1)$$
$$=(2x+1)(2x+y-1)$$

گروه آموزشی ماز

79- اگر h عددی بسیار کوچک $(h\simeq 0)$ باشد، حاصل عبارت $\frac{h}{\sqrt{x+h}-\sqrt{x}}$ کدام است؟

۱) $\sqrt{x}$ ۲) $2\sqrt{x}$ ۳) $\frac{1}{\sqrt{x}}$ ۴) $\frac{1}{2\sqrt{x}}$

پاسخ: گزینه ۲ (ریاضی ۱ ـ صفحه ٦٥ و ٦٦ ـ متوسط)

پاسخ تشریحی:

اگر در عبارت داده شده یعنی $\frac{h}{\sqrt{x+h}-\sqrt{x}}$ به جای h صفر قرار دهیم به حالت $\frac{0}{0}$ می‌رسیم. (به زودی خواهید دید خیلی هم عجیب نیست) که تعریف نشده است، اما اگر صورت و مخرج کسر را در مزدوج مخرج کسر یعنی $\sqrt{x+h}+\sqrt{x}$ ضرب کنیم، داریم:

$$\frac{h}{\sqrt{x+h}-\sqrt{x}}\times\frac{\sqrt{x+h}+\sqrt{x}}{\sqrt{x+h}+\sqrt{x}}=\frac{h(\sqrt{x+h}+\sqrt{x})}{(\cancel{x}+h)-\cancel{x}}=\frac{\cancel{h}(\sqrt{x+h}+\sqrt{x})}{\cancel{h}}=\sqrt{x+h}+\sqrt{x}$$

مزدوج

حالا اگر به جای h صفر قرار دهیم خواسته مسئله به دست می‌آید پس می‌توان نوشت:

$$\sqrt{x+h}+\sqrt{x}\xrightarrow{h=0}\sqrt{x}+\sqrt{x}=2\sqrt{x}$$

گروه آموزشی ماز

80- اگر $A=\frac{17}{3\sqrt[3]{3}-2\sqrt[3]{9}+4}$ باشد، $A-2$ را به صورت 3^a می‌نویسیم. a کدام است؟

۱) $\frac{1}{3}$ ۲) $\frac{2}{3}$ ۳) $-\frac{1}{3}$ ۴) $-\frac{2}{3}$

پاسخ: گزینه ۲ (ریاضی ۱ ـ صفحه ٦٥ و ٦٦ ـ متوسط)

پاسخ تشریحی:

ابتدا مخرج کسر A را با توجه به این که می‌دانیم $3\sqrt[3]{3}$ برابر با $\sqrt[3]{81}$ است بازنویسی کرده و سپس با استفاده از اتحاد چاق و لاغر مخرج کسر را گویا می‌کنیم. داریم:

$$A=\frac{17}{3\sqrt[3]{3}-2\sqrt[3]{9}+4}=\frac{17}{\sqrt[3]{81}-2\sqrt[3]{9}+4}\times\frac{\sqrt[3]{9}+2}{\sqrt[3]{9}+2}=\frac{17(\sqrt[3]{9}+2)}{9+8}=\frac{\cancel{17}(\sqrt[3]{9}+2)}{\cancel{17}}\Rightarrow A=\sqrt[3]{9}+2$$

چاق و لاغر

در نتیجه $A-2=\sqrt[3]{9}=3^{\frac{2}{3}}$ است و به وضوح $a=\frac{2}{3}$ می‌باشد.

گروه آموزشی ماز

www.mapedu.ir

تست و پاسخ ۱

یکی از ریشه‌های معادلهٔ $x^2 - x = k$ از دو برابر ریشهٔ دیگر، ۳ واحد بیشتر است. عدد اختلاف دو ریشه، چند برابر مقدار k است؟

۱) ۲/۱ ۲) ۲/۸ ۳) ۰/۷ ۴) ۱/۴

پاسخ: گزینه ۱

مشاوره مشابه این سؤال بارها در کنکور آمده است. یک سؤال متوسط که در تمرین‌هایتان حتماً شبیه‌اش را دیده‌اید.

خودت حل کنی بهتره یکی از ریشه‌ها را α بگیرید و دیگری را برحسب آن بنویسید. بعد از S و P هم کمک بگیرید.

نکته در معادلهٔ درجه‌دوم $ax^2 + bx + c = 0$ با شرط $\Delta > 0$، داریم:

اختلاف ریشه‌ها: $M = \frac{\sqrt{\Delta}}{|a|}$ ضرب ریشه‌ها: $P = \frac{c}{a}$ مجموع ریشه‌ها: $S = \frac{-b}{a}$

پاسخ تشریحی **گام اول:** ریشه‌های معادلهٔ $x^2 - x - k = 0$ را α و β در نظر می‌گیریم.

گام دوم: یکی از ریشه‌ها (مثلاً β) از دو برابر ریشهٔ دیگر، ۳ واحد بیشتر است: $\beta = 2\alpha + 3$

گام سوم: ریشه‌ها را α و $2\alpha + 3$ می‌گیریم و از S کمک می‌گیریم: $S = \frac{-b}{a} \Rightarrow \alpha + (2\alpha + 3) = \frac{1}{1} \Rightarrow 3\alpha = -2 \Rightarrow \alpha = \frac{-2}{3}$

گام چهارم: در نتیجه ریشه‌ها به صورت روبه‌رو هستند:

$$\begin{cases} \alpha = \frac{-2}{3} \\ \beta = 2\alpha + 3 = 2(\frac{-2}{3}) + 3 = \frac{5}{3} \end{cases}$$

گام پنجم: ضرب دو ریشه برابر است با: $\frac{-2}{3} \times \frac{5}{3} = \frac{-10}{9}$

این مقدار باید برابر با $\frac{c}{a}$ باشد: $\frac{c}{a} = \frac{-10}{9} \Rightarrow -k = \frac{-10}{9} \Rightarrow k = \frac{10}{9}$

گام ششم: نسبت اختلاف دو ریشه به k برابر است با: $\frac{|\alpha - \beta|}{k} = \frac{|\frac{-2}{3} - \frac{5}{3}|}{\frac{10}{9}} = \frac{\frac{7}{3}}{\frac{10}{9}} = \frac{21}{10} = 2/1$

تست و پاسخ ۲

اگر $\alpha - 1$ و $\beta + 1$ ریشه‌های معادلهٔ $2x^2 - 3x - 1 = 0$ باشند، ریشه‌های کدام معادله α و $\beta + 2$ است؟

۱) $2x^2 + x - 2 = 0$ ۲) $2x^2 - 7x + 4 = 0$ ۳) $2x^2 - x - 2 = 0$ ۴) $2x^2 - 7x - 4 = 0$

پاسخ: گزینه ۲

مشاوره یک سؤال تکراری! باید بارها و بارها شبیه این سؤال را دیده باشید. فقط این‌جا یه کوچولو طراح اذیت کرده و ریشه‌های اولیه را α و β نداده است.

خودت حل کنی بهتره اگر به $\alpha - 1$ و $\beta + 1$، یک واحد اضافه کنید، به α و $\beta + 2$ می‌رسید!

نکات ۱) در معادلهٔ درجه‌دوم $ax^2 + bx + c = 0$ با شرط $\Delta > 0$، داریم:

اختلاف ریشه‌ها: $M = \frac{\sqrt{\Delta}}{|a|}$ ضرب ریشه‌ها: $P = \frac{c}{a}$ مجموع ریشه‌ها: $S = \frac{-b}{a}$

۲) معادلهٔ درجه‌دومی که مجموع ریشه‌هایش S و حاصل‌ضربشان P باشد، به صورت $x^2 - Sx + P = 0$ است.

www.mapedu.ir

پاسخ تشریحی **راه اول:** ریشه‌های معادلهٔ اولیه $\alpha-1$ و $\beta+1$ و ریشه‌های معادلهٔ جدید α و $\beta+2$ هستند.

اگر کمی دقت کنید، ریشه‌های جدید از ریشه‌های قدیم، ۱ واحد بیشترند، پس برای راحتی این‌جوری ببینیم:

$$\overbrace{\underbrace{\beta+1}_{\beta'},\underbrace{\alpha-1}_{\alpha'}}^{\text{ریشه‌های اولیه}} \xrightarrow{\text{۱ واحد افزایش}} \overbrace{\underbrace{\beta+2}_{\beta'+1},\underbrace{\alpha}_{\alpha'+1}}^{\text{ریشه‌های جدید}}$$

به کمک معادلهٔ $2x^2-3x-1=0$، S و P اولیه را می‌نویسیم:

$$\begin{cases} S=\frac{-b}{a}=\frac{3}{2} \\ P=\frac{c}{a}=\frac{-1}{2} \end{cases}$$

حالا S و P معادلهٔ جدید را حساب می‌کنیم:

$$S_{\text{جدید}}=\alpha'+1+\beta'+1=(\alpha'+\beta')+2=\frac{3}{2}+2=\frac{7}{2}$$

$$P_{\text{جدید}}=(\alpha'+1)(\beta'+1)=\underbrace{\alpha'\beta'}_{P}+\underbrace{\alpha'+\beta'}_{S}+1=\frac{-1}{2}+\frac{3}{2}+1=2$$

معادلهٔ جدید را می‌نویسیم:

$$x^2-S_{\text{جدید}}x+P_{\text{جدید}}=0 \Rightarrow x^2-\frac{7}{2}x+2=0 \xrightarrow{\times 2} 2x^2-7x+4=0$$

راه دوم: از آن‌جایی که فهمیدیم ریشه‌های جدید، ۱ واحد از ریشه‌های قدیم بیشتر هستند، پس داریم:

$$x_{\text{جدید}}=x_{\text{قبلی}}+1$$

$x_{\text{قبلی}}$ را برحسب $x_{\text{جدید}}$ می‌نویسیم:

$$x_{\text{قبلی}}=x_{\text{جدید}}-1$$

حالا در معادلهٔ $2x^2-3x-1=0$ (که جنس xهایش قدیمی است)، جای xها $(x_{\text{جدید}}-1)$ را قرار می‌دهیم:

$$2(x_{\text{جدید}}-1)^2-3(x_{\text{جدید}}-1)-1=0 \Rightarrow 2x_{\text{جدید}}^2-4x_{\text{جدید}}+2-3x_{\text{جدید}}+3-1=0 \Rightarrow 2x_{\text{جدید}}^2-7x_{\text{جدید}}+4=0$$

تست و پاسخ ۳

اگر α و β ریشه‌های معادلهٔ $x^2+x-1=0$ باشند، حاصل $\frac{1}{(1+\alpha)^3}+\frac{1}{(1+\beta)^3}$ کدام است؟

۱) ۲ ۲) -4 ۳) -2 ۴) ۴

پاسخ: گزینه ۲

مشاوره **یکی از تیپ‌های معروف سؤالات معادلهٔ درجه‌دوم که باید از جای‌گذاری ریشه‌ها در خود معادله استفاده کنیم. در کنکور ۱۴۰۰ هم این‌مدلی داشتیم.**

خودت حل کنی بهتره طرفین تساوی $x^2+x-1=0$ را بر x تقسیم کنید و چشم‌هایتان را باز کنید!

نکته در معادلهٔ درجه‌دوم $ax^2+bx+c=0$، با فرض $\Delta>0$، بهتر است مجموع مربعات و مجموع مکعبات ریشه‌ها را بلد باشیم:

مجموع مربعات ریشه‌ها: $x_1^2+x_2^2=S^2-2P$

مجموع مکعبات ریشه‌ها: $x_1^3+x_2^3=S^3-3PS$

تکنیک در سؤالات معادلهٔ درجه‌دوم، بعضی وقت‌ها شبیه عبارتی که سؤال داده را در معادله می‌بینیم. در این سؤال‌ها باید ریشهٔ معادلهٔ آن را صدق دهیم و از تساوی به دست آمده استفاده کنیم. چند نمونه ببینید:

۱) در معادلهٔ $2x^2-3x-6=0$، عبارت $2\alpha^2-3\alpha$ را می‌خواهیم:

$$2x^2-3x-6=0 \xrightarrow{x=\alpha} 2\alpha^2-3\alpha=6$$

۲) در معادلهٔ $x^2-6x+1=0$، حاصل $(\alpha+\frac{1}{\alpha})^2$ را می‌خواهیم:

$$x^2-6x+1=0 \xrightarrow{x=\alpha} \alpha^2+1=6\alpha \xrightarrow{\div\alpha} \alpha+\frac{1}{\alpha}=6 \xrightarrow{\text{توان ۲}} (\alpha+\frac{1}{\alpha})^2=36$$

www.mapedu.ir

پاسخ تشریحی α ریشهٔ معادلهٔ $x^2+x-1=0$ است، پس در آن صدق می‌کند: $\alpha^2+\alpha-1=0 \xrightarrow[\alpha\neq 0]{\div\alpha} \alpha+1=\frac{1}{\alpha}$

برای β هم مشابه بالا داریم: $\beta+1=\frac{1}{\beta} \quad (\beta\neq 0)$

پس عبارت $\frac{1}{(\alpha+1)^3}+\frac{1}{(\beta+1)^3}$، ظاهر بهتری پیدا می‌کند: $\frac{1}{(\frac{1}{\alpha})^3}+\frac{1}{(\frac{1}{\beta})^3}=\alpha^3+\beta^3$

در واقع ما مجموع مکعبات ریشه‌های معادلهٔ $x^2+x-1=0$ را می‌خواهیم: $S=\frac{-b}{a}=-1, P=\frac{c}{a}=-1$

$$\Rightarrow \alpha^3+\beta^3=S^3-3PS=(-1)^3-3(-1)(-1)=-1-3=-4$$

تست و پاسخ ۴

اگر α ریشهٔ بزرگ‌تر و β ریشهٔ کوچک‌تر معادلهٔ $x(x-2)=6$ باشد، حاصل $\alpha\sqrt{\beta+3}$ کدام است؟

۱) $2\sqrt{3}$ ۲) $-2\sqrt{3}$ ۳) $3\sqrt{2}$ ۴) $-3\sqrt{2}$

پاسخ: گزینه ۳

مشاوره **اگر در سؤالات معادلهٔ درجه‌دوم، عبارتی که سؤال دنبالش است نسبت به ریشه‌ها متقارن نبود، از جای‌گذاری ریشه‌ها در معادله باید استفاده کنیم.**

خودت حل کنی بهتره در معادلهٔ $x^2-2x-6=0$، **می‌توانیم** $2x+6$ را تنها **کنیم**. بعد دو طرف را تقسیم بر ۲ کنیم و ... .

پاسخ تشریحی **راه اول:** معادله را به صورت استاندارد می‌نویسیم: $x(x-2)=6 \Rightarrow x^2-2x-6=0$

از آن‌جایی که $P=\frac{c}{a}=-6$ می‌شود، پس یک ریشه مثبت و یک ریشه منفی است. چون β ریشهٔ کوچک‌تر است، پس: $\beta<0<\alpha$

$\beta<0$ ریشهٔ معادله است، پس در آن صدق می‌کند: $\beta^2-2\beta-6=0$

چقدر شبیه $\beta+3$ است!

با توجه به تساوی داده‌شده، می‌توانیم $\beta+3$ را برحسب β^2 بنویسیم: $\beta^2=2\beta+6 \xrightarrow{\div 2} \beta+3=\frac{\beta^2}{2}$

حالا جذر هم می‌گیریم: $\sqrt{\beta+3}=\frac{|\beta|}{\sqrt{2}} \xrightarrow{\beta<0} \sqrt{\beta+3}=\frac{-\beta}{\sqrt{2}}$

پس ظاهر عبارت $\alpha\sqrt{\beta+3}$، به شکلی که می‌پسندیم درمی‌آید: $\alpha\sqrt{\beta+3}=\alpha.\frac{-\beta}{\sqrt{2}}=\frac{-\alpha\beta}{\sqrt{2}}=\frac{-P}{\sqrt{2}}=\frac{-(-6)}{\sqrt{2}}=\frac{6}{\sqrt{2}}\times\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}}=3\sqrt{2}$

تذکر همان جایی که فهمیدیم $\alpha>0$ و $\beta<0$، می‌توانستیم بگوییم حاصل عبارت $\alpha\sqrt{\beta+3}$ مثبت است و گزینه‌های (۲) و (۴) را رد می‌کردیم.

راه دوم: معادلهٔ $x^2-2x-6=0$ را به روش مربع کامل حل می‌کنیم:

$$x^2-2x=6 \xrightarrow{+1} x^2-2x+1=7 \Rightarrow (x-1)^2=7 \Rightarrow x-1=\pm\sqrt{7} \Rightarrow x=1\pm\sqrt{7}$$

چون $\alpha>\beta$، پس: $\begin{cases}\alpha=1+\sqrt{7}\\ \beta=1-\sqrt{7}\end{cases}$

دو مقدار به دست آمده را در $\alpha\sqrt{\beta+3}$ قرار می‌دهیم: $(1+\sqrt{7})\sqrt{1-\sqrt{7}+3}=(1+\sqrt{7})\sqrt{4-\sqrt{7}}$

عبارت بالا را برابر با t قرار می‌دهیم و t^2 را حساب می‌کنیم:

$$t^2=(1+\sqrt{7})^2(4-\sqrt{7})\Rightarrow t^2=\underbrace{(8+2\sqrt{7})}_{2(4+\sqrt{7})}(4-\sqrt{7})\Rightarrow t^2=2(16-7)\Rightarrow t^2=18\xrightarrow{t>0}t=\sqrt{18}=3\sqrt{2}$$

راه سوم: عبارت $\alpha\sqrt{\beta+3}$ را به توان ۲ برسانیم: $\alpha^2(\beta+3)$

$x=\alpha$ ریشهٔ معادلهٔ $x^2-2x-6=0$ است، پس: $\alpha^2-2\alpha-6=0 \Rightarrow \alpha^2=2\alpha+6$

باجای‌گذاری $2\alpha+6$ به‌جای α^2، داریم: $\underbrace{\alpha^2}_{2\alpha+6}(\beta+3)=2(\alpha+3)(\beta+3)=2(\alpha\beta+3\alpha+3\beta+9)=2(P+3S+9)=2(\cancel{-6}+\cancel{3(2)}+9)=18$

حالا باید جذر بگیریم که می‌شود $\sqrt{18}$ یا $3\sqrt{2}$.

www.mapedu.ir

تست و پاسخ ۵

از معادلهٔ $x^2+m=\sqrt{m^2x^2}+1$، دو جواب برای x به دست می‌آید. در مجموعهٔ مقادیر قابل قبول برای m، چند عدد طبیعی وجود دارد؟

۱) ۱ ۲) ۲ ۳) بی‌شمار ۴) صفر

پاسخ: گزینه ۱

مشاوره سؤال سختی است. باید قواعد مربوط به تعداد جواب‌های معادلات $ax^4+bx^2+c=0$، $a|x|^3+b|x|+c=0$ و $ax+b\sqrt{x}+c=0$ را بلد باشید.

خودت حل کنی بهتره جای x^2 بنویسید $|x|^2$ و جای $|x|$، t قرار دهید و روی علامت ریشه‌ها بحث کنید.

نکات معادلهٔ $a|x|^2+b|x|+c=0$ با یک تغییر متغیر ساده ($|x|=t$) به معادلهٔ درجه‌دوم تبدیل می‌شود: $at^2+bt+c=0$

از آن‌جایی که $|x|\geq 0$ است، پس فقط جواب‌های $t\geq 0$ به دردمان می‌خورند.

۱) به ازای هر $t>0$، معادلهٔ اصلی دو جواب $x=\pm t$ می‌دهد. ۲) به ازای هر $t=0$، معادلهٔ اصلی فقط جواب $x=0$ می‌دهد.

۳) به ازای هر $t<0$، معادلهٔ اصلی جواب حقیقی ندارد.

نکته چندتا از ویژگی‌های قدرمطلق را ببینید: $\sqrt{u^2}=|u|$ $\quad a^2=|a|^2$ $\quad |ab|=|a||b|$

پاسخ تشریحی معادله را ساده می‌کنیم:

$$x^2+m=\underbrace{\sqrt{m^2x^2}}_{|mx|}+1 \Rightarrow x^2+m=|m||x|+1$$

جای x^2 می‌نویسیم $|x|^2$:

$$|x|^2+m=|m||x|+1 \Rightarrow |x|^2-|m||x|+m-1=0$$

با تغییر متغیر $|x|=t$، معادله به شکل $t^2-|m|t+m-1=0$ درمی‌آید.

برای آن‌که معادلهٔ اولیه، دو ریشهٔ متمایز داشته باشد، باید معادلهٔ $t^2\underbrace{-|m|}_{b}t+\underbrace{m-1}_{c}=0$، یکی از دو حالت زیر را داشته باشد:

۱) یک ریشهٔ مثبت و یک ریشهٔ منفی داشته باشد؛ یعنی ضرب ریشه‌ها باید منفی باشد: $P<0 \Rightarrow \frac{c}{a}<0 \Rightarrow m-1<0 \Rightarrow m<1$

توجه دارید که در این حالت، حتماً شرط $\Delta>0$ برقرار است و نیاز به بررسی آن نیست.

۲) یک ریشهٔ مضاعف مثبت داشته باشد؛ یعنی باید $\Delta=0$ و $x=\frac{-b}{2a}>0$ باشد:

$$\left.\begin{array}{l}\Delta=0 \Rightarrow (-|m|)^2-4(1)(m-1)=0 \Rightarrow m^2-4m+4=0 \Rightarrow (m-2)^2=0 \Rightarrow m=2\\ x_{\text{مضاعف}}>0 \Rightarrow \frac{-b}{2a}>0 \Rightarrow \frac{|m|}{2}>0 \Rightarrow m\neq 0\end{array}\right\} \xrightarrow{\text{اشتراک}} m=2$$

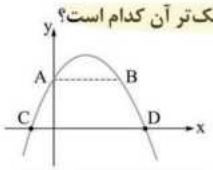
اجتماع جواب‌های دو حالت بالا را حساب می‌کنیم:

$$(m<1)\cup(m=2)=(-\infty,1)\cup\{2\}$$

پس m فقط یک مقدار طبیعی یعنی $m=2$ را می‌تواند بگیرد.

تست و پاسخ ۶

در سهمی شکل زیر CD با AB موازی و طول CD دو برابر طول AB است. نسبت صفر بزرگ‌تر سهمی به صفر کوچک‌تر آن کدام است؟



حاصل $\frac{x_D}{x_C}$ چه‌قدر است؟

۱) -2 ۲) $-2/5$ ۳) -3 ۴) $-3/5$

پاسخ: گزینه ۳

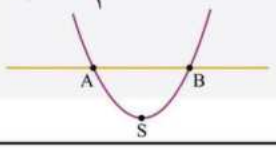
مشاوره سؤال مفهومی و کم‌محاسبه‌ای است. باید تقارن سهمی را درک کرده باشید تا راحت حلش کنید.

خودت حل کنی بهتره نقطهٔ وسطِ هر دو نقطه با عرض یکسان روی سهمی، روی محور تقارن آن قرار دارد.

نکات ۱) به «طول نقاط برخورد تابع $f(x)$ با محور xها» یا «ریشه‌های معادلهٔ $f(x)=0$»، صفرهای تابع f می‌گویند.

۲) میانگین صفرهای سهمی، طول رأس سهمی می‌شود: $x_S=\frac{x_1+x_2}{2}$

۳) در سهمی هر دو نقطه‌ای که yهای یکسانی دارند، میانگین xهایشان، طول رأس را به ما می‌دهد: $x_S=\frac{x_A+x_B}{2}$



www.mapedu.ir

پاسخ تشریحی **گام اول:** فرض می‌کنیم x_1 و x_2 صفرهای سهمی هستند؛ یعنی $x_C = x_1$ و $x_D = x_2$.

گام دوم: میانگین طول نقاط C و D با میانگین طول نقاط A و B برابر است:

$$\frac{x_C + x_D}{2} = \frac{x_A + x_B}{2} \Rightarrow \frac{x_1 + x_2}{2} = \frac{0 + x_B}{2} \Rightarrow x_B = x_1 + x_2$$

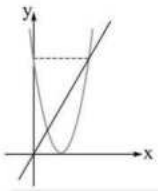
گام سوم: طول پاره‌خط CD، ۲ برابر طول پاره‌خط AB است، پس:

$$\overline{CD} = 2\overline{AB} \Rightarrow x_D - x_C = 2(x_B - x_A) \Rightarrow x_2 - x_1 = 2(x_1 + x_2 - 0) \Rightarrow x_2 - x_1 = 2x_1 + 2x_2 \Rightarrow -3x_1 = x_2$$

نسبت x_2 به x_1 برابر است با:

$$\frac{x_2}{x_1} = \frac{-3x_1}{x_1} = -3$$

تست و پاسخ ۷



در شکل مقابل، نمودار سهمی $y = ax^2 + bx + c$ و خط $y = 2x$ رسم شده‌اند. مقدار b کدام است؟

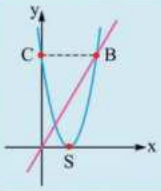
۱) -16 ۲) -9

۳) -12 ۴) -8

پاسخ: گزینه ۴

مشاوره باید روش‌های سریع نوشتن معادلهٔ سهمی در حالت‌های خاص را بلد باشید و حواستان به تقارن سهمی و ویژگی‌هایش باشد.

خودت حل کنی بهتره میانگین طول نقاط A و B، طول رأس را می‌دهد. ضمناً سهمی بر محور xها مماس است.



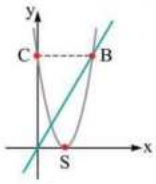
نکته در چند حالت باید بتوانیم معادلهٔ سهمی را سریع‌تر بنویسیم:

الف) وقتی دو ریشهٔ آن یعنی α و β را داریم: $y = a(x-\alpha)(x-\beta)$

ب) وقتی مختصات رأس آن یعنی $S(x_S, y_S)$ را داریم: $y = a(x-x_S)^2 + y_S$

پ) وقتی سهمی در $x = \alpha$ بر محور xها مماس است (در واقع نقطهٔ $(\alpha, 0)$ رأس سهمی است): $y = a(x-\alpha)^2$

پاسخ تشریحی **گام اول:** نقاط مهم روی شکل را نام‌گذاری می‌کنیم:



مختصات نقطهٔ C به صورت $(0, c)$ است.

گام دوم: نقطهٔ B روی خط $y = 2x$ است، پس مختصاتش به صورت $B(\alpha, 2\alpha)$ است. از طرفی B و C، عرض‌هایشان برابر است، پس:

$$y_B = y_C \Rightarrow 2\alpha = c \Rightarrow \alpha = \frac{c}{2}$$

تا این‌جا مختصات B و C را برحسب c داریم:

$$B(\frac{c}{2}, c), C(0, c)$$

گام سوم: طول نقطهٔ S از میانگین طول B و C به دست می‌آید:

$$x_S = \frac{\frac{c}{2} + 0}{2} = \frac{c}{4}$$

گام چهارم: نقطهٔ $S(\frac{c}{4}, 0)$ رأس سهمی است، پس معادلهٔ آن به صورت زیر است:

$$y = a(x - x_S)^2 + y_S \Rightarrow y = a(x - \frac{c}{4})^2 + 0 \Rightarrow y = a(x^2 - \frac{c}{2}x + \frac{c^2}{16}) \Rightarrow y = ax^2 - \frac{ac}{2}x + \frac{ac^2}{16}$$

گام پنجم: ضرایب معادلهٔ به دست آمده را با ضرایب $y = ax^2 + bx + c$ برابر قرار می‌دهیم:

$$ax^2 - \frac{ac}{2}x + \frac{ac^2}{16} = ax^2 + bx + c \Rightarrow \begin{cases} \frac{-ac}{2} = b \\ \frac{ac^2}{16} = c \xrightarrow{c \neq 0} \frac{ac}{16} = 1 \Rightarrow ac = 16 \end{cases}$$

پس:

$$\frac{-ac}{2} = b \Rightarrow \frac{-16}{2} = b \Rightarrow b = -8$$

www.mapedu.ir

تست و پاسخ ۸

یعنی k همان عرض رأس سهمی است.

خط $y=k$ بر نمودار سهمی $y=x^2+mx+m$ مماس است. ..... مقدار k برابر با ..... است.

۱) کم‌ترین ـ یک ۲) بیشترین ـ یک ۳) کم‌ترین ـ دو ۴) بیشترین ـ دو

پاسخ: گزینه ۲

مشاوره شبیه این سؤال در کنکور نیامده، ولی سؤال مفهومی و مهمی است. باید دوبار از max و min تابع درجه‌دوم استفاده کنید.

خودت حل کنی بهتره اگر S رأس سهمی باشد، تنها خط افقی که بر سهمی مماس می‌شود، خط $y=y_S$ است.

نکته اگر یک خط افقی بر یک سهمی مماس باشد، باید آن خط افقی از رأس سهمی عبور کند که در این صورت معادلهٔ آن به شکل $y=y_S$ یا $y=-\frac{\Delta}{4a}$ می‌باشد.

پاسخ تشریحی **راه اول:** y رأس را در سهمی $y=x^2+mx+m$ پیدا می‌کنیم:

$$y_S=-\frac{\Delta}{4a}=-\frac{(m^2-4m)}{4}=\frac{-1}{4}m^2+m$$

چون خط $y=k$ بر سهمی $y=x^2+mx+m$ مماس است، پس باید k، برابر با عرض رأس سهمی باشد:

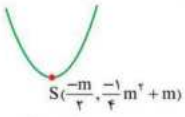
$$y_S=k \Rightarrow \frac{-\Delta}{4a}=k \Rightarrow \frac{-(m^2-4m)}{4}=k \Rightarrow -m^2+4m=4k \Rightarrow m^2-4m+4k=0$$

برای آن‌که معادلهٔ بالا جواب داشته باشد، باید دلتایش بزرگ‌تر یا مساوی صفر باشد: $\Delta\geq 0 \Rightarrow (-4)^2-4(1)(4k)\geq 0 \Rightarrow 16-16k\geq 0 \Rightarrow k\leq 1$

پس حداکثر مقدار k برابر با ۱ است.

راه دوم: مختصات رأس سهمی $y=x^2+mx+m$ را پیدا می‌کنیم:

$$\left.\begin{array}{l} x_S=\frac{-b}{2a}=\frac{-m}{2} \\ y_S=(\frac{-m}{2})^2+m(\frac{-m}{2})+m=\frac{m^2}{4}-\frac{m^2}{2}+m=\frac{-1}{4}m^2+m \end{array}\right\} \Rightarrow S(\frac{-m}{2},\frac{-1}{4}m^2+m)$$



چون ضریب x^2 مثبت بود، پس دهانهٔ سهمی $y=x^2+mx+m$ رو به بالا است و شکل تقریبی آن به صورت مقابل است:

قرار است خط افقی $y=k$ بر آن مماس شود، پس باید k، برابر با y_S باشد: $\frac{-1}{4}m^2+m=k$

عبارت $\frac{-1}{4}m^2+m$ یک عبارت درجه‌دوم برحسب m است که در آن ضریب m^2 منفی است، پس بیشترین مقدارش از رابطهٔ $\frac{-\Delta}{4a}$ به دست می‌آید:

$$\frac{-(1-0)}{4(\frac{-1}{4})}=1$$

چون k با $\frac{-1}{4}m^2+m$ برابر بود، پس بیشترین مقدار k هم برابر با ۱ است.

تست و پاسخ ۹

به جای A کدام‌یک از عبارت‌های زیر قرار بگیرد تا معادلهٔ $\frac{x+1}{2x-2}-\frac{A}{x^2-1}=\frac{x-1}{2x+2}$ جواب داشته باشد؟

۱) ۲ ۲) -2 ۳) $1+2x$ ۴) $1-2x$

پاسخ: گزینه ۴

مشاوره سؤال بسیار خوبی است! باید حواستان به تمام حالات جواب نداشتن معادلهٔ گویا باشد. از معادلهٔ گویا در کنکور تا الان سؤال این مدلی نیامده.

www.mapedu.ir

خودت حل کنی بهتره اگر بعد از حل معادلهٔ گویا به جواب $x=\alpha$ رسیدید، حتماً چک کنید که α ریشهٔ مخرج کسرها نباشد.

نکته هر معادلهٔ گویا را بعد از یک سری ساده‌سازی‌ها می‌توانیم به شکل یک معادلهٔ چندجمله‌ای درآوریم. برای آن‌که معادلهٔ گویای اولیهٔ ما جواب نداشته باشد، باید یکی از حالت‌های زیر رخ دهد:

۱) معادلهٔ آخر ما جواب نداشته باشد (مثلاً اگر درجه‌دوم است، دلتایش منفی باشد).

۲) جواب‌های معادلهٔ نهایی ما، ریشه(های) مخرج معادلهٔ اولیه باشند که قابل قبول نیستند.

پاسخ تشریحی مخرج‌ها را تجزیه می‌کنیم:

$$\frac{x+1}{2x-2}-\frac{A}{x^2-1}=\frac{x-1}{2x+2} \Rightarrow \frac{x+1}{2(x-1)}-\frac{A}{(x-1)(x+1)}=\frac{x-1}{2(x+1)}$$

دو طرف را در $2(x-1)(x+1)$ ضرب می‌کنیم. فقط باید حواسمان به شرط $x\neq\pm1$ باشد:

$$\frac{x+1}{2(x-1)}-\frac{A}{(x-1)(x+1)}=\frac{x-1}{2(x+1)} \xrightarrow{\times 2(x-1)(x+1)} (x+1)^2-2A=(x-1)^2 \Rightarrow 2A=(x+1)^2-(x-1)^2$$

$$\Rightarrow 2A=x^2+2x+1-x^2+2x-1 \Rightarrow 2A=4x \Rightarrow A=2x$$

الان باید گزینه‌ها را جای A قرار دهیم. هر کدام که جوابی به غیر از $x=1$ و $x=-1$ داد، قبول است:

۱) $A=2x \xrightarrow{A=2} 2=2x \Rightarrow x=1$ ✗

۲) $A=2x \xrightarrow{A=-2} -2=2x \Rightarrow x=-1$ ✗

۳) $A=2x \xrightarrow{A=1+2x} 1+\cancel{2x}=\cancel{2x} \Rightarrow 1=0$ ✗

۴) $A=2x \xrightarrow{A=1-2x} 1-2x=2x \Rightarrow x=\frac{1}{4}$ ✓

پس برای آن‌که معادله جواب داشته باشد، در بین گزینه‌ها فقط ۴ می‌تواند جای A قرار گیرد.

تست و پاسخ ۱۰

یاسمین به تنهایی کاری را در ۶۰ روز انجام می‌دهد. اگر یاسمین و کیمیا با هم آن کار را انجام دهند، ۵ روز زودتر از حالتی که کیمیا به تنهایی آن را انجام دهد، کار را تمام می‌کنند. کیمیا به تنهایی در چند روز کار را تمام می‌کند؟

۱) ۱۵ ۲) ۲۰ ۳) ۲۵ ۴) ۳۰

پاسخ: گزینه ۲

مشاوره **از مسائل معادلهٔ گویا در کنکورهای اخیر چند بار سؤال آمده است. روش حل مدل‌های مختلف این مسائل را بلد باشید (مسائل کار مشترک، مسائل سرعت، مسائل تسهیم و ...).**

خودت حل کنی بهتره زمان خواستهٔ سؤال یعنی کیمیا را x بگیرید و از رابطهٔ مسائل کار مشترک استفاده کنید.

نکته اگر شخص اول، کاری را در A روز (ساعت)، شخص دوم همان کار را در B روز (ساعت) و هر دو با هم در C روز (ساعت) انجام دهند، رابطهٔ روبه‌رو برقرار است:

$$\frac{1}{\text{زمان هر دو شخص با هم}}=\frac{1}{\text{زمان شخص دوم}}+\frac{1}{\text{زمان شخص اول}} \quad \text{یا} \quad \frac{1}{A}+\frac{1}{B}=\frac{1}{C}$$

تجربه در این سؤال‌ها بهتر است خواستهٔ سؤال را x در نظر بگیرید که در صورت لزوم بتوانید از گزینه‌ها استفاده کنید!

پاسخ تشریحی **گام اول:** خواستهٔ سؤال یعنی مدت زمان کیمیا را x می‌گیریم.

یاسمین به تنهایی کار را در ۶۰ روز انجام می‌دهد؛ یاسمین و کیمیا و هر دو با هم ۵ روز کم‌تر از x روز یعنی $x-5$ روز کار را تمام می‌کنند.

گام دوم: معادله را می‌نویسیم:

$$\frac{1}{\text{زمان کیمیا}}+\frac{1}{\text{زمان یاسمین}}=\frac{1}{\text{زمان کیمیا و یاسمین}} \Rightarrow \frac{1}{x}+\frac{1}{60}=\frac{1}{x-5}$$

دو طرف را در $60x(x-5)$ ضرب می‌کنیم:

$$60(x-5)+x(x-5)=60x \Rightarrow x^2-5x-300=0 \xrightarrow{\text{جمله‌مشترک}} (x-20)(x+15)=0 \xrightarrow{x>0} x=20$$

تذکر اگر بعد از رسیدن به معادلهٔ $x^2-5x-300=0$ نتوانستید آن را تجزیه کنید، آن را به شکل $x(x-5)=300$ بنویسید و از گزینه‌ها کمک بگیرید (برای همین گفتیم خواستهٔ سؤال را x بگیرید).

www.mapedu.ir

مجموع عددی با دو برابر جذرش برابر با ۵/۲۵ است. اختلاف این عدد با جذرش کدام است؟

۱) ۱ ۲) ۱/۲۵ ۳) ۰/۵ ۴) ۰/۷۵

پاسخ: گزینه ۴

مشاوره معمولاً معادلهٔ گنگ به طور مستقیم یا غیرمستقیم در کنکور می‌آید. روش حل مدل‌های مختلف آن را بلد باشید. البته بعضی وقت‌ها هم نیاز به حل ندارند مثل:

$$\underbrace{\sqrt{x-2}+\sqrt{1-x}}_{\text{دامنه تهی می‌شه.}}=x \quad \text{یا} \quad \underbrace{\sqrt{x^2+1}+\sqrt{x^2+2}}_{\substack{\text{چون این ور حداقل می‌شه}\\ \sqrt{2}+1 \text{ و اون ور } \sqrt{3} \text{ هستا}}}=\sqrt{3}$$

خودت حل کنی بهتره بعضی از معادله‌های به شکل $x+b\sqrt{x}+c=0$ را می‌توان با تجزیه هم حل کرد.

پاسخ تشریحی عدد مورد نظر را x می‌گیریم.

مجموع این عدد (یعنی x) با دو برابر جذرش (یعنی $2\sqrt{x}$) برابر با ۵/۲۵ شده:

$$x+2\sqrt{x}=5/25$$

از این‌جا به بعد با حل یک معادلهٔ گنگ روبه‌رو هستیم. با ۳ روش آن را حل می‌کنیم:

راه اول: دو طرف تساوی را در ۴ ضرب می‌کنیم و با اتحاد جمله‌مشترک آن را تجزیه می‌کنیم:

$$x+2\sqrt{x}=5/25 \xrightarrow{\times 4} 4x+8\sqrt{x}-21=0 \Rightarrow (2\sqrt{x})^2+4(2\sqrt{x})-21=0 \xrightarrow[\text{و ضربش } -21 \text{ بوده}]{\text{دوتا عدد که جمعش } +4} (2\sqrt{x}+7)(2\sqrt{x}-3)=0$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \sqrt{x}=\frac{-7}{2} & \times \\ \sqrt{x}=\frac{3}{2} \Rightarrow x=\frac{9}{4} & \checkmark \end{cases}$$

اختلاف عدد $\frac{9}{4}$ با جذرش برابر است با:

$$\frac{9}{4}-\sqrt{\frac{9}{4}}=\frac{9}{4}-\frac{3}{2}=\frac{9-6}{4}=\frac{3}{4}=0/75$$

راه دوم: معادلهٔ $x+2\sqrt{x}-5/25=0$ را با دلتا حل می‌کنیم:

$$\Delta=2^2-4(1)(-5/25)=4+21=25$$

$$\sqrt{x}=\frac{-2\pm 5}{2} \Rightarrow \begin{cases} \sqrt{x}=\frac{-7}{2} & \times \\ \sqrt{x}=\frac{3}{2} \Rightarrow x=\frac{9}{4} \end{cases}$$

بقیهٔ حل مثل راه اول است.

راه سوم: راه اول و دوم، راه‌های خوبی بودند ولی راه سوم که خیلی‌ها سراغش می‌روند، تنهاکردن عبارت رادیکالی و به توان رساندن طرفین است که این‌جا شما را به چاه می‌برد!

$$x+2\sqrt{x}=5/25 \Rightarrow 2\sqrt{x}=\frac{21}{4}-x \xrightarrow{\text{توان ۲}} 4x=\frac{441}{16}-\frac{21}{2}x+x^2 \Rightarrow x^2-\frac{29}{2}x+\frac{441}{16}=0$$

استفاده از اتحاد جمله‌مشترک در این‌جا کمی سخت است! پس دلتا می‌نویسیم:

$$\Delta=\frac{841}{4}-\frac{441}{4}=\frac{400}{4}=100$$

ریشه‌ها برابر است با:

$$x=\frac{\frac{29}{2}\pm 10}{2} \Rightarrow \begin{cases} x_1=\frac{49}{4} \\ x_2=\frac{9}{4} \end{cases}$$

الان باید جواب‌ها را چک کنیم. به ازای $x_1=\frac{49}{4}$، تساوی $x+2\sqrt{x}=5/25$ برقرار نیست، ولی به ازای $x_2=\frac{9}{4}$ برقرار است. پس فقط $x_2=\frac{9}{4}$ جواب است. بقیهٔ حل مثل راه اول است.

تذکر در حل معادلات گنگ، اگر در مرحله‌ای، دو طرف را به توان رساندید، **باید** جواب‌های به دست آمده را در معادلهٔ اولیه (یا در هر مرحله‌ای قبل از مرحلهٔ به توان رساندن) چک کنید.

www.mapedu.ir

تست و پاسخ ۱۲

اگر $x = ۳$ یکی از جواب‌های معادلهٔ $\sqrt{۷+x-x^۲} = x+a$ باشد، جواب دیگر آن کدام است؟

۱) جواب دیگری ندارد. ۲) $x = ۲$ ۳) $x = -۲$ ۴) $x = -۰/۵$

پاسخ: گزینه ۱

خودت حل کنی بهتره جواب‌های به دست آمده از معادلهٔ گنگ را در معادلهٔ اولیه باید چک کرد.

تذکر در حل معادلات گنگ، اگر در مرحله‌ای، دو طرف را به توان رساندید، **باید** جواب‌های به دست آمده را در معادلهٔ اولیه (یا در هر مرحله‌ای قبل از مرحلهٔ به توان رساندن) چک کنید.

پاسخ تشریحی جواب معادله در خود معادله صدق می‌کند، پس $x = ۳$ را در معادلهٔ $\sqrt{۷+x-x^۲} = x+a$ قرار می‌دهیم:

$$۱ = ۳ + a \Rightarrow a = -۲$$

با جای‌گذاری $a = -۲$، معادله به شکل $\sqrt{۷+x-x^۲} = x-۲$ درمی‌آید. عبارت رادیکالی تنها است، پس دو طرف را به توان ۲ می‌رسانیم:

$$(\sqrt{۷+x-x^۲})^۲ = (x-۲)^۲ \Rightarrow ۷+x-x^۲ = x^۲-۴x+۴ \Rightarrow ۲x^۲-۵x-۳=۰$$

یکی از جواب‌های معادلهٔ بالا $x_۱ = ۳$ است. از حاصل‌ضرب ریشه‌ها کمک می‌گیریم:

$$P = \frac{c}{a} \Rightarrow x_۱.x_۲ = \frac{-۳}{۲} \xrightarrow{x_۱=۳} ۳x_۲ = \frac{-۳}{۲} \Rightarrow x_۲ = \frac{-۱}{۲}$$

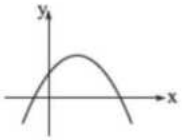
به ازای $x_۲ = \frac{-۱}{۲}$، معادله این شکلی می‌شود:

$$\underbrace{\sqrt{۷+x-x^۲}}_{\text{نامنفی}} = \underbrace{x-۲}_{-۲/۵}$$

پس $x = \frac{-۱}{۲}$، قابل قبول نیست و معادله ریشهٔ دیگری ندارد.

تست و پاسخ ۱۳

نمودار سهمی $y = ax^۲+bx+c$ داده شده است. چه تعداد از پارامترهای a، b، c و Δ مثبت هستند؟



۱) ۱ ۲) ۲

۳) ۳ ۴) ۴

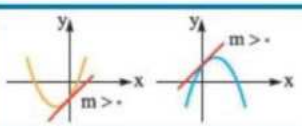
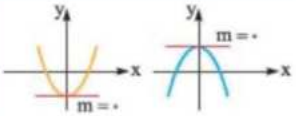
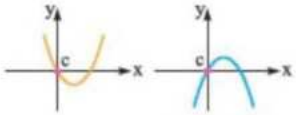
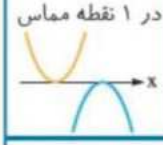
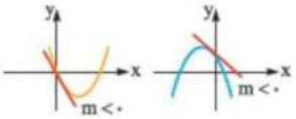
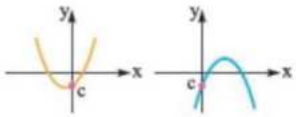
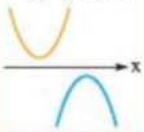
پاسخ: گزینه ۳

مشاوره کتاب درسی در چند تمرین، علامت ضرایب سهمی را می‌پرسد. باید چشمی بتوانید آن‌ها را مشخص کنید.

خودت حل کنی بهتره b علامت شیب خط مماس در نقطهٔ برخورد سهمی با محور yهاست.

www.mapedu.ir

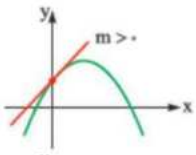
درس‌نامه تعیین علامت ضرایب a، b و c و علامت Δ از روی نمودار سهمی

	a	b	c	Δ
چه‌چوری به دست می‌آید؟ / علامت	دهانهٔ سهمی	شیب خط مماس بر سهمی در نقطهٔ برخوردش با محور yها	عرض نقطهٔ برخورد سهمی با محور yها	تعداد نقاط برخورد سهمی با محور xها
+				۲ برخورد
۰	نمی‌شه!			در ۱ نقطه مماس 
−				بدون برخورد 

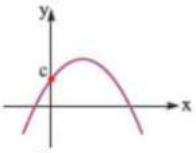
پاسخ تشریحی با توجه به نمودار، علامت هر ۴ پارامتر را تعیین می‌کنیم:

گام اول: دهانهٔ سهمی رو به پایین است؛ پس $a < ۰$.

گام دوم: در نقطهٔ برخورد سهمی با محور yها، بر سهمی خط مماس رسم می‌کنیم؛ چون شیب این خط مثبت است، پس $b > ۰$.

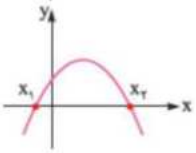


گام سوم: عرض نقطهٔ برخورد سهمی با محور yها مثبت است، پس $c > ۰$.



گام چهارم: سهمی در ۲ نقطه محور xها را قطع کرده است؛ پس $\Delta > ۰$.

پس ۳ پارامتر c، b و Δ مثبت‌اند.



تست و پاسخ ۱۴

نمودار تابع $f(x) = m(۲-x)(x-۱) + x - ۱$ بر محور xها مماس است. طول نقطهٔ تماس کدام است؟

۱) ۱ ۲) ۱− ۳) ۲ ۴) ۲−

پاسخ: گزینه ۱

مشاوره در خیلی از مسائل، ایدهٔ حل این است که معادلهٔ درجه‌دو (یا عبارت درجه‌دو) باید ریشهٔ مضاعف داشته باشد. یک لیست از این مدل سؤال‌ها بنویسید.

خودت حل کنی بهتره دلتا باید صفر باشد.

www.mapedu.ir

نکته اگر سهمی $f(x)$ بر محور xها مماس باشد، یکی از دو حالت زیر رخ می‌دهد (هر دو یک معنی می‌دهند!):

	شکل ضابطه	شرط	طول نقطهٔ تماس
۱	ax^2+bx+c	$\Delta=0$	$-\frac{b}{2a}$
۲	$a(x-x_1)(x-x_2)$	$x_1=x_2$	x_1 یا x_2

پاسخ تشریحی **گام اول**، ضابطه را مرتب می‌نویسیم:

$$f(x)=m(2-x)(x-1)+(x-1) \xrightarrow{\text{فاکتور از } x-1} f(x)=(x-1)(m(2-x)+1) \Rightarrow f(x)=(x-1)(2m-mx+1)$$

گام دوم، ریشهٔ پرانتز اول $x=1$ است، پس ریشهٔ پرانتز دوم هم باید $x=1$ باشد؛ در نتیجه طول نقطهٔ تماس $x=1$ است.

تست و پاسخ ۱۵

بزرگ‌ترین جواب معادلهٔ $(x^2+x-1)^2=x^2+x+1$ کدام است؟

۱) ۱ ۲) ۲ ۳) $\frac{\sqrt{13}-1}{2}$ ۴) $\frac{\sqrt{13}+1}{2}$

پاسخ: گزینه ۳

مشاوره **برای حل معادله‌هایی که ظاهر ترسناکی دارند، چشم‌هایتان را خوب باز کنید! اگر عبارتی در آن‌ها تکرار می‌شد، باید تغییر متغیر بدهید.**

خودت حل کنی بهتره جای x^2+x-1، t قرار دهید.

درس‌نامه **حل معادله به کمک تغییر متغیر**

معادلهٔ $(x^2-2x)^2-7(x^2-2x)-8=0$ را در نظر بگیرید. در این معادله، عبارت x^2-2x در معادله **تکرار** شده است.

برای حل معادله این گام‌ها را برمی‌داریم:

گام اول: عبارتی که تکرار شده را t می‌گیریم: $t=x^2-2x$

گام دوم: معادله را برحسب t می‌نویسیم و حل می‌کنیم:

$$t^2-7t-8=0 \xrightarrow{a+c=b} \begin{cases} t_1=-1 \\ t_2=\frac{-c}{a}=8 \end{cases}$$

گام سوم: حالا x^2-2x را برابر با ۱- و ۸ قرار می‌دهیم:

$$\begin{cases} x^2-2x=-1 \Rightarrow x^2-2x+1=0 \Rightarrow (x-1)^2=0 \Rightarrow x=1 \\ x^2-2x=8 \Rightarrow x^2-2x-8=0 \Rightarrow (x-4)(x+2)=0 \Rightarrow x=4,-2 \end{cases}$$

نکته چند مورد دیگر از معادلاتی که با تغییر متغیر حل می‌شوند را ببینید:

$$x^6-5x^3-6=0 \xrightarrow{x^3=t} t^2-5t-6=0 \Rightarrow \cdots$$

$$4^x-2^{x+1}-8=0 \Rightarrow (2^x)^2-2(2^x)-8=0 \xrightarrow{2^x=t} t^2-2t-8=0 \Rightarrow \cdots$$

$$\sin^2 x+\cos x-\frac{5}{4}=0 \xrightarrow{\sin^2 x=1-\cos^2 x} 1-\cos^2 x+\cos x-\frac{5}{4}=0 \xrightarrow{\cos x=t} t^2-t+\frac{1}{4}=0 \Rightarrow \cdots$$

پاسخ تشریحی **گام اول**، با فرض $x^2+x-1=t$، داریم:

$$x^2+x=t+1$$

گام دوم، معادله را برحسب t می‌نویسیم:

$$\underbrace{(x^2+x-1)}_{t}{}^2=\underbrace{x^2+x}_{t+1}+1 \Rightarrow t^2=t+2 \Rightarrow t^2-t-2=0$$

گام سوم، مقادیر t را به دست می‌آوریم:

$$(t-2)(t+1)=0 \Rightarrow \begin{cases} t=2 \\ t=-1 \end{cases}$$

www.mapedu.ir

گام چهارم: جای x^2+x-1، t قرار می‌دهیم:

$$x^2+x-1=2 \Rightarrow x^2+x-3=0 \xrightarrow{\Delta=13} x=\frac{-1\pm\sqrt{13}}{2}$$

$$x^2+x-1=-1 \Rightarrow x^2+x=0 \Rightarrow x(x+1)=0 \Rightarrow x=0 \quad \text{و} \quad -1$$

گام پنجم: از بین چهار جواب به دست آمده، $x=\frac{-1+\sqrt{13}}{2}$ بزرگ‌ترین جواب معادله است.

تست و پاسخ ۱۶

در تابع $f(x)=ax^2+bx+c$، اگر $f(1-x)=f(1+x)$ و نمودار تابع، خط $x-2y=3$ را روی محورهای مختصات قطع کند، آن‌گاه حاصل abc کدام است؟

۱) $0/75$ ۲) $-0/75$ ۳) $1/5$ ۴) $-1/5$

پاسخ: گزینه ۱

مشاوره **حواستان به تقارن سهمی و بازی‌هایی که با آن می‌توان راه انداخت باشد!**

خودت حل کنی بهتره در سهمی $f(x)=2(x-5)^2-4$، رابطهٔ $f(x+5)=f(-x+5)$ برقرار است.

نکته در تمام توابع درجه‌دو به معادلهٔ $f(x)=ax^2+bx+c$، به علت تقارن نسبت به محور تقارن (خط $x=\frac{-b}{2a}$)، تساوی $f(x-\frac{b}{2a})=f(-x-\frac{b}{2a})$ برقرار است.

پاسخ تشریحی **گام اول:** با توجه به تساوی $f(x+1)=f(-x+1)$، نتیجه می‌گیریم خط $x=1$ محور تقارن سهمی است؛ پس:

$$x_S=1 \Rightarrow \frac{-b}{2a}=1 \Rightarrow b=-2a$$

تا این‌جا ضابطه به شکل $f(x)=ax^2-2ax+c$ درآمد.

گام دوم: محل تقاطع خط $x-2y=3$ با محورهای مختصات را پیدا می‌کنیم:

$$x-2y=3 \xrightarrow{x=0} y=\frac{-3}{2} \xrightarrow{\text{نقطه}} A(0,\frac{-3}{2})$$

$$x-2y=3 \xrightarrow{y=0} x=3 \xrightarrow{\text{نقطه}} B(3,0)$$

گام سوم: دو نقطهٔ بالا باید روی سهمی $y=ax^2-2ax+c$ نیز باشند:

$$A(0,\frac{-3}{2})\in \text{سهمی} \Rightarrow \frac{-3}{2}=0-0+c \Rightarrow c=\frac{-3}{2}$$

$$B(3,0)\in \text{سهمی} \Rightarrow 0=9a-6a-\frac{3}{2} \Rightarrow 3a=\frac{3}{2} \Rightarrow a=\frac{1}{2} \xrightarrow{\text{بدست}} b=-2a=-1$$

گام چهارم: در نتیجه:

$$abc=\frac{1}{2}\times(-1)\times(\frac{-3}{2})=\frac{3}{4}=0/75$$

تست و پاسخ ۱۷

معادلهٔ $mx^2=(m+4)x+2$ دارای دو ریشهٔ حقیقیِ متمایز و منفی است. برای m چند مقدار صحیح وجود دارد؟

۱) ۱ ۲) ۲

۳) ۳ ۴) ۴

پاسخ: گزینه ۱

مشاوره **سؤالاتی که در مورد علامت ریشه‌ها بحث کند تا الان چند بار در کنکور آمده است. در مرورنامهٔ این آزمون، تمام حالات را بررسی کرده‌ایم.**

خودت حل کنی بهتره باید روی علامت Δ، S و P بحث کنید.

www.mapedu.ir

درس‌نامه بحث روی علامت ریشه‌ها

اگر قرار شد معادلهٔ درجه‌دومی «۲ ریشهٔ مثبت» یا «۲ ریشهٔ منفی» یا «۲ ریشهٔ ناهم‌علامت» یا «۲ ریشهٔ قرینهٔ هم» یا «۲ ریشهٔ معکوس هم» داشته باشد، باید روی علامت S، P و Δ آن بحث کنید. توجه شود که منظور ما در این‌جا از ۲ ریشه، ۲ ریشهٔ حقیقی و متمایز است.

		Δ	S	P
۱	دو ریشهٔ مثبت	+	+	+
۲	دو ریشهٔ منفی	+	−	+
۳	دو ریشهٔ ناهم‌علامت			−
۴	دو ریشهٔ قرینه		۰	−
۵	دو ریشهٔ معکوس	+		۱

نکته از آن‌جایی که اگر $P<0$ باشد، شرط $\Delta>0$ قطعاً برقرار است، در موارد (۳) و (۴)، نیازی به چک‌کردن شرط $\Delta>0$ نیست.

پاسخ تشریحی **گام اول**: معادله را استاندارد می‌نویسیم:

$$mx^2=(m+4)x+2 \Rightarrow \underbrace{m}_{a}x^2\underbrace{-(m+4)}_{b}x\underbrace{-2}_{c}=0$$

گام دوم: هر سه شرط را اعمال می‌کنیم:

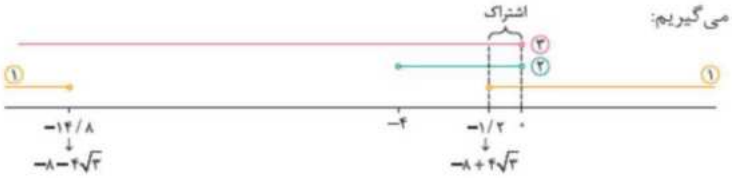
$$1)\ \Delta>0 \Rightarrow (m+4)^2-4(m)(-2)>0 \Rightarrow m^2+16m+16>0 \xrightarrow{+48} m^2+16m+64>48$$

$$\Rightarrow (m+8)^2>48 \xrightarrow{\text{جذر}} |m+8|>4\sqrt{3} \Rightarrow \begin{cases} m+8>4\sqrt{3} \\ \text{یا} \\ m+8<-4\sqrt{3} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} m>-8+4\sqrt{3}=4\underbrace{(\sqrt{3}-2)}_{\simeq -0/2}\simeq -1/2 \\ \text{یا} \\ m<-8-4\sqrt{3}=-4\underbrace{(\sqrt{3}+2)}_{\simeq 3/7}\simeq -14/8 \end{cases}$$

$$2)\ S<0 \Rightarrow \frac{-b}{a}<0 \Rightarrow \frac{m+4}{m}<0 \xrightarrow{\text{بین ریشه‌ها}} -4<m<0$$

$$3)\ P>0 \Rightarrow \frac{c}{a}>0 \Rightarrow \frac{-2}{m}>0 \Rightarrow m<0$$

گام سوم: بین محدوده‌های به دست آمده، اشتراک می‌گیریم:



گام چهارم: جواب بازهٔ $(\overbrace{-8+4\sqrt{3}}^{\simeq -1/2},0)$ شد که شامل یک عدد صحیح است: $\{-1\}$

تست و پاسخ ۱۸

معادلهٔ $(x^2+nx+5)(x^2+6x+n)=0$ به ازای عدد طبیعی n، چهار ریشهٔ گنگ متمایز دارد. حاصل‌ضرب این چهار ریشه کدام است؟

۱) ۲۵ ۲) ۳۰

۳) ۴۰ ۴) ۳۵

پاسخ: گزینه ۴

خودت حل کنی بهتره باید دلتای هر دو معادله مثبت باشد. بعد بین محدوده‌های به دست آمده برای n، اشتراک بگیرید.

www.mapedu.ir

درس‌نامه

۱) در معادلهٔ درجه‌دو با توجه به علامت دلتا، تعداد ریشه‌ها را تعیین می‌کنیم:

$\Delta > 0$	$\Delta = 0$	$\Delta < 0$
دو ریشهٔ متمایز	یک ریشهٔ مضاعف $x_{\text{مضاعف}} = \frac{-b}{2a}$	ریشهٔ حقیقی ندارد.

۲) در معادلهٔ $ax^2 + bx + c = 0$، با شرط $\Delta > 0$ داریم:

اختلاف ریشه‌ها	ضرب ریشه‌ها	جمع ریشه‌ها
$M = \frac{\sqrt{\Delta}}{\lvert a \rvert}$	$P = \frac{c}{a}$	$S = \frac{-b}{a}$

پاسخ تشریحی **گام اول**، وقتی حاصل‌ضرب دو پرانتز صفر باشد، هر کدام می‌توانند صفر باشند:

$$\begin{cases} x^2 + nx + 5 = 0 \\ x^2 + 6x + n = 0 \end{cases}$$

گام دوم، برای این‌که چهار جواب داشته باشیم، باید هر معادله دو جواب داشته باشد؛ پس دلتای هر دو معادلهٔ بالا باید مثبت باشد:

$$\left.\begin{array}{l} \Delta_1 > 0 \Rightarrow n^2 - 20 > 0 \Rightarrow n^2 > 20 \xrightarrow{n \in \mathbb{N}} n > \sqrt{20} \\ \Delta_2 > 0 \Rightarrow 36 - 4n > 0 \Rightarrow n < 9 \end{array}\right\} \xrightarrow{\text{اشتراک}} \underbrace{\sqrt{20}}_{4/\ldots} < n < 9 \xrightarrow{n \in \mathbb{N}} n = 5, 6, 7, 8$$

گام سوم، به ازای هر چهار مقدار به دست آمده برای n، جواب‌های دو معادلهٔ $\underbrace{x^2 + nx + 5 = 0}_{\text{معادلهٔ اول}}$ و $\underbrace{x^2 + 6x + n = 0}_{\text{معادلهٔ دوم}}$ را چک می‌کنیم. اگر یک جواب گویا هم بدهند، آن حالت رد می‌شود:

$$n = 5 \xrightarrow{\text{معادلهٔ دوم}} x^2 + 6x + 5 = 0 \xrightarrow{a+c=b} x_1 = -1, x = -5 \ \times$$

$$n = 6 \xrightarrow{\text{معادلهٔ اول}} x^2 + 6x + 5 = 0 \xrightarrow{a+c=b} x_1 = -1, x = -5 \ \times$$

$$n = 7 \Rightarrow \begin{cases} x^2 + 7x + 5 = 0 \Rightarrow \Delta = 29 \Rightarrow \text{دو ریشهٔ گنگ} \\ x^2 + 6x + 7 = 0 \Rightarrow \Delta = 8 \Rightarrow \text{دو ریشهٔ گنگ} \end{cases} \Rightarrow \text{چهار ریشهٔ گنگ} \ \checkmark$$

$$n = 8 \xrightarrow{\text{معادلهٔ دوم}} x^2 + 6x + 8 = 0 \Rightarrow (x+2)(x+4) = 0 \Rightarrow x_1 = -2, x_2 = -4 \times$$

پس فقط $n = 7$ قبول است.

گام چهارم، حاصل‌ضرب ریشه‌های دو معادلهٔ $x^2 + 7x + 5 = 0$ و $x^2 + 6x + 7 = 0$ به ترتیب $P_1 = \frac{c_1}{a_1} = 5$ و $P_2 = 7$ و حاصل‌ضرب هر چهار ریشه برابر با $P_1P_2 = 5 \times 7 = 35$ است.

تست و پاسخ ۱۹

به ازای چند مقدار صحیح و یک‌رقمی m، سهمی به معادلهٔ $y = 2x^2 - (m+3)x + 2m$ فقط از ناحیهٔ سوم نمی‌گذرد؟

۱) ۱
۲) ۲
۳) ۳
۴) صفر

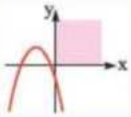
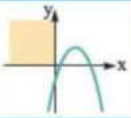
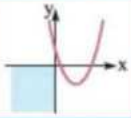
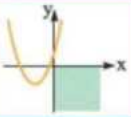
پاسخ: گزینه ۱

مشاوره **در این مدل سؤالات دقت کنید که چی از شما پرسیده می‌شود: «فقط از ناحیهٔ سوم عبور نکند.» یا «از ناحیهٔ سوم عبور نکند.»**

خودت حل کنی بهتره باید روی علامت a، b، c و Δ بحث کنید.

www.mapedu.ir

نکته سهمی در چهار حالت می‌تواند دقیقاً از یک ناحیه عبور نکند:

		شکل	شرایط			
			a	b	c	Δ
۱	فقط از ناحیهٔ ۱ نگذرد.		−	−	صفر یا −	+
۲	فقط از ناحیهٔ ۲ نگذرد.		−	+	صفر یا −	+
۳	فقط از ناحیهٔ ۳ نگذرد.		+	−	صفر یا +	+
۴	فقط از ناحیهٔ ۴ نگذرد.		+	+	صفر یا +	+

پاسخ تشریحی **گام اول:** برای آن‌که سهمی $y=\underbrace{2}_{a}x^2\underbrace{-(m+3)}_{b}x+\underbrace{2m}_{c}$ فقط از ناحیهٔ سوم عبور نکند، باید ۴ شرط داشته باشد:

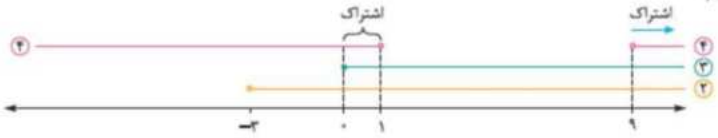
۱) $a>0 \Rightarrow 2>0$ ✓

۲) $b<0 \Rightarrow -(m+3)<0 \Rightarrow m+3>0 \Rightarrow m>-3$

۳) $c\geq 0 \Rightarrow 2m\geq 0 \Rightarrow m\geq 0$

۴) $\Delta>0 \Rightarrow (m+3)^2-4(2)(2m)>0 \Rightarrow m^2-10m+9>0 \Rightarrow (m-1)(m-9)>0 \xrightarrow{\text{نابین ریشه‌ها}} m>9$ یا $m<1$

گام دوم: بین ۳ محدودهٔ به دست آمده اشتراک می‌گیریم:



$[0,1)\cup(9,+\infty)$

گام سوم: این محدوده فقط شامل یک عدد صحیح یک‌رقمی است: $\{0\}$

تست و پاسخ ۲۰

یکی از ریشه‌های معادلهٔ $(x-1)^2+a(x-3)-4=0$، دو برابر ریشهٔ دیگر آن است. مجموع مقادیر قابل قبول برای a کدام است؟

۱) $-9/5$ ۲) $9/5$ ۳) $-4/5$ ۴) $4/5$

پاسخ: گزینه ۱

مشاوره **سؤالات این‌مدلی در کنکورهای قبل ۹۸ زیاد داشته‌ایم. با توجه به کتاب درسی، هم‌چنان امکان طرحشان وجود دارد.**

خودت حل کنی بهتره ریشه‌های اولیه را α و 2α بگیرید که جمع و ضربشان 3α و $2\alpha^2$ می‌شود. این دو مقدار را با S و P برابر قرار دهید.

نکته در معادلهٔ درجه‌دوم $ax^2+bx+c=0$ با شرط $\Delta>0$، داریم:

اختلاف ریشه‌ها	ضرب ریشه‌ها	جمع ریشه‌ها
$M=\frac{\sqrt{\Delta}}{\lvert a\rvert}$	$P=\frac{c}{a}$	$S=\frac{-b}{a}$

www.mapedu.ir

پاسخ تشریحی **راه اول:**

گام اول: معادله را استاندارد می‌نویسیم:

$$(x-1)^2+a(x-3)-4=0 \Rightarrow x^2-2x+1+ax-3a-4=0 \Rightarrow \underset{A}{1}x^2+\underbrace{(a-2)}_{B}x+\underbrace{(-3a-3)}_{C}=0$$

گام دوم: S و P معادلهٔ بالا را حساب می‌کنیم:

$$S=\frac{-B}{A}=-a+2 \qquad P=\frac{C}{A}=-3a-3$$

گام سوم: چون یکی از ریشه‌ها ۲ برابر دیگری است، پس ریشه‌های معادله را α و 2α می‌گیریم.

مجموع α و 2α همان S می‌شود:

$$S=\alpha+2\alpha \Rightarrow -a+2=3\alpha \quad (1)$$

ضرب α و 2α همان P می‌شود:

$$P=\alpha.2\alpha \Rightarrow -3a-3=2\alpha^2 \quad (2)$$

گام چهارم: از رابطهٔ (۱)، α^2 را حساب می‌کنیم:

$$-a+2=3\alpha \Rightarrow \frac{-a+2}{3}=\alpha \Rightarrow \alpha^2=\frac{(a-2)^2}{9}$$

از رابطهٔ (۲)، α^2 را تنها می‌کنیم:

$$-3a-3=2\alpha^2 \Rightarrow \alpha^2=\frac{-3a-3}{2}$$

گام پنجم: دو مقدار به دست آمده برای α^2 را برابر قرار می‌دهیم:

$$\frac{(a-2)^2}{9}=\frac{-3a-3}{2} \Rightarrow \frac{a^2-4a+4}{9}=\frac{-3a-3}{2} \Rightarrow 2a^2-8a+8=-27a-27 \Rightarrow 2a^2+19a+35=0 \quad (\Delta=361-280=81)$$

گام ششم: دلتای معادلهٔ بالا مثبت است، پس دو مقدار حقیقی برای a وجود دارد. مجموع مقادیر a برابر با S معادلهٔ بالاست که می‌شود $\frac{-19}{2}$؛ یعنی $-9/5$.

راه دوم (تیزبازی!):

گام اول: اگر کمی (یا بیشتر!) دقت کنید، می‌فهمید $x=3$ ریشهٔ معادلهٔ $(x-1)^2+\underbrace{a(x-3)}_{0}-4=0$ است.

گام دوم: چون یکی از ریشه‌ها ۲ برابر ریشهٔ دیگر است، پس ریشهٔ دوم یا ۶ است یا $\frac{3}{2}$.

گام سوم: $x=6$ و $x=\frac{3}{2}$ را در معادله قرار می‌دهیم:

$$(x-1)^2+a(x-3)-4=0 \xrightarrow{x=6} 25+3a-4=0 \Rightarrow a=-7$$

$$(x-1)^2+a(x-3)-4=0 \xrightarrow{x=\frac{3}{2}} \frac{1}{4}-\frac{3}{2}a-4=0 \xrightarrow{\times 4} 1-6a-16=0 \Rightarrow 6a=-15 \Rightarrow a=-2/5$$

گام چهارم: پس مجموع مقادیر a برابر با $-7+(-2/5)=-9/5$ است.

تست و پاسخ ۲۱

ریشه‌های معادلهٔ $x(3+x)=5$ برابر α و β و ریشه‌های معادلهٔ $x(a+x)=b$ برابر $\frac{\alpha}{3+\alpha}$ و $\frac{1}{5}\beta^2$ هستند. حاصل $a+b$ کدام است؟

۱) $-4/8$ ۲) $-2/8$ ۳) $2/8$ ۴) $4/8$

پاسخ: گزینه ۱

مشاوره **نوشتن معادلهٔ درجه‌دومی که ریشه‌هایش با ریشه‌های معادلهٔ اولیه رابطه‌ای خاص داشته باشد، جزء سؤالات پرتکرار آزمون‌ها و کنکور است.**

خودت حل کنی بهتره از تساوی $x(3+x)=5$، می‌توانیم بنویسیم $3+x=\frac{5}{x}$.

نکات ۱ در معادلهٔ درجه‌دوم $ax^2+bx+c=0$ با شرط $\Delta>0$، داریم:

اختلاف ریشه‌ها	ضرب ریشه‌ها	جمع ریشه‌ها
$M=\frac{\sqrt{\Delta}}{\lvert a\rvert}$	$P=\frac{c}{a}$	$S=\frac{-b}{a}$

۲ معادلهٔ درجه‌دومی که مجموع ریشه‌هایش S و حاصل‌ضربشان P باشد، به صورت $x^2-Sx+P=0$ است.

www.mapedu.ir

پاسخ تشریحی **گام اول:** S و P معادلهٔ اولیه را حساب می‌کنیم:

$$x(3+x)=5 \xrightarrow{\text{استاندارد}} x^2+3x-5=0 \Rightarrow \begin{cases} S=\frac{-b}{a}=-3 \\ P=\frac{c}{a}=-5 \end{cases}$$

گام دوم: $x=\alpha$ ریشهٔ معادلهٔ $x(3+x)=5$ است؛ پس در آن صدق می‌کند:

$$\alpha(3+\alpha)=5 \Rightarrow 3+\alpha=\frac{5}{\alpha}$$

پس در $\frac{\alpha}{3+\alpha}$، جای مخرج $\frac{5}{\alpha}$ قرار می‌دهیم:

$$\text{ریشهٔ معادلهٔ جدید}: \frac{\alpha}{3+\alpha}=\frac{\alpha}{\frac{5}{\alpha}}=\frac{1}{5}\alpha^2$$

گام سوم: ریشه‌های معادلهٔ جدیدمان $\frac{\alpha}{3+\alpha}=\frac{1}{5}\alpha^2$ و $\frac{1}{5}\beta^2$ هستند. جمع و ضربشان را حساب می‌کنیم:

$$S_{\text{جدید}}=\frac{1}{5}\alpha^2+\frac{1}{5}\beta^2=\frac{1}{5}(\alpha^2+\beta^2)=\frac{1}{5}(S^2-2P)=\frac{1}{5}((-3)^2-2(-5))=\frac{19}{5}$$

$$P_{\text{جدید}}=(\frac{1}{5}\alpha^2)(\frac{1}{5}\beta^2)=\frac{1}{25}(\alpha\beta)^2=\frac{1}{25}P^2=\frac{1}{25}(-5)^2=1$$

گام چهارم: معادلهٔ جدید را با داشتن S و P جدید می‌نویسیم:

$$x^2-S_{\text{جدید}}x+P_{\text{جدید}}=0 \Rightarrow x^2-\frac{19}{5}x+1=0$$

گام پنجم: معادلهٔ بالا را به شکل $x(x+a)=b$ می‌نویسیم:

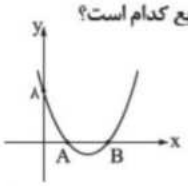
$$x(x\underbrace{-\frac{19}{5}}_{a})=\underbrace{-1}_{b}$$

پس:

$$a+b=\frac{-19}{5}+(-1)=\frac{-24}{5}=-4/8$$

تست و پاسخ ۲۲

نمودار تابع درجه‌دوم $y=f(x)$ داده شده است. اگر طول نقطهٔ B، دو برابر طول نقطهٔ A باشد، آن‌گاه کم‌ترین مقدار این تابع کدام است؟



۱) -1 ۲) $-1/25$

۳) $-1/5$ ۴) -2

پاسخ: گزینه ۱

مشاوره **نوشتن سریع معادلهٔ سهمی در حالت‌های مختلف را حتماً بلد باشید.**

خودت حل کنی بهتره طول A و B را به ترتیب α و 2α بگیرید.

درس‌نامه **نوشتن معادلهٔ سهمی**

	چیزهایی که داریم.	ضابطهٔ سهمی	نکتهٔ تکمیلی
۱	x_1 و x_2 صفرهای سهمی‌اند.	$y=a(x-x_1)(x-x_2)$	برای محاسبهٔ a، مختصات یک نقطهٔ دیگر را در سهمی صدق می‌دهیم.
۲	سهمی در x_1 بر محور xها مماس است.	$y=a(x-x_1)^2$	برای محاسبهٔ a، مختصات یک نقطهٔ دیگر را در سهمی صدق می‌دهیم.
۳	نقطهٔ (x_S, y_S) رأس سهمی است.	$y=a(x-x_S)^2+y_S$	برای محاسبهٔ a، مختصات یک نقطهٔ دیگر را در سهمی صدق می‌دهیم.
۴	سه نقطه از سهمی	$y=ax^2+bx+c$	با حل ۳ معادله، ۳ مجهول ضرایب را پیدا می‌کنیم. اگر نقطه‌ای به مختصات $(0,c)$ داشتیم، از آن شروع می‌کنیم.

نکته طول رأس برابر با میانگین ریشه‌های سهمی است: $x_S=\frac{x_1+x_2}{2}$

www.mapedu.ir

پاسخ تشریحی **گام اول:** طول نقطهٔ B دو برابر طول نقطهٔ A است؛ پس طول A و B را به ترتیب α و 2α می‌گیریم.

گام دوم: طبق حالت ۱ جدول، معادلهٔ سهمی به شکل $y=a(x-\alpha)(x-2\alpha)$ درمی‌آید.

گام سوم: سهمی از نقطهٔ $(0,8)$ می‌گذرد؛ پس: $8=a(0-\alpha)(0-2\alpha) \Rightarrow 2a\alpha^2=8 \Rightarrow a\alpha^2=4$

گام چهارم: میانگین ریشه‌ها، طول رأس را به ما می‌دهد: $x_S=\frac{\alpha+2\alpha}{2}=\frac{3}{2}\alpha$

گام پنجم: مقدار سهمی $f(x)=a(x-\alpha)(x-2\alpha)$ در x_S برابر با کم‌ترین مقدار سهمی است:

طبق گام سوم می‌شه ۴.

$$\min=f(\frac{3}{2}\alpha)=a(\frac{3}{2}\alpha-\alpha)(\frac{3}{2}\alpha-2\alpha)=a(\frac{\alpha}{2})(\frac{-\alpha}{2})=\frac{-a\alpha^2}{4}=\frac{-4}{4}=-1$$

تست و پاسخ 23

فرض کنید $|x|$ از x بزرگ‌تر و از ریشهٔ سوم $|x|$ کوچک‌تر باشد. در این صورت کدام صحیح است؟

۱) $x^2<x^4$ ۲) $x^3<x$ ۳) $x^2<x$ ۴) $\sqrt[3]{x}<x^3$

پاسخ: گزینه ۴

خودت حل کنی بهتره اول دنبال علامت x و بعد دنبال محدودهٔ دقیق‌ترش باشید. در حل نامعادله‌ها، می‌توانیم طرفین را به توان فرد برسانیم.

پاسخ تشریحی **گام اول:** $|x|$ از x بزرگ‌تر است، پس $x<0$ است.

گام دوم: $|x|$ از ریشهٔ سوم $|x|$ (یعنی $\sqrt[3]{|x|}$) کوچک‌تر است؛ پس: $|x|<\sqrt[3]{|x|} \xrightarrow{x<0} -x<\sqrt[3]{-x} \xrightarrow{\text{قرینه}} x>\sqrt[3]{x}$

دو طرف را به توان ۳ می‌رسانیم: $x^3>(\sqrt[3]{x})^3 \Rightarrow x^3>x \Rightarrow x^3-x>0 \Rightarrow x(x-1)(x+1)>0$

با توجه به این‌که $x<0$ است، پس x و $x-1$ هر دو منفی‌اند؛ در نتیجه: $\underbrace{x}_{\text{منفی}}\underbrace{(x-1)}_{\text{منفی}}(x+1)>0 \Rightarrow x+1>0 \Rightarrow x>-1$

گام سوم: از اشتراک $x<0$ و $x>-1$، به $-1<x<0$ می‌رسیم.

گام چهارم: با انتخاب عدد $x=\frac{-1}{8}$ در این محدوده، گزینه‌ها را بررسی می‌کنیم:

۱) $x^2<x^4 \Rightarrow (\frac{-1}{8})^2<(\frac{-1}{8})^4 \Rightarrow \underbrace{(\frac{1}{2})^6<(\frac{1}{2})^{12}}$

۲) $x^3<x \Rightarrow (\frac{-1}{8})^3<\frac{-1}{8} \Rightarrow \frac{-1}{512}<\frac{-1}{8} \xrightarrow{\text{قرینه نادرست}} \underbrace{\frac{1}{512}>\frac{1}{8}}_{\text{نادرست}}$

۳) $x^2<x \Rightarrow (\frac{-1}{8})^2<\frac{-1}{8} \Rightarrow \underbrace{\frac{1}{64}<\frac{-1}{8}}_{\text{نادرست}}$

۴) $\sqrt[3]{x}<x^3 \Rightarrow \sqrt[3]{\frac{-1}{8}}<(\frac{-1}{8})^3 \Rightarrow \underbrace{\frac{-1}{2}<\frac{-1}{512}}_{\text{درست}}$

www.mapedu.ir

تست و پاسخ ۲۴

حاصل $\frac{\sqrt{20}}{10-2\sqrt{5}}(\sqrt{4-\sqrt{12}}-\sqrt{\sqrt{12}+4})$ کدام است؟

۱) $\frac{1-\sqrt{5}}{2}$ ۲) $\frac{\sqrt{5}+1}{2}$ ۳) $-\frac{\sqrt{5}+1}{2}$ ۴) $\frac{\sqrt{5}-1}{2}$

پاسخ: گزینه ۳

خودت حل کنی بهتره عبارت داخل پرانتز را مساوی A بگیرید و A^2 را حساب کنید.

درس نامه **ساده‌کردن رادیکال‌های به فرم $\sqrt{A\pm2\sqrt{B}}$**

اگر رادیکال به شکل $\sqrt{A\pm2\sqrt{B}}$ دیدید، باید زیر رادیکال یعنی $A\pm2\sqrt{B}$ را به شکل $(\sqrt{C}\pm\sqrt{D})^2$ بنویسید:

$$(\sqrt{C}\pm\sqrt{D})^2=A\pm2\sqrt{B}\Rightarrow C+D\pm2\sqrt{CD}=A\pm2\sqrt{B}\Rightarrow\begin{cases}A=C+D\\B=C\times D\end{cases}$$

یعنی باید دنبال دوتا عدد باشیم که جمعشان A و ضربشان B باشد. مثلاً برای ساده‌کردن $\sqrt{5+2\sqrt{6}}$، باید دوتا عدد پیدا کنیم که جمعشان ۵ و ضربشان ۶ باشد. این دوتا عدد ۲ و ۳ هستند، پس جای $5+2\sqrt{6}$ می‌نویسیم $(\sqrt{3}+\sqrt{2})^2$ و داریم:

$$\sqrt{5+2\sqrt{6}}=\sqrt{(\sqrt{3}+\sqrt{2})^2}=\sqrt{3}+\sqrt{2}$$

پاسخ تشریحی راه اول:

گام اول، کسر پشت پرانتز را ساده می‌کنیم:

$$\frac{\sqrt{20}}{10-2\sqrt{5}}=\frac{\cancel{2}\sqrt{5}}{\cancel{2}(5-\sqrt{5})}=\frac{\overset{1}{\cancel{\sqrt{5}}}}{\cancel{\sqrt{5}}(\sqrt{5}-1)}=\frac{1}{\sqrt{5}-1}$$

گام دوم، عبارت داخل رادیکال $\sqrt{4+\sqrt{12}}$ را به صورت مربع کامل می‌نویسیم و رادیکال را حذف می‌کنیم:

$$\sqrt{4+\sqrt{12}}=\sqrt{\underset{\text{جمع}}{4}+\underset{\text{ضرب}}{2\sqrt{3}}}=\sqrt{(\sqrt{3}+\sqrt{1})^2}=\sqrt{3}+1$$

اعداد ۳ و ۱

مشابه همین کار را برای $\sqrt{4-\sqrt{12}}$ انجام می‌دهیم و به $\sqrt{3}-1$ می‌رسیم.

گام سوم، عبارات ساده‌شده را جای‌گذاری می‌کنیم:

$$\frac{\sqrt{20}}{10-2\sqrt{5}}(\sqrt{4-\sqrt{12}}-\sqrt{4+\sqrt{12}})=\frac{1}{\sqrt{5}-1}(\sqrt{3}-1-(\sqrt{3}+1))=\frac{1}{\sqrt{5}-1}\times(-2)=\frac{-2}{\sqrt{5}-1}$$

گام چهارم، صورت و مخرج را در مزدوج مخرج ضرب می‌کنیم تا مخرج گویا شود:

$$\frac{-2}{\sqrt{5}-1}\times\frac{\sqrt{5}+1}{\sqrt{5}+1}=\frac{-2(\sqrt{5}+1)}{5-1}=-\frac{\sqrt{5}+1}{2}$$

راه دوم: برای ساده‌کردن عبارت داخل پرانتز، می‌توانستیم آن را برابر با A بگیریم و با توان ۲ رساندن طرفین، مقدار A را پیدا کنیم. فقط باید حواستان باشد، چون $\sqrt{۴-\sqrt{۱۲}} < \sqrt{۴+\sqrt{۱۲}}$، حاصل A عددی منفی است:

$$A=\sqrt{۴-\sqrt{۱۲}}-\sqrt{۴+\sqrt{۱۲}} \xrightarrow{\text{توان ۲}} A^۲=(\sqrt{۴-\sqrt{۱۲}}-\sqrt{۴+\sqrt{۱۲}})^۲$$

$$\Rightarrow A^۲=۴-\cancel{\sqrt{۱۲}}+۴+\cancel{\sqrt{۱۲}}-۲\underbrace{\sqrt{(۴-\sqrt{۱۲})(۴+\sqrt{۱۲})}}_{۴^۲-۱۲=۴} \Rightarrow A^۲=۴+۴-۴=۴ \xrightarrow{A<۰} A=-۲$$

بقیهٔ حل مثل راه اول است.

تست و پاسخ ۲۵

اگر $a^۳-\frac{۱}{a^۳}=۱$، آن‌گاه حاصل $(\frac{۱}{a^۳-a\sqrt{a}+۱}+\frac{۱}{a^۳+a\sqrt{a}+۱})^۳$ کدام است؟

۱) ۱ ۲) ۸ ۳) $\frac{۱}{۸}$ ۴) $-\frac{۱}{۸}$

پاسخ: گزینه ۱

مشاوره **شبیه این سؤال در کنکور رشتهٔ ریاضی سال ۱۴۰۱ آمده است.**

خودت حل کنی بهتره از تساوی اول $a^۶$ را برحسب $a^۳$ به دست آورید. عبارت دوم را با مخرج‌مشترک‌گیری ساده کنید.

پاسخ تشریحی **گام اول:** از تساوی $a^۳-\frac{۱}{a^۳}=۱$، داریم:

$$\frac{a^۶-۱}{a^۳}=۱ \Rightarrow a^۶-۱=a^۳ \Rightarrow a^۶=a^۳+۱$$

گام دوم: عبارت خواسته‌شده را به کمک اتحاد مزدوج، مخرج‌مشترک می‌گیریم و ساده می‌کنیم:

$$(\frac{۱}{(a^۳+۱)-a\sqrt{a}}+\frac{۱}{(a^۳+۱)+a\sqrt{a}})^۳=(\frac{a^۳+۱+\cancel{a\sqrt{a}}+a^۳+۱-\cancel{a\sqrt{a}}}{(a^۳+۱)^۲-(a\sqrt{a})^۲})^۳=(\frac{۲a^۳+۲}{a^۶+۲a^۳+۱-a^۳})^۳=(\frac{۲a^۳+۲}{a^۶+a^۳+۱})^۳$$

گام سوم: در عبارت آخر گام دوم، جای $a^۶$، $a^۳+۱$ قرار می‌دهیم:

$$(\frac{۲a^۳+۲}{\underbrace{a^۶}_{a^۳+۱}+a^۳+۱})^۳=(\frac{۲a^۳+۲}{۲a^۳+۲})^۳=۱^۳=۱$$

تست و پاسخ 26

اگر $-۱\le\frac{۴x+۳}{x+۲}<۴$، آن‌گاه کوچک‌ترین عضو مجموعه مقادیر $x^۲+x$ کدام است؟

۱) ۱ ۲) ۲ ۳) صفر ۴) $-۰/۲۵$

پاسخ: گزینه ۴

خودت حل کنی بهتره جواب نامعادلهٔ $\underbrace{A<\overbrace{B}^{(۲)}}_{(۱)}<C$، از اشتراک جواب نامعادلات (۱) و (۲) به دست می‌آید.

درس‌نامه **حل نامعادلات به فرم $A<B<C$**

- نامعادلهٔ $A<B<C$ را به دو نامعادله تفکیک می‌کنیم:

$$\underbrace{A<\overbrace{B}^{\text{نامعادلهٔ ۲}}}_{\text{نامعادلهٔ ۱}}<C$$

- بعد از حل هر دو نامعادله، بین جواب‌هایشان اشتراک می‌گیریم.

نکته برای حل نامعادلات به فرم $k_1 < \frac{ax+b}{cx+d} < k_2$، اگر میانگین k_1 و k_2 را از طرفین کم کنیم، به نامعادلهٔ زیر می‌رسیم:

$$k_1 - \frac{k_1+k_2}{2} < \frac{ax+b}{cx+d} - \frac{k_1+k_2}{2} < k_2 - \frac{k_1+k_2}{2} \Rightarrow \frac{k_1-k_2}{2} < \frac{ax+b}{cx+d} - \frac{k_1+k_2}{2} < \frac{k_2-k_1}{2}$$

می‌دانیم اگر $-a < \bigcirc < a$ باشد، می‌توانیم آن را به شکل $|\bigcirc| < a$ بنویسیم $(a > 0)$، پس نامعادلهٔ بالا را هم می‌توان به شکل $\left|\frac{ax+b}{cx+d} - \frac{k_1+k_2}{2}\right| < \frac{k_2-k_1}{2}$ نوشت.

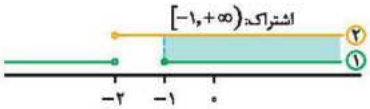
پاسخ تشریحی **گام اول:** نامعادلهٔ $\underbrace{-1 \le \overbrace{\frac{4x+3}{x+2}}^{\text{نامعادلهٔ ۲}}}_{\text{نامعادلهٔ ۱}} < 4$ را به دو نامعادله تفکیک می‌کنیم و هر کدام را حل می‌کنیم:

نامعادلهٔ ۱: $-1 \le \frac{4x+3}{x+2} \Rightarrow \frac{4x+3}{x+2} + 1 \ge 0 \Rightarrow \frac{4x+3+x+2}{x+2} \ge 0$

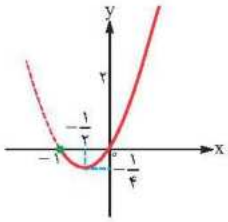
$$\Rightarrow \frac{\overset{-1}{\uparrow}\ 5x+5}{x+2\ \underset{-2}{\downarrow}} \ge 0 \xrightarrow{\text{تعیین علامت}} \begin{array}{c|ccccc} & & -2 & & -1 & \\ \hline & + & \text{ت ن} & - & 0 & + \end{array} \xrightarrow{\ge 0} (-\infty,-2)\cup[-1,+\infty)$$

نامعادلهٔ ۲: $\frac{4x+3}{x+2} < 4 \Rightarrow \frac{4x+3}{x+2} - 4 < 0 \Rightarrow \frac{4x+3-4x-8}{x+2} < 0 \Rightarrow \frac{-5}{x+2} < 0 \xrightarrow[\text{مثبت باشد.}]{\text{باید مخرج}} x+2 > 0 \Rightarrow x > -2$

گام دوم: بین جواب‌های ۱ و ۲، اشتراک می‌گیریم:



گام سوم: باید سهمی $y = \underbrace{x^2+x}_{x(x+1)}$ را با دامنهٔ $[-1,+\infty)$ رسم کنیم. ریشه‌های سهمی $x=0$ و $x=-1$ و دهانهٔ آن رو به بالا و طول رأس آن $x = \frac{-1}{2}$ است.



پس کم‌ترین مقدار برابر با $-\frac{1}{4}$ است. $\xrightarrow{x=-\frac{1}{2}} y = (-\frac{1}{2})^2 - \frac{1}{2} = -\frac{1}{4}$

تست و پاسخ 27

مجموعه‌جواب نامعادلهٔ $(x^2+12)(x+6) \le 37$ به صورت $(-\infty,\alpha]$ است. حاصل $\sqrt[3]{3\alpha-12}$ کدام است؟

۱) -2 ۲) 2 ۳) 3 ۴) -3

پاسخ: گزینه ۴

خودت حل کنی بهتره سمت چپ را ضرب کنید و سعی کنید با اضافه و کم‌کردن یک عدد، آن را به شکل $(x+k)^3$ بنویسید.

نکته برخی از اتحادهای مکعب زیاد در سؤالات دیده می‌شوند؛ آن‌ها را بلد باشید.

صورت کلی اتحاد مکعب	$(a \pm b)^3 = a^3 \pm 3a^2b + 3ab^2 \pm b^3$
مثال‌هایی که در این قسمت زیاد به کار می‌آیند.	$(x \pm 1)^3 = x^3 \pm 3x^2 + 3x \pm 1$
	$(x \pm 2)^3 = x^3 \pm 6x^2 + 12x \pm 8$
	$(2x \pm 1)^3 = 8x^3 \pm 12x^2 + 6x \pm 1$

پاسخ تشریحی **گام اول:** سمت چپ نامعادله را باز می‌کنیم:

$$(x^2+12)(x+6)\le 37 \Rightarrow \underbrace{x^3+6x^2+12x}_{*}+72\le 37$$

گام دوم: عبارتی که با * مشخص کردیم، سه جملهٔ ابتدایی اتحاد مکعب هستند، فقط کافی است عدد ۸ را به آن اضافه و کم کنیم:

$$\underbrace{x^3+6x^2+12x+8}_{(x+2)^3}-8+72\le 37 \Rightarrow (x+2)^3\le -27 \xrightarrow{\text{فرجهٔ ۳}} x+2\le -3 \Rightarrow x\le -5$$

گام سوم: پس جواب نامعادله به صورت $(-\infty,\overset{\alpha}{-5}]$ است؛ در نتیجه:

$$\sqrt[3]{3\alpha-12}=\sqrt[3]{3(-5)-12}=\sqrt[3]{-27}=-3$$

تست و پاسخ 28

اگر در بازهٔ $(-\infty,a)$، نامعادلهٔ $x|2x-1|<1$ برقرار باشد، بیشترین مقدار a کدام است؟

۱) 1 ۲) $\frac{1}{2}$ ۳) $-\frac{1}{2}$ ۴) -1

پاسخ: گزینه ۱

خودت حل کنی بهتره از گزینه‌ها کمک بگیرید.

درس‌نامه

برای حل نامعادله‌هایی که یک عبارت قدرمطلقی درجه‌یک دارند، به این صورت عمل می‌کنیم:

گام اول	ریشهٔ داخل قدرمطلق را حساب می‌کنیم (مثلاً $x=a$).
گام دوم	نامعادله را در دو بازهٔ $x\ge a$ و $x<a$ حل می‌کنیم. جواب به‌دست‌آمده از هر قسمت را با شرط دامنهٔ آن قسمت، اشتراک می‌گیریم.
گام سوم	بین دو محدودهٔ به‌دست‌آمده، اجتماع می‌گیریم.

پاسخ تشریحی راه اول:

گزینه‌ها را امتحان می‌کنیم. به ازای هر کدام که حاصل عبارت سمت چپ نامعادلهٔ $x|2x-1|<1$، برابر با عدد سمت راست (یعنی ۱) شد، جواب است:

۱) $a=1 \Rightarrow 1|2(1)-1|=1$ ✓

۲) $a=\frac{1}{2} \Rightarrow \frac{1}{2}|0|=0$ ×

۳) $a=\frac{-1}{2} \Rightarrow \frac{-1}{2}|2(\frac{-1}{2})-1|=-1$ ×

۴) $a=-1 \Rightarrow -1|(2(-1)-1|=-3$ ×

راه دوم:

گام اول: ریشهٔ عبارت داخل قدرمطلق را حساب می‌کنیم:

$$2x-1=0 \Rightarrow x=\frac{1}{2}$$

گام دوم: بعد از حذف قدرمطلق، در دو محدودهٔ $x\ge\frac{1}{2}$ و $x<\frac{1}{2}$، نامعادله را حل می‌کنیم:

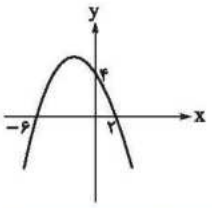
- $x|2x-1|<1 \xrightarrow{x\ge\frac{1}{2}} x(2x-1)<1 \Rightarrow 2x^2-x-1<0 \xrightarrow[a+b+c=0]{\text{بین ریشه‌ها}} \frac{-1}{2}<x<1 \xrightarrow{\cap(x\ge\frac{1}{2})} \frac{1}{2}\le x<1$
- $x|2x-1|<1 \xrightarrow{x<\frac{1}{2}} x(-2x+1)<1 \Rightarrow -2x^2+x<1 \Rightarrow 2x^2-x+1>0 \xrightarrow[a>0]{\Delta<0} x\in\mathbb{R} \xrightarrow{\cap(x<\frac{1}{2})} x<\frac{1}{2}$

گام سوم: بین دو محدودهٔ به‌دست‌آمده، اجتماع می‌گیریم:

$$\text{جواب}=[\tfrac{1}{2},1)\cup(-\infty,\tfrac{1}{2})=(-\infty,\overset{a}{1})$$

پس $a=1$ است.

نمودار سهمی $f(x)=\alpha(x-a)^{۲}+\beta$ به صورت زیر است. مقدار $\alpha\beta$ کدام است؟



۱) $-\frac{۸}{۳}$

۲) $\frac{-۱۶}{۳}$

۳) -۱۶

۴) $\frac{-۱۶}{۹}$

پاسخ: گزینه ۴

خودت حل کنی بهتره معادلهٔ سهمی را با داشتن صفرها و عرض از مبدأ آن بنویسید.

درس‌نامه نوشتن معادلهٔ سهمی

	چیزهایی که داریم	ضابطهٔ سهمی	نکتهٔ تکمیلی
۱	$x_۱$ و $x_۲$ صفرهای سهمی‌اند.	$y=a(x-x_۱)(x-x_۲)$	برای محاسبهٔ a، یک نقطهٔ دیگر را در سهمی صدق می‌دهیم.
۲	نقطهٔ (x_S,y_S) رأس سهمی است.	$y=a(x-x_S)^{۲}+y_S$	برای محاسبهٔ a، یک نقطهٔ دیگر را در سهمی صدق می‌دهیم.
۳	سهمی در نقطه‌ای به طول α بر محور xها مماس است.	$y=a(x-\alpha)^{۲}$	برای محاسبهٔ a، یک نقطهٔ دیگر را در سهمی صدق می‌دهیم.
۴	سه نقطه از سهمی	$y=ax^{۲}+bx+c$	با حل سه معادله ـ سه مجهول، ضرایب را پیدا می‌کنیم.

پاسخ تشریحی α و β به ترتیب ضریب $x^{۲}$ و عرض رأس هستند.

گام اول: صفرهای سهمی، ۶− و ۲ هستند؛ پس معادلهٔ آن به شکل $y=\alpha(x+۶)(x-۲)$ است.

گام دوم: سهمی از نقطهٔ $(۰,۴)$ می‌گذرد؛ پس:

$$۴=\alpha(۶)(-۲)\Rightarrow -۱۲\alpha=۴\Rightarrow \alpha=\frac{-۱}{۳}$$

گام سوم: معادلهٔ سهمی به صورت $y=\frac{-۱}{۳}(x+۶)(x-۲)$ درآمد.

اگر آن را به شکل $y=\alpha(x-a)^{۲}+\beta$ بنویسیم، α ضریب $x^{۲}$ (یعنی $\frac{-۱}{۳}$)، a طول رأس سهمی و β عرض رأس سهمی است.

میانگین ریشه‌ها، طول رأس را می‌دهد:

$$a=x_S=\frac{-۶+۲}{۲}=-۲$$

با جای‌گذاری $x=-۲$ در معادلهٔ سهمی، β به دست می‌آید:

$$y=\frac{-۱}{۳}(x+۶)(x-۲)\xrightarrow{x_S=-۲}y_S=\frac{-۱}{۳}(۴)(-۴)=\frac{۱۶}{۳}\Rightarrow \beta=\frac{۱۶}{۳}$$

گام چهارم: در نتیجه:

$$\alpha\beta=\frac{-۱}{۳}\times\frac{۱۶}{۳}=\frac{-۱۶}{۹}$$

تست و پاسخ 30

اگر α و β ریشه‌های معادلهٔ درجه‌دوم $x^2-(2m+1)x+2m=0$ باشند، به طوری که α, m, β با همین ترتیب، جمله‌های متوالی یک دنبالهٔ هندسی باشند، مجموع معکوس ریشه‌های معادله کدام است؟

۱) $\frac{4}{3}$ ۲) $\frac{3}{4}$ ۳) $\frac{5}{4}$ ۴) $\frac{4}{5}$

پاسخ: گزینه ۳

خودت حل کنی بهتره باید m^2 با $\alpha\beta$ برابر باشد.

نکته اگر α و β ریشه‌های معادلهٔ درجه‌دوم $ax^2+bx+c=0$ باشند، آن‌گاه:

۱) مجموع ریشه‌ها: $S=\frac{-b}{a}$

۲) ضرب ریشه‌ها: $P=\frac{c}{a}$

۳) مجموعه معکوس ریشه‌ها: $\frac{1}{\alpha}+\frac{1}{\beta}=\frac{\beta+\alpha}{\alpha\beta}=\frac{S}{P}$

۴) مجموع مربع ریشه‌ها: $\alpha^2+\beta^2=(\alpha+\beta)^2-2\alpha\beta=S^2-2P$

۵) مجموع مکعب ریشه‌ها: $\alpha^3+\beta^3=(\alpha+\beta)^3-3\alpha\beta(\alpha+\beta)=S^3-3SP$

نکته اگر x، y و z سه جملهٔ متوالی یک دنبالهٔ هندسی باشند، آن‌گاه: $y^2=xz$.

پاسخ تشریحی **گام اول:** β، m و α سه جملهٔ متوالی دنبالهٔ هندسی‌اند؛ پس:

$$(\text{وسطی})^2=\text{اولی}\times\text{سومی} \Rightarrow m^2=\alpha\beta$$

گام دوم: $\alpha\beta$ را از روی معادلهٔ $x^2-(2m+1)x+2m=0$ حساب می‌کنیم:

$$P=\frac{c}{a} \Rightarrow \alpha\beta=\frac{2m}{1}=2m$$

گام سوم: پس داریم:

$$m^2=\underbrace{\alpha\beta}_{2m} \Rightarrow m^2=2m \Rightarrow m(m-2)=0 \Rightarrow \begin{cases} m=0 \Rightarrow \text{جملهٔ وسطی صفر می‌شود.} \Rightarrow \text{غیرقابل‌قبول} \\ m=2 \checkmark \end{cases}$$

گام چهارم: S و P معادله را حساب می‌کنیم:

$$x^2-(2m+1)x+2m=0 \xrightarrow{m=2} x^2-5x+4=0 \Rightarrow \begin{cases} S=\frac{-b}{a}=5 \\ P=\frac{c}{a}=4 \end{cases}$$

گام پنجم: مجموع معکوس ریشه‌ها برابر است با:

$$\frac{1}{\alpha}+\frac{1}{\beta}=\frac{S}{P}=\frac{5}{4}$$

آزمون‌های سراسری گاج

www.mapedu.ir

1 ۳

$$x^2+ax-b=0 \Rightarrow x^2+ax=b$$

$$\xrightarrow{+\frac{a^2}{4}} x^2+ax+\frac{a^2}{4}=b+\frac{a^2}{4}$$

$$\Rightarrow (x+\frac{a}{2})^2=b+\frac{a^2}{4}$$

با مقایسهٔ رابطهٔ داده شده داریم:

$$\begin{cases}\frac{a}{2}=-1 \Rightarrow a=-2 \\ b+\frac{a^2}{4}=5 \Rightarrow b+1=5 \Rightarrow b=4\end{cases} \Rightarrow a+b=2$$

2 ۳ ریشهٔ هر معادله در خود معادله صدق می‌کند.

$$x=\alpha \Rightarrow 2\alpha^2-\alpha=3 \Rightarrow \begin{cases}2\alpha^2-\alpha-2=1 \\ 2\alpha^2=\alpha+3 \Rightarrow \frac{2\alpha^2}{\alpha+3}=1\end{cases}$$

$$\Rightarrow A=(1)^{1401}+(1)^{2021}=2$$

3 ۱ برای آن‌که معادلهٔ درجهٔ دوم ریشهٔ مضاعف (ریشهٔ مکرر مرتبهٔ دوم) بدهد باید $\Delta=0$ باشد.

$$\Delta=0 \Rightarrow m^2-4m(m-3)=0$$

$$\Rightarrow -3m^2+12m=0 \Rightarrow 3m(-m+4)=0$$

$$\Rightarrow \begin{cases}m=0 \text{ غ‌ق‌ق} \\ m=4\end{cases}$$

تذکر: در حالت $m=0$ معادله درجهٔ دوم نخواهد بود.

4 ۲ عدد کوچک‌تر را x در نظر می‌گیریم.

$$x^2+(x+1)^2+(x+2)^2=2(x+2)^2$$

$$\Rightarrow x^2+x^2+2x+1=x^2+4x+4$$

$$\Rightarrow x^2-2x-3=0 \Rightarrow \begin{cases}x=-1\notin\mathbb{N} \\ x=3\in\mathbb{N}\end{cases}$$

5 ۱ باید ضریب x^2 منفی شود تا تابع ماکزیمم داشته باشد و $-\frac{\Delta}{4a}$ برابر -1 است.

$$-\frac{\Delta}{4a}=-1 \Rightarrow \Delta=4a \Rightarrow 16-4k(1+k)=4(1+k)$$

$$\Rightarrow 16-4k-4k^2=4+4k$$

$$\Rightarrow 4k^2+8k-12=0 \Rightarrow k^2+2k-3=0 \Rightarrow \begin{cases}k=1 \\ k=-3\end{cases}$$

به ازای $k=1$ سهمی مینیمم دارد و به ازای $k=-3$ سهمی ماکزیمم دارد.

6 ۳ دقت داشته باشید که این نامعادله فقط برای $x>0$ جواب دارد.

$$|x^2-4x|<x \xrightarrow{x>0} -x<x^2-4x<x$$

$$\xrightarrow{+x} -1<x-4<1 \xrightarrow{+4} 3<x<5 \Rightarrow \frac{a+b}{2}=4$$

7 ۲ چون $a<0$ است پس دهانهٔ سهمی رو به پایین است، در نتیجه فقط از ناحیهٔ سوم و چهارم می‌گذرد یعنی همواره زیر محور xهاست.

$$\Delta<0 \Rightarrow m^2+4m<0 \Rightarrow -4<m<0$$

8 ۳ مجموع و حاصل‌ضرب ریشه‌های معادلهٔ داده‌شده را به دست می‌آوریم:

$$\alpha+1+\beta+1=1 \Rightarrow \alpha+\beta=-1$$

$$(\alpha+1)(\beta+1)=-1 \Rightarrow \alpha\beta+\alpha+\beta+1=-1$$

$$\xrightarrow{\alpha+\beta=-1} \alpha\beta-1+1=-1 \Rightarrow \alpha\beta=-1 \Rightarrow \alpha^2\beta^2=1$$

$$\alpha+\beta=-1 \Rightarrow (\alpha+\beta)^2=1 \Rightarrow \alpha^2+\beta^2+2\alpha\beta=1$$

$$\xrightarrow{\alpha\beta=-1} \alpha^2+\beta^2=3$$

حال معادلهٔ جدید را با ریشه‌های $\alpha^2\beta^2$ و $\alpha^2+\beta^2$ می‌نویسیم:

$$S=(\alpha^2\beta^2)+(\alpha^2+\beta^2)=1+3=4$$

$$P=(\alpha^2\beta^2)(\alpha^2+\beta^2)=1\times3=3$$

معادلهٔ جدید: $x^2-4x+3=0$

9 (۱)

$$2x^2-x-2=0 \Rightarrow \begin{cases} \alpha+\beta=\frac{1}{2}=S \\ \alpha\beta=-1=P \\ |\alpha-\beta|=\frac{\sqrt{\Delta}}{|a|}=\frac{\sqrt{17}}{2} \end{cases}$$

$$|\alpha^3-\beta^3|=|\alpha-\beta||\underbrace{\alpha^2+\beta^2}_{S^2-2P}+\underbrace{\alpha\beta}_{P}|=\frac{\sqrt{\Delta}}{|a|}|S^2-P|$$

$$=\frac{\sqrt{17}}{2}|\frac{1}{4}+1|=\frac{5}{8}\sqrt{17}$$

10 (۴) نقطهٔ A محل برخورد سهمی با محور yهاست پس $A(0,5)$ است. پس معادلهٔ خط L به صورت $y=5$ است. حال این خط را با سهمی قطع می‌دهیم.

$$-x^2+4x+5=5 \Rightarrow 4x-x^2=0 \Rightarrow x=0,4$$

در نتیجه طول نقطهٔ B برابر ۴ است. ضمناً طول نقطهٔ C (صفر دیگر سهمی) هم برابر ۵ است.

$$S_{ABCO}=\frac{1}{2}(AB+OC)\times OA=\frac{1}{2}(4+5)\times 5=22/5$$

11 (۱)

$$S_{ABC}=\frac{1}{2}x(8-x)=\frac{1}{2}(8x-x^2)=Max \Rightarrow x=\frac{-8}{-2}=4$$

$$S_{DEFG}=\frac{m}{2}(2x-m)\xrightarrow{x=4}S_{DEFG}=\frac{m}{2}(8-m)=Max$$

$$\Rightarrow S_{DEFG}=\frac{1}{2}(8m-m^2)=Max \Rightarrow m=\frac{-8}{-2}=4$$

12 (۲) چون سهمی y_1 محور xها در دو طرف محور yها را قطع کرده است، پس:

$$\frac{c}{a}<0 \Rightarrow \frac{m-1}{m}<0 \Rightarrow 0<m<1 \xrightarrow{-1} -1<m-1<0$$

رابطهٔ بالا نشان می‌دهد که $m-1$ مقداری منفی است، پس در سهمی y_2 مقدار $\frac{c}{a}$ منفی است پس سهمی y_2 نیز از هر چهار ناحیهٔ مختصات عبور می‌کند.

13 (۳) اولاً باید $\Delta>0$ باشد تا معادله دو ریشهٔ حقیقی متمایز داشته باشد:

$$x^2+(m-1)x-(m-1)=0$$

$$\Delta=(m-1)^2+4(m-1)>0 \Rightarrow (m-1)(m+3)>0$$

$$\Rightarrow m\in(-\infty,-3)\cup(1,+\infty) \qquad (1)$$

ثانیاً $\alpha\beta^2+\beta\alpha^2>0$ است پس:

$$\alpha\beta(\alpha+\beta)>0 \Rightarrow \frac{c}{a}\times\frac{-b}{a}>0 \Rightarrow bc<0$$

$$(m-1)(m-1)>0 \Rightarrow (m-1)^2>0 \Rightarrow m\neq 1 \qquad (2)$$

$$(1)\cap(2): m\in(-\infty,-3)\cup(1,+\infty)$$

14 (۳) معادله را مرتب می‌کنیم:

$$x^2(x+1)^2-14(x^2+x)+24=0$$

$$\Rightarrow (x^2+x)^2-14(x^2+x)+24=0$$

$$\xrightarrow{x^2+x=t} t^2-14t+24=0 \Rightarrow (t-12)(t-2)=0$$

$$\Rightarrow \begin{cases} t=12 \Rightarrow x^2+x=12 \Rightarrow x^2+x-12=0 \Rightarrow \begin{cases} S=-1 \\ P=-12 \end{cases} \\ t=2 \Rightarrow x^2+x=2 \Rightarrow x^2+x-2=0 \Rightarrow \begin{cases} S'=-1 \\ P'=-2 \end{cases} \end{cases}$$

$$(PP')-(S+S')=24-(-2)=26$$

15 (۲)

$$P(x)=ax^2+bx+c=ax^2+bx+\frac{b^2}{4a}-\frac{b^2}{4a}+c$$

$$=a[x^2+\frac{b}{a}x+\frac{b^2}{4a^2}-\frac{b^2-4ac}{4a^2}]=a[(x+\frac{b}{2a})^2-\frac{\Delta}{4a^2}]$$

16 (۴) مجموعه جواب نامعادله، $(-\infty,-4)\cup(6,+\infty)$ می‌باشد.

حالت کلی نامعادله به صورت $|x-\alpha|>\beta$ خواهد بود α برابر با $\frac{-4+6}{2}=1$ می‌باشد و β برابر $\frac{6+4}{2}=5$ خواهد بود. پس: $|x-1|>5$

17 (۲) می‌دانیم هر سهمی به صورت $y=a(x-x_0)^2+y_0$ که $a\neq 0$ است، رأسی به مختصات (x_0,y_0) دارد.

$$f(x)=a(x-(-2))^2+1=a(x+2)^2+1$$

$$f(-3)=2 \Rightarrow a(-3+2)^2+1=2 \Rightarrow a+1=2$$

$$\Rightarrow a=1, f(x)=(x+2)^2+1$$

$$g(x)=(x-k+2)^2+1+k^2 \xrightarrow{g(4)=19} (6-k)^2+1+k^2=19$$

$$\Rightarrow 36-12k+k^2+1+k^2=19$$

$$\Rightarrow 2k^2-12k+18=0 \Rightarrow k^2-6k+9=0 \Rightarrow (k-3)^2=0 \Rightarrow k=3$$

18 (۳) x^2+3x+5 همواره مثبت و $-2x^2+3x-4$ همواره منفی می‌باشد، کل عبارت مثبت هست، پس عبارت x^2+3x+1 می‌بایست منفی باشد.

$$x^2+3x+1<0\,,\ \Delta=9-4(1)(1)=5\,,\ x=\frac{-3\pm\sqrt{5}}{2}$$

x		$\frac{-3-\sqrt{5}}{2}$		$\frac{-3+\sqrt{5}}{2}$	
y	+	0	−	0	+

$$(a\,,b)=\left(\frac{-3-\sqrt{5}}{2}\,,\frac{-3+\sqrt{5}}{2}\right),$$

$$ab=\left(\frac{-3-\sqrt{5}}{2}\right)\left(\frac{-3+\sqrt{5}}{2}\right)=\frac{9-5}{4}=1$$

19 (۱)

$$\frac{S}{P}=\frac{-\frac{b}{a}}{\frac{c}{a}}=-\frac{b}{c}=-\frac{-8}{-1}=-8$$

20 (۱) صفرهای سهمی g داده شده است، پس ضابطهٔ سهمی g را به صورت زیر در نظر می‌گیریم:

$$g(x)=a(x-1)(x-5)\xrightarrow{g(0)=2}2=a(0-1)(0-5)$$

$$\Rightarrow a=\frac{2}{5}\Rightarrow g(x)=\frac{2}{5}(x-1)(x-5)$$

$$x_S=\frac{1+5}{2}=3\Rightarrow y_S=g(3)=\frac{2}{5}(3-1)(3-5)=\frac{-8}{5}$$

$$\Rightarrow S(3\,,-\frac{8}{5})$$

حالا می‌توانیم ضابطهٔ تابع خطی f را بنویسیم:

$$\begin{cases}(5\,,0)\\(3\,,-\frac{8}{5})\end{cases}\Rightarrow m=\frac{-\frac{8}{5}-0}{3-5}=\frac{4}{5}\xrightarrow{\text{معادلهٔ f}}y-0=\frac{4}{5}(x-5)$$

$$\Rightarrow f(x)=\frac{4}{5}(x-5)\Rightarrow f(-1)=\frac{4}{5}(-1-5)=\frac{-24}{5}$$

21 (۲) چون $x=-3$ ریشه‌ی معادله‌ی $f(x)=0$ است، پس به وضوح $x=-3$ ریشه‌ی $2x^2+ax+b=0$ می‌باشد، بنابراین:

$$2(-3)^2-3a+b=0\Rightarrow -3a+b+18=0\ (1)$$

بعلاوه چون تابع $f(x)$ در اطراف ریشه‌ی $x=-2$ تغییر علامت نداده است، پس $x=-2$ ریشه‌ی مضاعف معادله‌ی $f(x)=0$ می‌باشد و لذا $x=-2$ باید ریشه‌ی $2x^2+ax+b=0$ نیز باشد، پس:

$$2(-2)^2-2a+b=0\Rightarrow -2a+b+8=0\ \ (2)$$

حال دستگاه متشکل از معادله‌های (۱) و (۲) را حل می‌کنیم:

$$\begin{cases}-3a+b=-18\\-2a+b=-8\end{cases}\xrightarrow{\times(-1)}\begin{cases}-3a+b=-18\\2a-b=8\end{cases}$$

$$\xrightarrow{+}-a=-10\Rightarrow a=10$$

با جای‌گذاری $a=10$ در یکی از معادلات، $b=12$ حاصل می‌شود، پس:

$$\frac{a+b}{2}=11$$

22 (۲) نقطهٔ مورد نظر را $B(x\,,x^2)$ در نظر می‌گیریم:

$$|AB|=\sqrt{13}\Rightarrow\sqrt{(x-0)^2+(x^2-1)^2}=\sqrt{13}\Rightarrow x^4-x^2+1=13$$

$$\Rightarrow x^4-x^2-12=0\Rightarrow(x^2-4)(x^2+3)=0\Rightarrow x^2=4$$

$$\Rightarrow\begin{cases}x=2\Rightarrow B(2\,,4)\\x=-2\Rightarrow B=(-2\,,4)\end{cases}$$

مجموع طول و عرض نقطهٔ مورد نظر ۶ یا ۲ است.

23 (۴)

$$D:2x-3\geq0\Rightarrow x\geq\frac{3}{2}\Rightarrow|\underbrace{x+3}_{\text{مثبت}}|=x+3$$

$$\sqrt{2x-3}-x=x+3\Rightarrow\sqrt{2x-3}=2x+3\xrightarrow{\text{توان دو}}$$

$$2x-3=4x^2+12x+9\Rightarrow 4x^2+10x+12=0\Rightarrow 2x^2+5x+6=0$$

$$\Rightarrow\Delta=25-4\times2\times6<0$$

پس معادله فاقد ریشه است.

24 (۳)

$$\frac{1}{(x-1)(x-2)}+\frac{1}{(x-1)(x+3)}=\frac{1}{x(x+3)}$$

$$\Rightarrow\frac{x+3+x-2}{(x-1)(x-2)(x+3)}=\frac{1}{x(x+3)}$$

$$\Rightarrow\frac{2x+1}{(x-1)(x-2)(x+3)}-\frac{1}{x(x+3)}=0$$

$$\Rightarrow\frac{x(2x+1)-(x-1)(x-2)}{x(x-1)(x-2)(x+3)}=0\Rightarrow 2x^2+x-(x^2-3x+2)=0$$

$$\Rightarrow 2x^2+x-x^2+3x-2=0\Rightarrow x^2+4x-2=0$$

$$\Delta=16-4\times1\times(-2)=24\Rightarrow x=\frac{-4\pm2\sqrt{6}}{2}=-2\pm\sqrt{6}$$

هر دو جواب قابل قبول است.

25 (۱)

$$X=\sqrt[4]{\sqrt[3]{4^3\times16}}\times(4^{-1})^{\left(-\frac{1}{4}\right)}=\sqrt[12]{2^{10}}\times(2^{-2})^{\left(-\frac{1}{4}\right)}$$

$$=2^{\frac{10}{12}}\times2^{\frac{1}{2}}=2^{\frac{5}{6}}\times2^{\frac{1}{2}}=2^{\frac{8}{6}}=2^{\frac{4}{3}}$$

$$\Rightarrow 2^{\frac{1}{3}}\times\left(\frac{1}{X}\right)^{-\frac{3}{4}}=2^{\frac{1}{3}}\times(X^{-1})^{\left(-\frac{3}{4}\right)}=2^{\frac{1}{3}}\times(X)^{\frac{3}{4}}$$

$$=2^{\frac{1}{3}}\times(2^{\frac{4}{3}})^{\frac{3}{4}}=2^{\frac{1}{3}}\times2^1=2^{\frac{4}{3}}$$

$$\Rightarrow\frac{2^{\frac{4}{3}}}{\sqrt[3]{2}}=\frac{2^{\frac{4}{3}}}{2^{\frac{1}{3}}}=2^{\left(\frac{4}{3}-\frac{1}{3}\right)}=2^{\frac{3}{3}}=2^1=2$$

26 (۴)

$$a^4+2a^3-a-2=a^3(a+2)-(a+2)$$

$$\xrightarrow{\text{فاکتور از }(a+2)}(a+2)(a^3-1)=(a+2)(a-1)(a^2+a+1)$$

بنابراین تنها عامل گزینهٔ (۴) وجود ندارد.

۴ 27

$$a^3-b^3=(a-b)(a^2+ab+b^2)\ \ (*)$$

$$(a-b)^2=a^2+b^2-2ab \xrightarrow[a^2+b^2=7]{a-b=-\sqrt{3}} (-\sqrt{3})^2=7-2ab$$

$$\Rightarrow 3=7-2ab \Rightarrow -4=-2ab \Rightarrow ab=2$$

$$\xrightarrow{(*)} a^3-b^3=(-\sqrt{3})(7+2)=-9\sqrt{3}$$

۴ 28 **روش اول:** سمت راست تساوی را مخرج‌مشترک می‌گیریم و با سمت چپ آن متحد قرار می‌دهیم.

$$\frac{3}{x^3+1}=\frac{A(x^2-x+1)+(x+1)(Bx+C)}{x^3+1}$$

$$\Rightarrow (Bx+C)(x+1)+A(x^2-x+1)\equiv 3$$

عبارت بالا یک اتحاد است و به‌ازای هر x برقرار است.

$$x=-1\Rightarrow 3A=3\Rightarrow A=1$$

$$x=0\Rightarrow C+A=3 \xrightarrow{A=1} C=2$$

$$x=1\Rightarrow (B+C)(2)+A=3\Rightarrow 2B+4+1=3\Rightarrow 2B=-2$$

$$\Rightarrow B=-1$$

پس:

$$(A,B,C)=(1,-1,2)$$

روش دوم: اگر دو عبارت هم‌ارز یا متحد باشند ضرایب متغیرهای هم‌درجه در دوطرف رابطه، برابر می‌باشند، بنابراین:

$$A(x^2-x+1)+(Bx+C)(x+1)\equiv 3$$

$$\Rightarrow (A+B)x^2+(B+C-A)x+A+C\equiv 3$$

$$\Rightarrow \begin{cases} A+B=0\Rightarrow A=-B \\ B+C-A=0\Rightarrow C=A-B=-B-B=-2B \\ A+C=3\Rightarrow -B-2B=-3B=3\Rightarrow B=-1,\ A=1,\ C=2 \end{cases}$$

$$\Rightarrow (A,B,C)=(1,-1,2)$$

۲ 29 جواب معادله در معادله صدق می‌کند، بنابراین داریم:

$$x^2-5x+a=1 \xrightarrow{x=2} (2)^2-5(2)+a-1=0$$

$$\Rightarrow 4-10+a-1=0\Rightarrow a-7=0\Rightarrow a=7$$

$$\Rightarrow \text{معادله}: x^2-5x+7-1=0\Rightarrow x^2-5x+6=0$$

$$\Rightarrow (x-3)(x-2)=0\Rightarrow \begin{cases} x=2 \\ x=3 \ \text{ریشه‌ی دیگر:} \end{cases}$$

۴ 30

$$6+x-x^2=0\Rightarrow -(x^2-x-6)=0$$

$$\Rightarrow -(x-3)(x+2)=0\Rightarrow \begin{cases} x=3 \\ x=-2 \end{cases}$$

$$x^2-x+1=0 \xrightarrow[a>0]{\Delta<0} x^2-x+1>0$$

x		−۲		۳	
$6+x-x^2$	−	۰	+	۰	−
x^2-x+1	+		+		+
P(x)	−	۰	+	۰	−

بنابراین $P(x)$ حداکثر در بازه‌ی $[-2,3]$ نامنفی است.

۴ 31 می‌دانیم:

$$|x|<a \xleftrightarrow{a>0} -a<x<a$$

بنابراین:

$$\left|\frac{2x-1}{1-x}\right|<2\Rightarrow \underbrace{-2<\frac{2x-1}{1-x}}_{(1)}\overbrace{<2}^{(2)}$$

$$(1):\frac{2x-1}{1-x}>-2\Rightarrow \frac{2x-1}{1-x}+2>0\Rightarrow \frac{2x-1+2-2x}{1-x}>0$$

$$\Rightarrow \frac{1}{1-x}>0\Rightarrow 1-x>0\Rightarrow x<1\ (1)$$

$$(2):\frac{2x-1}{1-x}<2\Rightarrow \frac{2x-1}{1-x}-2<0\Rightarrow \frac{2x-1-2+2x}{1-x}<0$$

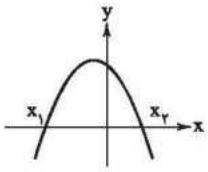
$$\Rightarrow \frac{4x-3}{1-x}<0\Rightarrow \begin{cases} 4x-3=0\Rightarrow x=\frac{3}{4} \\ 1-x=0\Rightarrow x=1: \ \text{ریشه‌ی مخرج} \end{cases}$$

x		$\frac{3}{4}$		1	
$4x-3$	−	۰	+		+
$1-x$	+		+	۰	−
$\frac{4x-3}{1-x}$	−	۰	+	ت ن	−

$$\Rightarrow \text{مجموعه‌جواب}=(-\infty,\frac{3}{4})\cup(1,+\infty)\ (2)$$

$$\xrightarrow{(1)\cap(2)} x\in(-\infty,\frac{3}{4})\Rightarrow x<\frac{3}{4}$$

32 (۱) با توجه به صورت مسئله، شکل زیر قابل رسم است و حتماً یکی از ریشه‌های معادلهٔ $-x^2+mx+n=0$ مثبت و دیگری منفی است و داریم:



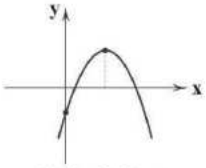
$$-x^2+mx+n=-(x-x_1)(x-x_2)\Rightarrow n=-\overbrace{x_1x_2}$$

پس برای آن‌که n بیشترین مقدار خود را داشته باشد، باید x_1x_2 کم‌ترین مقدار خود را داشته باشند، چون x_1 و x_2 مختلف‌العلامت هستند، این حالت وقتی امکان دارد که x_1 و x_2 همان ۲− و ۱ باشند:

$$\Rightarrow -x^2+mx+n=-(x+2)(x-1)$$

$$\Rightarrow -x^2+mx+n=-x^2-x+2\Rightarrow\begin{cases}m=-1\\n=2\end{cases}$$

33 (۱) با توجه به علامت‌های a، b و c می‌توان به جواب مورد نظر رسید:



$$y=ax^2+bx+c$$

c: عرض از مبدأ = محل تلاقی با محور yها $\Leftarrow c<0 \Leftarrow$ حذف گزینهٔ (۳)

سهمی رو به پایین $\Leftarrow a<0 \Leftarrow$ حذف گزینهٔ (۴)

مختصات طول رأس سهمی:

$$x=\frac{-b}{2a<0}>0\Rightarrow -b<0\Rightarrow b>0\Rightarrow$$ حذف گزینهٔ (۲)

بنابراین با توجه به علامت‌های به دست‌آمده، جواب گزینهٔ (۱) می‌باشد.

34 (۳) تابع $f(x)$ یک ریشهٔ ساده $x=1$ دارد، در نتیجه ریشه‌های صورت و مخرج $g(x)$ در $x=1$ مشترک خواهد بود. اما دقت کنید که $x=1$ ریشهٔ مضاعف مخرج و ریشهٔ سادهٔ صورت است. بنابراین $x=1$، مانند ریشهٔ ساده عمل می‌کند.

$$g(x)=\frac{f(x)}{(x-1)^2}$$

x		1	
f(x)	−		+
$(x-1)^2$	+		+
g(x)	−	ت.ن	+

$$g(x)>0\Rightarrow x>1$$

35 (۳) $y=x^2-2ax\Rightarrow$ رأس $A(a,-a^2)$

رأس را روی خط $2x=y+63$ قرار می‌دهیم.

$$2a=-a^2+63\Rightarrow a^2+2a-63=0\Rightarrow(a+9)(a-7)=0$$

$$\xrightarrow{a<0}a=-9$$

36 (۳) ریشهٔ هر معادله در خود معادله صدق می‌کند.

$$(1-p)^2-2(1-p)-3=0\Rightarrow(1-p+1)(1-p-3)=0$$

$$\Rightarrow(2-p)(-2-p)=0\Rightarrow p=2\,,\,p=-2$$

37 (۲) نقاط داده‌شده را در معادلهٔ سهمی صدق می‌دهیم.

$$\begin{cases}0=a+b+c\\-6=a-b+c\\6=4a+2b+c\end{cases}\begin{matrix}\xrightarrow{-}6=2b\Rightarrow b=3\\\xrightarrow{-}12=3a+3b\end{matrix}$$

$$12=3a+3b\Rightarrow 4=a+b\xrightarrow{b=3}a=1$$

$$a+b+c=0\xrightarrow{a=1,\,b=3}c=-4$$

پس معادلهٔ سهمی $y=x^2+3x-4$ خواهد بود.

$$\text{عرض رأس}=\frac{4ac-b^2}{4a}=\frac{4(1)(-4)-9}{4}=\frac{-25}{4}=-6/25$$

38 (۳)

$$\frac{2x^2-x-15}{3x^2-x-10}<0\Rightarrow\frac{(x-3)(2x+5)}{(x-2)(3x+5)}<0$$

x	$-\infty$		$-\frac{5}{2}$		$-\frac{5}{3}$		2		3		$+\infty$
P(x)		+	0	−	ت ن	+	ت ن	−	0	+	

جواب نامعادله با شرط $x>1$ برابر $(2\,,3)$ است.

39 (۴) شرط برقراری این نامعادله این است که $x>0$ باشد.

$$|3x^2-x|<2x\xrightarrow{x>0}-2x<3x^2-x<2x$$

$$\xrightarrow[+x]{x>0}-2<3x-1<2\xrightarrow{+1}-1<3x<3\xrightarrow{\div 3}-\frac{1}{3}<x<1$$

$$\xrightarrow{x>0}0<x<1$$

بخشی از جواب $(\frac{1}{2}\,,1)$ است.

40 (۱) در هر دو عبارت باید $\Delta<0$ و $a>0$ باشد.

$$\begin{cases}\Delta_1=1-4m<0\Rightarrow m>\frac{1}{4}\\\Delta_2=1-8m<0\Rightarrow m>\frac{1}{8}\end{cases}$$

اشتراک جواب‌ها $m>\frac{1}{4}$ است.

www.mapedu.ir

41 ۲ معادلهٔ خطی که از نقاط $(-1,1)$ و $(5,3)$ عبور می‌کند را می‌نویسیم:

$$m=\frac{5+1}{3-1}=3 \Rightarrow y+1=3(x-1) \Rightarrow y=3x-4$$

حال نقطهٔ $(a,4a)$ را در تابع خطی صدق می‌دهیم:

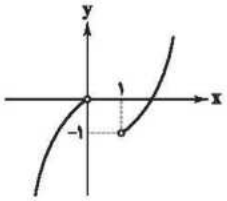
$$4a=3a-4 \Rightarrow a=-4$$

اگر $a=-4$ باشد، نقطهٔ $(a+1,-13)$ به صورت $(-3,-13)$ تبدیل می‌شود و در خط $y=3x-4$ صدق می‌کند.

42 ۴ تابع را به صورت زیر بازنویسی می‌کنیم:

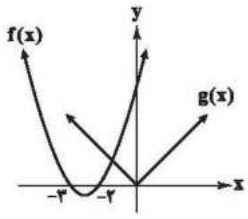
$$f(x)=\begin{cases}-x^2+2x & x<0\\ x^2-2x & x>1\end{cases}$$

نمودار این تابع به صورت زیر خواهد بود.



برد تابع موردنظر $\mathbb{R}$ است.

43 ۳ دو تابع در دو نقطه با طول‌های منفی متقاطع‌اند. اگر $f(x)$ را حداقل سه واحد به سمت راست منتقل کنیم، آن‌گاه طول نقاط برخورد نامنفی خواهد شد.



44 ۱ اگر نصف ضلع مربع x باشد، آن‌گاه ضلع مربع و مثلث هر دو برابر $2x$ خواهد بود و مساحت آن به عنوان یک تابع برابر است با:

$$f(x)=(2x)^2+(2x)^2\frac{\sqrt{3}}{4}=4x^2+x^2\sqrt{3}=(4+\sqrt{3})x^2$$

45 ۴ معادله را به صورت زیر مرتب می‌کنیم:

$$(x+\frac{2}{x})^4-3(x+\frac{2}{x})^2-4=0$$

با انتخاب $(x+\frac{2}{x})^2=A$ داریم:

$$A^2-3A-4=0 \Rightarrow A=-1,4$$

$$A=-1 \Rightarrow (x+\frac{2}{x})^2=-1 \Rightarrow x\in\varnothing$$

$$A=4 \Rightarrow (x+\frac{2}{x})^2=4 \Rightarrow \begin{cases}x+\frac{2}{x}=2\\ x+\frac{2}{x}=-2\end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases}x^2-2x+2=0 \Rightarrow \Delta<0\\ x^2+2x+2=0 \Rightarrow \Delta<0\end{cases}$$

بنابراین معادله فاقد ریشهٔ حقیقی است.

46 ۴

$$\sqrt[6]{x+1}+2\sqrt[3]{x+1}=10 \xrightarrow{\sqrt[6]{x+1}=t} t+2t^2=10$$

$$\Rightarrow 2t^2+t-10=0 \Rightarrow (t-2)(2t+5)=0 \Rightarrow \begin{cases}t=2\\ t=-\frac{5}{2}\end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases}\sqrt[6]{x+1}=2 \Rightarrow x+1=64 \Rightarrow x=63 \Rightarrow \frac{x}{3}=21\\ \sqrt[6]{x+1}=-\frac{5}{2} \Rightarrow \text{فاقد ریشهٔ حقیقی}\end{cases}$$

www.mapedu.ir

۴۷ (۴) عبارت داده شده را تعیین علامت می‌کنیم. ضمناً x^4-x^2+1 همواره مثبت است.

$$y=\frac{-x(x^2-2x+1)}{x^4-x^2+1}=\frac{-x(x-1)^2}{x^4-x^2+1}$$

x		0		1	
y	+	0	−	0	−

عبارت y در بازه $(-\infty, 0)$ مثبت است و در نتیجه در هر زیرمجموعه‌ای از آن نیز مثبت است.

۴۸ (۲)

$y=3(x-1)^2+m \Rightarrow$ راس: $A(1, m)$

$y=x^2+mx+n \Rightarrow$ راس: $A(-\frac{m}{2}, \frac{4n-m^2}{4})$

$$\Rightarrow \begin{cases} -\frac{m}{2}=1 \Rightarrow m=-2 \\ \frac{4n-m^2}{4}=m \xrightarrow{m=-2} \frac{4n-4}{4}=-2 \Rightarrow n=-1 \end{cases}$$

حال معادلات دو سهمی را با هم برابر قرار می‌دهیم.

$3(x-1)^2-2=x^2-2x-1$

$\Rightarrow 3x^2-6x+1=x^2-2x-1 \Rightarrow 2x^2-4x+2=0$

$\Rightarrow x^2-2x+1=0 \Rightarrow x=1$

یعنی دو سهمی فقط در رأس مشترکند.

۴۹ (۲)

$$\left|\frac{x-2}{3x-1}\right|>1 \Rightarrow \frac{|x-2|}{|3x-1|}>1 \xrightarrow{x\neq\frac{1}{3}} |x-2|>|3x-1|$$

$\Rightarrow (3x-1-x+2)(3x-1+x-2)<0$

$\Rightarrow (2x+1)(4x-3)<0 \Rightarrow -\frac{1}{2}<x<\frac{3}{4}, x\neq\frac{1}{3}$

۵۰ (۴) مخرج کسر همواره مثبت است. پس کافی است که $(m-4)x-m$ همواره مثبت باشد که این موضوع غیرممکن است زیرا:

$$\begin{cases} m-4=0 \\ -m>0 \end{cases} \xrightarrow{\cap} m\in\varnothing$$

۵۱ (۱)

$g(x)=0 \Rightarrow x=-3, 4$

$x+3=0 \Rightarrow x=-3$

x	$-\infty$		-3		4		$+\infty$
$(x+3)g(x)$		−	0	+	0	−	

با توجه به جدول، عبارت $f(x)$ در بازه $(-3, 4)$ مثبت است، بنابراین در بازه $(-3, 1)$ نیز مثبت خواهد بود.

۵۲ (۱) معادله سهمی را می‌توان به صورت $y=a(x-3)(x+2)$ درنظر گرفت. حال سهمی را از نقطه $(0, -1)$ می‌گذرانیم:

$-1=-6a \Rightarrow a=\frac{1}{6}$

بنابراین معادله سهمی $y=\frac{1}{6}(x^2-x-6)$ خواهد بود.

۵۳ (۱) مختصات رئوس مثلث را به دست می‌آوریم:

$A(2, -9m), B(0, -5m), C(5, 0)$

حال رابطهٔ فیثاغورس را اعمال می‌کنیم: $BC^2=AB^2+AC^2$

$\Rightarrow 25+25m^2=4+16m^2+9+81m^2$

$\Rightarrow (81+16-25)m^2=12 \Rightarrow 72m^2=12$

$\Rightarrow m^2=\frac{1}{6} \xrightarrow{m<0} m=-\frac{1}{\sqrt{6}}$

۵۴ (۲) **روش اول:** معادله را مرتب می‌کنیم:

$x^2-2\alpha x+\alpha^2-\beta^2=0$

اگر ریشه‌ها x_1 و x_2 باشند:

$x_1^2+x_2^2=S^2-2P=(2\alpha)^2-2(\alpha^2-\beta^2)=2(\alpha^2+\beta^2)$

روش دوم:

$$(x-\alpha)^2=\beta^2 \Rightarrow \begin{cases} x-\alpha=\beta \Rightarrow x=\alpha+\beta \\ x-\alpha=-\beta \Rightarrow x=\alpha-\beta \end{cases}$$

$x_1^2+x_2^2=(\alpha-\beta)^2+(\alpha+\beta)^2=2(\alpha^2+\beta^2)$

۵۵ (۲) با فرض $x^2=A$ داریم:

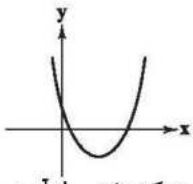
$\frac{A^2}{7}-\frac{A}{13}+0/005=0 \quad (1)$

$\Rightarrow \Delta=\frac{1}{169}-\frac{4\times 0/005}{7}=\frac{1}{169}-\frac{1}{350}>0$

$S=\frac{7}{13}>0, P=\frac{0/005}{\frac{1}{7}}>0$

چون $\Delta>0$، $S>0$ و $P>0$ است پس معادله (۱) دو ریشه مثبت دارد بنابراین معادله اصلی چهار ریشه حقیقی دارد.

۵۶ (۳) نمودار مربوط به سؤال به صورت شکل زیر است. تابع دو صفر مثبت دارد.



$\Delta=(m+1)^2-4m=(m-1)^2>0$

$\Rightarrow m\neq 1 \quad (1)$

$S=m+1>0 \Rightarrow m>-1 \quad (2)$

$P=m>0 \quad (3)$

اشتراک (۱)، (۲) و (۳) برابر $(0, 1)\cup(1, +\infty)$ است، که بخشی از آن در گزینه (۳) آمده است.

۵۷ (۳) α ریشه معادله است.

$\alpha^2-\alpha-1=0 \Rightarrow \alpha^2=\alpha+1$

بنابراین معادله‌ای می‌سازیم که ریشه‌های آن $\alpha+1$ و $\beta+1$ باشد.

$\alpha+\beta=1, \alpha\beta=-1$

$S_{\text{جدید}}=(\alpha+1)+(\beta+1)=3$

$P_{\text{جدید}}=(\alpha+1)(\beta+1)=\alpha+\beta+\alpha\beta+1=1$

معادله جدید: $x^2-3x+1=0$

۴۷ (۴) عبارت داده شده را تعیین علامت می‌کنیم. ضمناً x^4-x^2+1 همواره مثبت است.

$$y=\frac{-x(x^2-2x+1)}{x^4-x^2+1}=\frac{-x(x-1)^2}{x^4-x^2+1}$$

x		0		1	
y	+	0	−	0	−

عبارت y در بازه $(-\infty, 0)$ مثبت است و در نتیجه در هر زیرمجموعه‌ای از آن نیز مثبت است.

۴۸ (۲)

$y=3(x-1)^2+m \Rightarrow$ راس: $A(1, m)$

$y=x^2+mx+n \Rightarrow$ راس: $A(-\frac{m}{2}, \frac{4n-m^2}{4})$

$$\Rightarrow \begin{cases} -\frac{m}{2}=1 \Rightarrow m=-2 \\ \frac{4n-m^2}{4}=m \xrightarrow{m=-2} \frac{4n-4}{4}=-2 \Rightarrow n=-1 \end{cases}$$

حال معادلات دو سهمی را با هم برابر قرار می‌دهیم.

$3(x-1)^2-2=x^2-2x-1$

$\Rightarrow 3x^2-6x+1=x^2-2x-1 \Rightarrow 2x^2-4x+2=0$

$\Rightarrow x^2-2x+1=0 \Rightarrow x=1$

یعنی دو سهمی فقط در رأس مشترکند.

۴۹ (۲)

$$|\frac{x-2}{3x-1}|>1 \Rightarrow \frac{|x-2|}{|3x-1|}>1 \xrightarrow{x\neq\frac{1}{3}} |x-2|>|3x-1|$$

$\Rightarrow (3x-1-x+2)(3x-1+x-2)<0$

$\Rightarrow (2x+1)(4x-3)<0 \Rightarrow -\frac{1}{2}<x<\frac{3}{4}, x\neq\frac{1}{3}$

۵۰ (۴) مخرج کسر همواره مثبت است. پس کافی است که $(m-4)x-m$ همواره مثبت باشد که این موضوع غیرممکن است زیرا:

$$\begin{cases} m-4=0 \\ -m>0 \end{cases} \xrightarrow{\cap} m\in\varnothing$$

۵۱ (۱)

$g(x)=0 \Rightarrow x=-3, 4$

$x+3=0 \Rightarrow x=-3$

x		−∞		−3		4		+∞
(x+3)g(x)	−		0	+	0	−		

با توجه به جدول، عبارت $f(x)$ در بازه $(-3, 4)$ مثبت است، بنابراین در بازه $(-3, 1)$ نیز مثبت خواهد بود.

۵۲ (۱) معادله سهمی را می‌توان به صورت $y=a(x-3)(x+2)$ درنظر گرفت. حال سهمی را از نقطه $(0, -1)$ می‌گذرانیم:

$-1=-6a \Rightarrow a=\frac{1}{6}$

بنابراین معادله سهمی $y=\frac{1}{6}(x^2-x-6)$ خواهد بود.

۵۳ (۱) مختصات رئوس مثلث را به دست می‌آوریم:

$A(2, -9m), B(0, -5m), C(5, 0)$

حال رابطهٔ فیثاغورس را اعمال می‌کنیم: $BC^2=AB^2+AC^2$

$\Rightarrow 25+25m^2=4+16m^2+9+81m^2$

$\Rightarrow (81+16-25)m^2=12 \Rightarrow 72m^2=12$

$\Rightarrow m^2=\frac{1}{6} \xrightarrow{m<0} m=-\frac{1}{\sqrt{6}}$

۵۴ (۲) **روش اول:** معادله را مرتب می‌کنیم:

$x^2-2\alpha x+\alpha^2-\beta^2=0$

اگر ریشه‌ها x_1 و x_2 باشند:

$x_1^2+x_2^2=S^2-2P=(2\alpha)^2-2(\alpha^2-\beta^2)=2(\alpha^2+\beta^2)$

روش دوم:

$$(x-\alpha)^2=\beta^2 \Rightarrow \begin{cases} x-\alpha=\beta \Rightarrow x=\alpha+\beta \\ x-\alpha=-\beta \Rightarrow x=\alpha-\beta \end{cases}$$

$x_1^2+x_2^2=(\alpha-\beta)^2+(\alpha+\beta)^2=2(\alpha^2+\beta^2)$

۵۵ (۲) با فرض $x^2=A$ داریم:

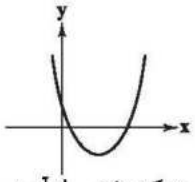
$\frac{A^2}{7}-\frac{A}{13}+0/005=0 \quad (1)$

$\Rightarrow \Delta=\frac{1}{169}-\frac{4\times 0/005}{7}=\frac{1}{169}-\frac{1}{350}>0$

$S=\frac{7}{13}>0, P=\frac{0/005}{\frac{1}{7}}>0$

چون $\Delta>0$، $S>0$ و $P>0$ است پس معادله (۱) دو ریشه مثبت دارد بنابراین معادله اصلی چهار ریشه حقیقی دارد.

۵۶ (۳) نمودار مربوط به سؤال به صورت شکل زیر است. تابع دو صفر مثبت دارد.



$\Delta=(m+1)^2-4m=(m-1)^2>0$

$\Rightarrow m\neq 1 \quad (1)$

$S=m+1>0 \Rightarrow m>-1 \quad (2)$

$P=m>0 \quad (3)$

اشتراک (۱)، (۲) و (۳) برابر $(0, 1)\cup(1, +\infty)$ است، که بخشی از آن در گزینه (۳) آمده است.

۵۷ (۳) α ریشه معادله است.

$\alpha^2-\alpha-1=0 \Rightarrow \alpha^2=\alpha+1$

بنابراین معادله‌ای می‌سازیم که ریشه‌های آن $\alpha+1$ و $\beta+1$ باشد.

$\alpha+\beta=1, \alpha\beta=-1$

$S_{\text{جدید}}=(\alpha+1)+(\beta+1)=3$

$P_{\text{جدید}}=(\alpha+1)(\beta+1)=\alpha+\beta+\alpha\beta+1=1$

معادله جدید: $x^2-3x+1=0$

۳ ۵۸ $y=x^2-2ax \Rightarrow$ رأس $A(a\,,-a^2)$

رأس را روی خط $2x=y+63$ قرار می‌دهیم.

$$2a=-a^2+63 \Rightarrow a^2+2a-63=0 \Rightarrow (a+9)(a-7)=0$$

$$\xrightarrow{a<0} a=-9$$

۳ ۵۹ ریشهٔ هر معادله در خود معادله صدق می‌کند.

$$(1-p)^2-2(1-p)-3=0 \Rightarrow (1-p+1)(1-p-3)=0$$

$$\Rightarrow (2-p)(-2-p)=0 \Rightarrow p=2\,,\ p=-2$$

۲ ۶۰ نقاط داده‌شده را در معادلهٔ سهمی صدق می‌دهیم.

$$\begin{cases} 0=a+b+c \\ -6=a-b+c \xrightarrow{-} 6=2b \Rightarrow b=3 \\ 6=4a+2b+c \xrightarrow{-} 12=3a+3b \end{cases}$$

$$12=3a+3b \Rightarrow 4=a+b \xrightarrow{b=3} a=1$$

$$a+b+c=0 \xrightarrow{a=1\,,\,b=3} c=-4$$

پس معادلهٔ سهمی $y=x^2+3x-4$ خواهد بود.

$$\text{عرض رأس}=\frac{4ac-b^2}{4a}=\frac{4(1)(-4)-9}{4}=\frac{-25}{4}=-6/25$$

۳ ۶۱

$$\frac{2x^2-x-15}{3x^2-x-10}<0 \Rightarrow \frac{(x-3)(2x+5)}{(x-2)(3x+5)}<0$$

x	$-\infty$		$-\frac{5}{2}$		$-\frac{5}{3}$		2		3		$+\infty$
$P(x)$		+	0	−	ت ن	+	ت ن	−	0	+	

جواب نامعادله با شرط $x>1$ برابر $(2\,,3)$ است.

۴ ۶۲ شرط برقراری این نامعادله این است که $x>0$ باشد.

$$|3x^2-x|<2x \xrightarrow{x>0} -2x<3x^2-x<2x$$

$$\xrightarrow[\div x]{x>0} -2<3x-1<2 \xrightarrow{+1} -1<3x<3 \xrightarrow{\div 3} -\frac{1}{3}<x<1$$

$$\xrightarrow{x>0} 0<x<1$$

بخشی از جواب $(\frac{1}{2}\,,1)$ است.

۱ ۶۳ در هر دو عبارت باید $\Delta<0$ و $a>0$ باشد.

$$\begin{cases} \Delta_1=1-4m<0 \Rightarrow m>\frac{1}{4} \\ \Delta_2=1-8m<0 \Rightarrow m>\frac{1}{8} \end{cases}$$

اشتراک جواب‌ها $m>\frac{1}{4}$ است.

۴ ۶۴ معادله را به صورت زیر مرتب می‌کنیم:

$$(x+\frac{2}{x})^4-3(x+\frac{2}{x})^2-4=0$$

با انتخاب $(x+\frac{2}{x})^2=A$ داریم:

$$A^2-3A-4=0 \Rightarrow A=-1\,,4$$

$$A=-1 \Rightarrow (x+\frac{2}{x})^2=-1 \Rightarrow x\in\varnothing$$

$$A=4 \Rightarrow (x+\frac{2}{x})^2=4 \Rightarrow \begin{cases} x+\frac{2}{x}=2 \\ x+\frac{2}{x}=-2 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x^2-2x+2=0 \Rightarrow \Delta<0 \\ x^2+2x+2=0 \Rightarrow \Delta<0 \end{cases}$$

بنابراین معادله فاقد ریشهٔ حقیقی است.

۴ ۶۵

$$\sqrt[6]{x+1}+2\sqrt[3]{x+1}=10 \xrightarrow{\sqrt[6]{x+1}=t} t+2t^2=10$$

$$\Rightarrow 2t^2+t-10=0 \Rightarrow (t-2)(2t+5)=0 \Rightarrow \begin{cases} t=2 \\ t=-\frac{5}{2} \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \sqrt[6]{x+1}=2 \Rightarrow x+1=64 \Rightarrow x=63 \Rightarrow \frac{x}{3}=21 \\ \sqrt[6]{x+1}=-\frac{5}{2} \Rightarrow \text{فاقد ریشهٔ حقیقی} \end{cases}$$