پاسخنامه

ریاضی

احتمال

www.mapedu.ir

کانون
فرهنگی
آموزش
قلم‌چی

www.mapedu.ir

1 – گزینهٔ «۱» *(علی فاجیان)*

بررسی گزینه‌ها:

گزینهٔ «۱»:

$$\binom{۶}{۱}\times\binom{۶}{۱}=۳۶$$

گزینهٔ «۲»: $\binom{۶}{۲}=\frac{۶\times۵}{۲\times۱}=۱۵$

گزینهٔ «۳»: $\binom{۶}{۱}\binom{۵}{۱}=۳۰$

گزینهٔ «۴»: $\binom{۶}{۱}=۶$

(احتمال) (ریاضی ۱، صفحه‌های ۱۴۲ تا ۱۴۶)

---

2 – گزینهٔ «۲» *(نیما کدیوریان)*

با توجه به رابطهٔ احتمال اجتماع دو پیشامد داریم:

$$P(A'\cup B)=P(A')+P(B)-P(A'\cap B)=(۱-P(A))+P(B)$$

$$-P(B-A)=۱-P(A)+P(B)-P(B)+P(A\cap B)$$

$$P(A'\cup B)=۱-۰/۳+۰/۱=۰/۸$$

(احتمال) (ریاضی ۱، صفحه‌های ۱۴۲ تا ۱۵۱)

---

3 – گزینهٔ «۴» *(پویان طهرانیان)*

سکه ۵ بار پرتاب شده است، پس $n(S)=۲^۵=۳۲$. از طرفی ۲ رو یا ۲ پشت متوالی نباید ظاهر شود، پس، روها و پشت‌ها باید یکی در میان قرار بگیرند یعنی یکی از حالت‌های زیر:

$$A=\{(\text{ر},\text{پ},\text{ر},\text{پ},\text{ر})\ \text{و}\ (\text{پ},\text{ر},\text{پ},\text{ر},\text{پ})\}\Rightarrow n(A)=۲$$

$$\Rightarrow P(A)=\frac{n(A)}{n(S)}=\frac{۲}{۳۲}=\frac{۱}{۱۶}$$

(احتمال) (ریاضی ۱، صفحه‌های ۱۴۲ تا ۱۵۱)

---

4 – گزینهٔ «۱» *(اکبر کلاه‌ملکی)*

هر چهار سکه یکسان فقط دو حالت دارد: (ر، ر، ر، ر) و (پ، پ، پ، پ)، هم‌چنین یکسان‌بودن دو عدد روشدهٔ تاس شش حالت دارد:

$$(۱,۱),(۲,۲),(۳,۳),(۴,۴),(۵,۵),(۶,۶)$$

$$n(S)=۲^۴\times۶^۲$$

$$n(A)=۲\times۶$$

$$\Rightarrow P(A)=\frac{n(A)}{n(S)}=\frac{۲\times۶}{۲^۴\times۶^۲}=\frac{۱}{۲^۳\times۶}=\frac{۱}{۴۸}$$

(احتمال) (ریاضی ۱، صفحه‌های ۱۴۲ تا ۱۵۱)

---

5 – گزینهٔ «۲» *(محمدحسن سلامی‌حسینی)*

۵ نفر را از بین ۱۲ نفر انتخاب می‌کنیم پس تعداد اعضای فضای نمونه‌ای برابر است با:

$$n(S)=\binom{۱۲}{۵}=\frac{۱۲!}{۵!\times۷!}=\frac{۱۲\times۱۱\times۱۰\times۹\times۸}{۵\times۴\times۳\times۲\times۱}=۱۱\times۹\times۸$$

$$n(A)=\underbrace{\binom{۴}{۲}}_{\text{انتخاب دو شهر که می‌خواهیم دو نفر انتخاب شود.}}\underbrace{\binom{۳}{۲}\binom{۳}{۲}}_{\text{انتخاب دو نفر از هر دو شهر}}\underbrace{\binom{۲}{۱}}_{\text{انتخاب شهر سوم از دو شهرباقی‌مانده}}\underbrace{\binom{۳}{۱}}_{\text{انتخاب نفر آخر}}=۶\times۳\times۳\times۲\times۳$$

$$P(A)=\frac{۶\times۳\times۳\times۲\times۳}{۱۱\times۹\times۸}=\frac{۹}{۲۲}$$

(احتمال) (ریاضی ۱، صفحه‌های ۱۴۲ تا ۱۵۱)

---

6 – گزینهٔ «۴» *(سروش موئینی)*

حالت‌هایی را که مجموع تاس‌ها برابر با ۱۲,۱۰,۸,۶,۵,۴,۲ است، مطلوب سؤال می‌باشد که به ترتیب ۱,۳,۵,۵,۴,۳,۱ حالت دارند.

پس: $P=\frac{۲۲}{۳۶}=\frac{۱۱}{۱۸}$ *(احتمال) (ریاضی ۱، صفحه‌های ۱۴۲ تا ۱۵۱)*

---

7 – گزینهٔ «۱» *(بابک سادات)*

با انتخاب ۳ حرف از ۵ حرف و همراه دو رقم دیگر داریم:

$$\text{فضای نمونه‌ای}\ n(S)=\overset{\text{انتخاب ۳ حرف از ۵ حرف}}{\binom{۵}{۳}}\times۵!=۱۰\times۵!$$

در پیشامد مطلوب، حرف بین ارقام ۱ و ۹ به $\binom{۵}{۱}=۵$ حالت انتخاب می‌شود و دو رقم نیز $۲!$ حالت جایگشت دارند، پس به $۵\times۲!=۱۰$ حالت، جعبه‌ای به فرم $\boxed{۱\bigcirc۹}$ یا $\boxed{۹\bigcirc۱}$ می‌سازیم. حال باید ۲ حرف دیگر انتخاب کنیم که به $\binom{۴}{۲}=۶$ حالت صورت می‌گیرد. در آخر جایگشت این ۲ حرف را با جعبه درنظر می‌گیریم که به $۳!=۶$ حالت خواهد بود؛ پس:

$$\text{پیشامد مطلوب}:\ n(A)=(۵\times۲!)\times\binom{۴}{۲}\times۳!=۱۰\times۶\times۶=۳۶۰$$

$$\Rightarrow P(A)=\frac{n(A)}{n(S)}=\frac{۳۶۰}{۱۰\times۵!}=\frac{۳۶۰}{۱۰\times۱۲۰}=\frac{۳}{۱۰}=۳۰\%$$

(احتمال) (ریاضی ۱، صفحه‌های ۱۴۲ تا ۱۵۱)

---

8 – گزینهٔ «۳» *(امیرهوشنگ انصاری)*

در صورت سؤال شرط «مجموع دو تاس ۸» آمده است پس فضای نمونه‌ای محدود می‌شود. $n(S)=\{(۲,۶)(۶,۲)(۳,۵)(۵,۳)(۴,۴)\}$ مجموع ۸

حالا در این فضای محدودشده تعداد آنهایی را که عدد اول در تاس سفید بیاید، می‌شماریم:

$$n(A)=\{(۲,۶)(۳,۵)(۵,۳)\}$$

$$P(A)=\frac{n(A)}{n(S)}=\frac{۳}{۵}=۰/۶$$

(احتمال) (ریاضی ۲، صفحه‌های ۱۴۴ تا ۱۵۲)

---

9 – گزینهٔ «۲» *(فرشاد حسن‌زاده)*

کل حالات ممکن $\binom{۱۶}{۳}$ و حالات مطلوب $۸\times\binom{۴}{۳}$ است. (۸ جمع تعداد ردیف و ستون، $\binom{۴}{۳}$ انتخاب ۳ سوراخ از ۴ سوراخ هم‌ردیف یا هم‌ستون است) پس:

$$\frac{۸\times\binom{۴}{۳}}{\binom{۱۶}{۳}}=\frac{۸\times۴}{\frac{۱۶\times۱۵\times۱۴}{۶}}=\frac{۲}{۳۵}$$

(احتمال) (ریاضی ۱، صفحه‌های ۱۴۲ تا ۱۵۱)

---

10 – گزینهٔ «۴» *(محمدابراهیم توزنده‌داری)*

مجموع اعداد روشدهٔ دو تاس باید ۴ باشد، بنابراین داریم:

$$\text{مجموع ۴}=\{\overset{\text{تاس اول}}{(۱}\ ,\ \overset{\text{تاس دوم}}{۳)}\ \text{یا}\ (۲\ ,\ ۲)\ \text{یا}\ (۳\ ,\ ۱)\}$$

$$\frac{۲}{۶}\times\frac{۳}{۶}+\frac{۱}{۶}\times\frac{۱}{۶}+\frac{۱}{۶}\times\frac{۱}{۶}=\frac{۸}{۳۶}=\frac{۲}{۹}$$

(احتمال) (ریاضی ۱، صفحه‌های ۱۴۲ تا ۱۵۱)

11 – گزینهٔ «۳» (فرشاد صدیقی‌فر)

به زبان ساده در ۴ مهره اول باید ۱ مهره سفید خارج شود و در انتخاب پنجم مهرهٔ سفید دوم خارج شود:

سفید ۳ تا غیرسفید مهره سفید دوم

$$\frac{\binom{۲}{۱}\binom{۶}{۳}}{\binom{۸}{۴}}\times\frac{۱}{۴}=\frac{۲\times۲۰}{۷\times۱۰}\times\frac{۱}{۴}=\frac{۱}{۷}$$

(احتمال) (ریاضی ۱، صفحه‌های ۱۴۲ تا ۱۵۱)

---

12 – گزینهٔ «۳» (امیرهوشنگ انصاری)

در مجموعهٔ اعداد طبیعی یک رقمی $\{۱,۲,...,۹\}$ ۴ عدد زوج و ۵ عدد فرد وجود دارد. در ضمن مجموع ۶ عدد وقتی زوج است که تعداد فردهای انتخاب شده زوج باشد.

$P(\text{مجموع ۶ عدد زوج}) = P(\text{۴ فرد و ۲ زوج یا ۲ فرد و ۴ زوج})$

$$=\frac{\binom{۵}{۲}\binom{۴}{۴}+\binom{۵}{۴}\binom{۴}{۲}}{\binom{۹}{۶}}=\frac{۱۰+۳۰}{۸۴}=\frac{۴۰}{۸۴}=\frac{۱۰}{۲۱}$$

(احتمال) (ریاضی ۱، صفحه‌های ۱۴۲ تا ۱۵۱)

---

13 – گزینهٔ «۲» (علی ماهیان)

می‌خواهیم ببینیم بعد پرتاب چند تیر احتمال برخورد حداقل یک تیر به هدف بالای ۹۸ درصد است. برای راحتی کار تعداد حالتی را که احتمال برخوردنکردن n تیر پشت سر هم به هدف کم‌تر از ۲ درصد باشد، به‌دست می‌آوریم:

احتمال برخورد نکردن: $۱-۰/۷۵=۰/۲۵$

احتمال برخورد نکردن n تیر به هدف: $(۰/۲۵)^n$

$\Rightarrow (۰/۲۵)^n < ۰/۰۲ \Rightarrow n \geq ۳$

$\Rightarrow n = ۳$ حداقل تعداد پرتاب

(احتمال) (ریاضی ۲، صفحه‌های ۱۴۶ تا ۱۵۲)

---

14 – گزینهٔ «۳» (احسان غنی‌زاده)

$n(S)=۶^۳=۲۱۶$

$A=$ مجموع دو تا از تاس‌ها برابر تاس سوم باشد

حالت‌های مختلف را می‌نویسیم، تعداد حالت‌های مختلف هر مورد را می‌نویسیم:

$۱ , ۱ , ۲ \Rightarrow \frac{۳!}{۲!}=۳$

$۱ , ۲ , ۳ \Rightarrow ۳!=۶$

$۱ , ۳ , ۴ \Rightarrow ۳!=۶$

$۱ , ۴ , ۵ \Rightarrow ۳!=۶$

$۱ , ۵ , ۶ \Rightarrow ۳!=۶$

$۲ , ۲ , ۴ \Rightarrow \frac{۳!}{۲!}=۳$

$۲ , ۳ , ۵ \Rightarrow ۳!=۶$

$۲ , ۴ , ۶ \Rightarrow ۳!=۶$

$۳ , ۳ , ۶ \Rightarrow \frac{۳!}{۲!}=۳$

$n(A)=۳+۳+۳+۶+۶+۶+۶+۶+۶=۴۵$

$\Rightarrow P(A)=\frac{n(A)}{n(S)}=\frac{۴۵}{۲۱۶}=\frac{۵}{۲۴}$

(احتمال) (ریاضی ۱، صفحه‌های ۱۴۲ تا ۱۵۱)

---

15 – گزینهٔ «۳» (ساسان سلامیان)

$P(A\cap B')=P(A-B)=P(A)-P(A\cap B)$

$=P(A'\cup B)'=۱-P(A'\cup B)=۰/۵$

$\Rightarrow ۰/۶-P(A\quad B)=۰/۵\Rightarrow P(A\quad B)=۰/۱$

$\Rightarrow P(B|A')=\frac{P(B\cap A')}{P(A')}=\frac{P(B)-P(A\cap B)}{۱-P(A)}$

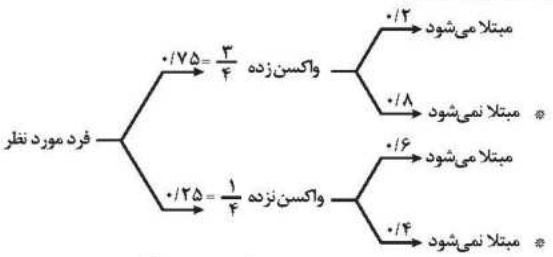
$=\frac{۱-P(B')-P(A\cap B)}{۱-۰/۶}=\frac{۱-۰/۷-۰/۱}{۰/۴}=\frac{۰/۲}{۰/۴}\Rightarrow P(B|A')=۰/۵$

(احتمال) (ریاضی ۱، صفحه‌های ۱۴۲ تا ۱۵۱) (ریاضی ۲، صفحه‌های ۱۴۴ تا ۱۴۶)

---

16 – گزینهٔ «۲» (امیرهوشنگ انصاری)

با توجه نمودار زیر داریم:



$P(\text{مبتلا نشود})=(\frac{۳}{۴}\times۰/۸)+(\frac{۱}{۴}\times۰/۴)=۰/۶+۰/۱=۰/۷$

(احتمال) (ریاضی ۲، صفحه‌های ۱۴۴ تا ۱۴۸)

---

17 – گزینهٔ «۲» (نیما کریوریان)

اگر پیشامد A بخش‌پذیر بودن بر ۳ و پیشامد B مضرب عدد ۵ بودن در مجموعه داده شده باشد:

$P(A-B)+P(B-A)=P(A)+P(B)-۲P(A\cap B)$

$$P(A)=\frac{[\frac{۸۰۰}{۳}]-[\frac{۲۰۰}{۳}]}{۶۰۰}=\frac{۲۶۶-۶۶}{۶۰۰}=\frac{۲۰۰}{۶۰۰}=\frac{۱}{۳}$$

$$P(B)=\frac{[\frac{۸۰۰}{۵}]-[\frac{۲۰۰}{۵}]}{۶۰۰}=\frac{۱۶۰-۴۰}{۶۰۰}=\frac{۱۲۰}{۶۰۰}=\frac{۱}{۵}$$

پیشامد $(A\cap B)$ یعنی عددی از مجموعه که مضرب ۱۵ است:

$$P(A\cap B)=\frac{[\frac{۸۰۰}{۱۵}]-[\frac{۲۰۰}{۱۵}]}{۶۰۰}=\frac{۵۳-۱۳}{۶۰۰}=\frac{۴۰}{۶۰۰}=\frac{۱}{۱۵}$$

$P(A-B)+P(B-A)=P(A)+P(B)-۲P(A\cap B)$

$=\frac{۱}{۳}+\frac{۱}{۵}-\frac{۲}{۱۵}=\frac{۵+۳-۲}{۱۵}=\frac{۶}{۱۵}=\frac{۲}{۵}$

(احتمال) (ریاضی ۱، صفحه‌های ۱۴۲ تا ۱۵۱)

---

18 – گزینهٔ «۳» (سیار راوطلب)

فرض کنیم x مهرهٔ سیاه باید به ظرف دوم اضافه شود، بنابراین:

$P_۱=P(\text{سفید بودن مهره})=\frac{۱}{۲}\times\frac{۵}{۸}+\frac{۱}{۲}\times\frac{۶}{۱۱+x}$

$P_۲=P(\text{سیاه بودن مهره})=\frac{۱}{۲}\times\frac{۳}{۸}+\frac{۱}{۲}\times\frac{۵+x}{۱۱+x}$

$P_۱=P_۲\Rightarrow\frac{۵}{۱۶}+\frac{۶}{۲(۱۱+x)}=\frac{۳}{۱۶}+\frac{۵+x}{۲(۱۱+x)}$

$\Rightarrow\frac{۵+x}{۲(۱۱+x)}-\frac{۶}{۲(۱۱+x)}=\frac{۵}{۱۶}-\frac{۳}{۱۶}$

$\frac{-۱+x}{۲(۱۱+x)}=\frac{۱}{۸}\Rightarrow -۴+۴x=۱۱+x\Rightarrow ۳x=۱۵\Rightarrow x=۵$

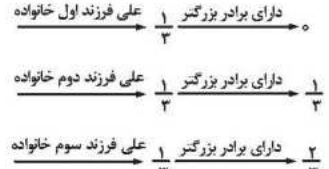
(احتمال) (ریاضی ۲، صفحه‌های ۱۴۴ تا ۱۴۸)

www.mapedu.ir

19 – گزینهٔ «۳»

(سیار راه‌طلب)

با توجه به نمودار درختی زیر داریم:



(۳ حالت برای فرزند اول و سوم داریم که دارای خواهر باشد و در یک حالت از آنها دارای برادر بزرگتر است.)

(۳ حالت داریم که دارای خواهر است و در هر دو حالت دارای برادر بزرگتر است.)

بنابراین:

$$P(A)=(\frac{۱}{۳}\times ۰)+(\frac{۱}{۳}\times\frac{۱}{۳})+(\frac{۱}{۳}\times\frac{۲}{۳})=\frac{۳}{۹}=\frac{۱}{۳}$$

(احتمال) (ریاضی ۲، صفحه‌های ۱۴۴ تا ۱۴۶)

(ریاضی ۳، صفحه‌های ۱۴۴ تا ۱۴۸)

---

20 – گزینهٔ «۲»

(جوانبخش نیکنام)

فضای نمونه‌ای: a باید مخالف صفر باشد.(طبق فرض سؤال، a، b و c متمایزند.)

$$\frac{a}{۶}\frac{b}{۶}\frac{c}{۵}\Rightarrow n(S)=۶\times۶\times۵=۱۸۰$$

پیشامد مطلوب (A): با توجه به شکل $\begin{cases}a>۰\\b<۰\\c<۰\end{cases}$

$$\frac{a}{۳}\frac{b}{۳}\frac{c}{۲}\Rightarrow n(A)=۳\times۳\times۲=۱۸$$

$$\Rightarrow P(A)=\frac{n(A)}{n(S)}=\frac{۱۸}{۱۸۰}=\frac{۱}{۱۰}$$

(احتمال) (ریاضی ۲، صفحه‌های ۱۴۴ تا ۱۵۲) (ریاضی ۱، صفحه‌های ۱۴۲ تا ۱۵۱)

---

21 – گزینهٔ «۲»

(سیار راه‌طلب)

برای حل این سوال باید طبق فرمول دو پیشامد مستقل، حاصل‌ضرب احتمال این دو پیشامد برابر با احتمال اشتراک این دو پیشامد باشد.

	$k=۶$	$k=۷$	$k=۸$	$k=۹$
$n(A)$	۶	۶	۶	۶
$n(B)$	۵	۶	۵	۴
$P(A)$	$\frac{۱}{۶}$	$\frac{۱}{۶}$	$\frac{۱}{۶}$	$\frac{۱}{۶}$
$P(B)$	$\frac{۵}{۳۶}$	$\frac{۶}{۳۶}$	$\frac{۵}{۳۶}$	$\frac{۴}{۳۶}$
$n(A\cap B)$	۱	۱	۱	۱
$P(A\cap B)$	$\frac{۱}{۳۶}$	$\frac{۱}{۳۶}$	$\frac{۱}{۳۶}$	$\frac{۱}{۳۶}$

همان‌طور که از جدول بالا پیداست به‌ازای $k=۷$ رابطهٔ $P(A\cap B)=P(A)\times P(B)$ برقرار است.

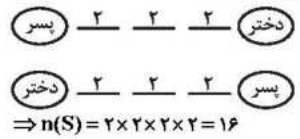
(احتمال) (ریاضی ۲، صفحه‌های ۱۴۴ تا ۱۵۲)

---

22 – گزینهٔ «۳»

(نیما کیوریان)

فضای نمونه‌ای صورت سوال به‌صورت زیر است:



$$\Rightarrow n(S)=۲\times۲\times۲\times۲=۱۶$$

برای اینکه خانواده دارای ۲ فرزند پسر باشد:

$A=\{$(پ، پ)، (پ، د)، (د، پ)، (د، د)، (پ، پ، د، د)، (پ، پ، د، پ)، (پ، د، د، پ)، (پ، د، د، د)، (د، پ، د، د)، (د، پ، پ، د)، (د، د، پ، پ)، (د، د، د، پ)، (د، د، پ، د)، (د، د، د، د)$\}\Rightarrow n(A)=۶$

$$P(A)=\frac{n(A)}{n(S)}=\frac{۶}{۱۶}=\frac{۳}{۸}$$

(ریاضی ۱، صفحه‌های ۱۴۲ تا ۱۵۱)

(احتمال) (ریاضی ۲، صفحه‌های ۱۴۴ تا ۱۵۲)

---

23 – گزینهٔ «۱»

(سهیل حسن‌خان‌پور)

A: ملیت هر ۳تا متفاوت

B: حداقل یک آمریکایی

خواستهٔ سؤال: $P(A|B)=\frac{n(A\cap B)}{n(B)}$

برای محاسبهٔ ساده‌تر $n(B)$ به سراغ متمم می‌رویم. یعنی کل حالات منهای حالاتی که هیچ آمریکایی انتخاب نشود.

$$n(B)=\binom{۱۲}{۳}-\binom{۹}{۳}=\frac{۱۲\times۱۱\times۱۰}{۳\times۲\times۱}-\frac{۹\times۸\times۷}{۳\times۲\times۱}=۲۲۰-۸۴=۱۳۶$$

برای محاسبهٔ $n(A\cap B)$، باید دقیقاً یک آمریکایی انتخاب شود و دو شخص دیگر از دو ملیت مختلف باشند.

$$n(A\cap B)=\binom{۳}{۱}\times[\underbrace{\binom{۳}{۱}\times\binom{۲}{۱}}_{\text{روسی، انگلیسی ایرانی}}+\underbrace{\binom{۴}{۱}\binom{۲}{۱}}_{\text{روسی، ایرانی}}+\underbrace{\binom{۳}{۱}\binom{۴}{۱}}_{\text{انگلیسی}}]$$

$$=۳\times[۶+۸+۱۲]=۳\times۲۶=۷۸$$

$$P(A|B)=\frac{n(A\cap B)}{n(B)}=\frac{۷۸}{۱۳۶}=\frac{۳۹}{۶۸}$$

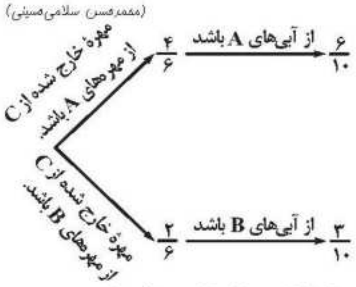
(ریاضی ۱، صفحه‌های ۱۴۲ تا ۱۵۱)

(احتمال) (ریاضی ۲، صفحه‌های ۱۴۴ تا ۱۵۲)

---

24 – گزینهٔ «۲»

(محمدحسن سلامی‌حسینی)



$$P(\text{آبی})=(\frac{۴}{۶}\times\frac{۶}{۱۰})+(\frac{۲}{۶}\times\frac{۳}{۱۰})=\frac{۲۴+۶}{۶۰}=\frac{۱}{۲}$$

(احتمال) (ریاضی ۳، صفحه‌های ۱۴۴ تا ۱۴۸)

---

25 – گزینهٔ «۳»

(سهیل حسن‌خان‌پور)

ابتدا تعداد اعضای فضای نمونه را می‌یابیم. باید این تعداد را در دو حالت محاسبه کنیم:

حالت اول: اگر یکان صفر باشد، برای صدگان ۹ انتخاب و برای دهگان ۸ انتخاب داریم.

حالت دوم: اگر یکان صفر نباشد، برای یکان ۴ حالت، صدگان ۸ حالت (صفر هم نمی‌تواند باشد.) و دهگان نیز ۸ حالت داریم:

$$n(S)=۹\times۸\times۱+۸\times۸\times۴=۳۲۸$$

برای محاسبهٔ حالات مطلوب نیز مسأله را دو دسته می‌کنیم. در دستهٔ اول اگر یکان صفر باشد، صدگان فقط ۱ می‌تواند باشد و برای دهگان نیز ۸ حالت داریم. در دستهٔ دوم، اگر یکان صفر نباشد، برای یکان ۴ حالت داریم و برای صدگان ۲ حالت و دهگان نیز ۸ حالت وجود دارد. (مثلاً اگر یکان ۲ باشد، صدگان ۱ یا ۳ می‌تواند باشد.)

$$n(A)=۱\times۸\times۱+۲\times۸\times۴=۷۲$$

$$P(A)=\frac{n(A)}{n(S)}=\frac{۷۲}{۳۲۸}=\frac{۹}{۴۱}$$

(احتمال) (ریاضی ۱، صفحه‌های ۱۴۲ تا ۱۵۱) (ریاضی ۲، صفحه‌های ۱۴۴ تا ۱۵۲)

www.mapedu.ir

26 – گزینهٔ «۲»

(حمید علیزاده)

احتمال انتخاب یک جعبه برای برداشتن لامپ‌ها برابر $\frac{1}{4}$ است.

در جعبهٔ اول لامپ سالم نداریم پس احتمال سالم بودن دو لامپ از سه لامپ صفر است.

در جعبهٔ دوم همهٔ لامپ‌ها سالم است پس سالم‌بودن فقط ۲ لامپ از ۳ لامپ امکان‌پذیر نیست.

در جعبهٔ سوم احتمال سالم بودن دو لامپ از سه لامپ به‌صورت مقابل است:

$$\frac{\binom{3}{2}\binom{3}{1}}{\binom{6}{3}}=\frac{9}{20}$$

در جعبهٔ چهارم احتمال سالم بودن دو لامپ از سه لامپ به‌صورت مقابل است.

$$\frac{\binom{4}{2}\binom{2}{1}}{\binom{6}{3}}=\frac{12}{20}$$

$$P(A)=\frac{1}{4}\left(\frac{9}{20}+\frac{12}{20}\right)=\frac{21}{80}$$

(احتمال) (ریاضی ۳، صفحه‌های ۱۴۴ تا ۱۴۸)

---

27 – گزینهٔ «۱»

(محمد رفائی)

ضریب هوشی هفت نفر به $7!$ حالت جایگشت دارد. در $\frac{1}{3}$ آن‌ها ضریب هوشی سمانه از مونا و سمیرا بیش‌تر، در $\frac{1}{3}$ آن‌ها ضریب هوشی سمانه بین مونا و سمیرا و در $\frac{1}{3}$ آن‌ها ضریب هوشی سمانه از مونا و سمیرا کم‌تر است، بنابراین: $n(S)=\frac{1}{3}\times 7!$

حال در بین حالاتی که ضریب هوشی سمانه از مونا و سمیرا بیش‌تر است، آن‌هایی را که سمانه نفر دوم بین هفت نفر است، می‌یابیم:

ابتدا یک نفر از چهار نفر را برای جایگاه اول ضریب هوش انتخاب می‌کنیم. برای جایگاه دوم سمانه را قرار می‌دهیم و برای جایگاه سوم تا هفتم باقی افراد به $5!$ حالت جایگشت دارند،

یعنی: $n(A)=\binom{4}{1}\times 1\times 5!$

$$\Rightarrow P(A)=\frac{n(A)}{n(S)}=\frac{\binom{4}{1}\times 5!}{\frac{1}{3}\times 7!}=\frac{4\times 5!}{\frac{1}{3}\times 7!}=\frac{4\times 3}{7\times 6}=\frac{2}{7}$$

(احتمال) (ریاضی ۲، صفحه‌های ۱۴۴ تا ۱۵۲)

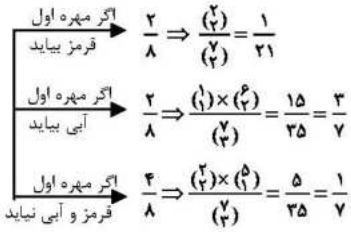
(ریاضی ۱، صفحه‌های ۱۴۲ تا ۱۵۲)

---

28 – گزینهٔ «۱»

(سوپل حسن‌خان‌پور)

مسأله، یک مسأله احتمال کل است و برای حل آن از نمودار درختی استفاده می‌کنیم:



$$\frac{2}{8}\Rightarrow\frac{\binom{2}{2}}{\binom{7}{2}}=\frac{1}{21}$$

$$\frac{2}{8}\Rightarrow\frac{\binom{1}{1}\times\binom{6}{2}}{\binom{7}{3}}=\frac{15}{35}=\frac{3}{7}$$

$$\frac{4}{8}\Rightarrow\frac{\binom{2}{2}\times\binom{5}{1}}{\binom{7}{3}}=\frac{5}{35}=\frac{1}{7}$$

$$\Rightarrow P(\text{خروج هردو مهره آبی})=\frac{2}{8}\times\frac{1}{21}+\frac{2}{8}\times\frac{3}{7}+\frac{4}{8}\times\frac{1}{7}$$

$$=\frac{2}{8}\left(\frac{1}{21}+\frac{9}{21}+\frac{6}{21}\right)=\frac{1}{4}\times\frac{16}{21}=\frac{4}{21}$$

(احتمال) (ریاضی ۳، صفحه‌های ۱۴۴ تا ۱۴۸)

---

29 – گزینهٔ «۴»

(سید بوالفضل نظری)

B : پیشامد چهارعضوی بودن

C : پیشامد زوج بودن حاصل‌ضرب اعضا

تعداد زیرمجموعه‌های حداقل دو عضوی مجموعه A برابر است با:

$$2^6-\left[\binom{6}{0}+\binom{6}{1}\right]=64-(1+6)=57$$

زیرمجموعه‌های صفر عضوی

زیرمجموعه‌های یک‌عضوی

ما به دنبال فضای نمونه‌ای هستیم که در آن حاصل‌ضرب اعضای زیرمجموعه‌های حداقل دو عضوی A زوج باشد بنابراین باید زیرمجموعه‌های دو عضوی $\{5,7\}$، $\{3,7\}$ و $\{3,5\}$ و نیز زیرمجموعه سه عضوی $\{3,5,7\}$ که در آنها حاصل‌ضرب اعضا زوج نیست را از فضای نمونه قبلی جدا کنیم بنابراین فضای نمونه جدید برابر است با:

$$n(S)=57-4=53$$

از طرفی با کمی دقت متوجه می‌شویم که هر زیرمجموعه ۴ عضوی که از مجموعهٔ A انتخاب می‌کنیم، حاصل‌ضرب اعضای آن زوج خواهد بود بنابراین تعداد حالاتی که زیرمجموعه مورد نظر ۴ عضوی باشد و حاصل‌ضرب عضوهای آن زوج باشد برابر $\binom{6}{4}=15$ است.

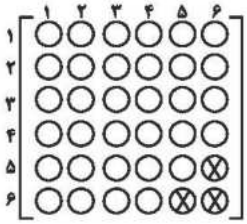
$$P(B|C)=\frac{P(B\cap C)}{P(C)}=\frac{15}{53}$$

(احتمال) (ریاضی ۲، صفحه‌های ۱۴۴ تا ۱۵۲)

---

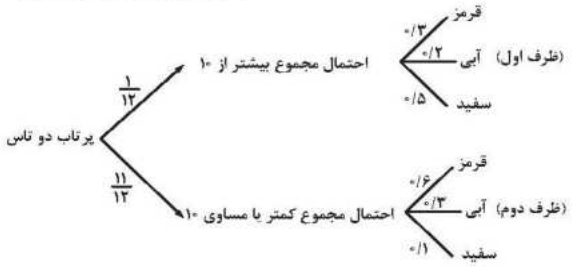
30 – گزینهٔ «۳»

(حمید علیزاده)



$\Longrightarrow$ احتمال مجموع بیشتر از ۱۰ $=\frac{3}{36}=\frac{1}{12}$

احتمال مجموع کوچکتر یا مساوی ۱۰ $=\frac{33}{36}=\frac{11}{12}$



$$P(A)=\frac{1}{12}\times\frac{5}{10}+\frac{11}{12}\times\frac{1}{10}=\frac{5+11}{120}=\frac{16}{120}=\frac{2}{15}$$

(احتمال) (ریاضی ۳، صفحه‌های ۱۴۴ تا ۱۴۸)

www.mapedu.ir

31 ــ گزینهٔ «۱» *(محمدابراهیم توزنده‌جانی)*

باید از بین اعداد ۶،۵،۴،۳،۲،۱، سه عدد را انتخاب کنیم، چون هر انتخاب فقط در یک حالت به‌صورت نزولی قابل چیدن است، بنابراین:

$$P(A)=\frac{\binom{6}{3}}{216}=\frac{20}{216}=\frac{5}{54}$$

(ترکیبی) (ریاضی ۱، صفحه‌های ۴۲ تا ۵۱)

(ریاضی ۳، صفحهٔ ۴۴)

---

32 ــ گزینهٔ «۴» *(احسان غنی‌زاده)*

تعداد حالت‌های کل یعنی $n(S)$ برابر 5^5 است. حالت‌های مطلوب را به‌دست می‌آوریم:

۱) حالت‌هایی که همهٔ فرزندان دختر هستند:

$\frac{5!}{5!}=1 \Rightarrow$ ۱ حالت د ــ د ــ د ــ د ــ د

۲) حالت‌هایی که فقط یک پسر داریم: ۵ حالت $\frac{5!}{4!}=5 \Rightarrow$ د - د - د - د - پ

۳) حالت‌هایی که ۲ پسر داریم ولی نه به‌صورت متوالی

در این حالت در کل $\frac{5!}{2!3!}=10$ حالت داریم که در ۴ حالت دو پسر متوالی هستند بنابراین حالات مد نظر ما $10-4=6$ تا است.

۴) حالت‌هایی که ۳ پسر داریم ولی نه به‌صورت متوالی (۱ حالت) پ - د - پ - د - پ

مجموع حالت‌ها $=1+5+6+1=13$

$\Rightarrow$ احتمال $=\frac{13}{32}$

(ترکیبی) (ریاضی ۱، صفحه‌های ۴۲ تا ۵۱)

(ریاضی ۳، صفحهٔ ۴۴)

---

33 ــ گزینهٔ «۱» *(خجیسته ولی‌زاده)*

$$P(B|A)=\frac{P(A\cap B)}{P(A)}$$

$$0/22=\frac{P(A\cap B)}{0/4}$$

$$\Rightarrow P(A\cap B)=0/088$$

$$P(B|A')=\frac{P(B\cap A')}{P(A')}=\frac{P(B-A)}{1-P(A)}=\frac{P(B)-P(A\cap B)}{1-P(A)}$$

$$=\frac{0/2-0/088}{1-0/4}=\frac{0/112}{0/6}=\frac{14}{75}$$

(ترکیبی) (ریاضی ۲، صفحه‌های ۴۴ تا ۵۲)

(ریاضی ۳، صفحهٔ ۴۴)

---

34 ــ گزینهٔ «۳» *(حمید علیزاده)*

در حالت کلی در پرتاب دو تاس فضای نمونه $n(S)=6^2=36$ است که در نصف حالت‌های آن، جمع دو عدد، زوج و در نصف دیگر، جمع دو عدد، فرد است پس فضای نمونه‌ای جدید ۱۸ عضو دارد.

۶ حالت $\Rightarrow$ $\begin{matrix}(1,2),(1,4),(1,6)\\(2,1),(4,1),(6,1)\end{matrix}$ = حداقل یکی از دو تاس رو شده عدد ۱ باشد

$\Rightarrow$ احتمال مورد نظر $=\frac{6}{18}=\frac{1}{3}$

(احتمال شرطی و پیشامدهای مستقل) (ریاضی ۲، صفحه‌های ۴۴ تا ۵۲)

---

35 ــ گزینهٔ «۱» *(میلاد منصوری)*

$\binom{4}{1}\binom{3}{1}=12$ حالت برای انتخاب دو فرد غیرهمجنس داریم. بعد از انتخاب، به احتمال $\frac{\binom{7}{1}}{7\times7}$، این افراد در یک روز هفته به دنیا آمده‌اند. با توجه به مستقل بودن این پیشامدها، داریم:

$$\frac{\binom{4}{1}\binom{3}{1}}{\binom{7}{2}}\times\frac{\binom{7}{1}}{7\times7}=\frac{12}{21}\times\frac{1}{7}=\frac{4}{49}$$

↓

۲ نفر از ۷ نفر

(ترکیبی) (ریاضی ۲، صفحه‌های ۴۴ تا ۵۲)

(ریاضی ۳، صفحهٔ ۴۴)

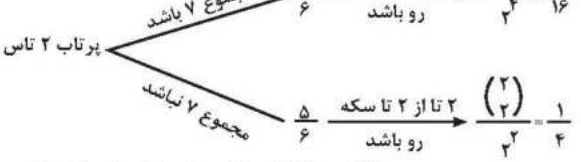
---

36 ــ گزینهٔ «۳» *(بابک سادات)*

ابتدا تعداد حالت‌هایی را که مجموع ۲ تاس برابر ۷ است، به‌دست می‌آوریم:

مجموع ۷ : (۱،۶)،(۲،۵)،(۳،۴)،(۴،۳)،(۵،۲)،(۶،۱) $\Rightarrow$ ۶ حالت

بنابراین احتمال مجموع ۷ بودن برابر $\frac{1}{6}$ است، حال داریم:



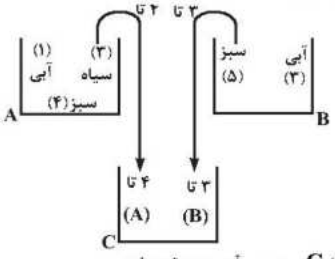
$$\Rightarrow\frac{1}{6}\times\frac{6}{16}+\frac{5}{6}\times\frac{1}{4}=\frac{1}{16}+\frac{5}{24}=\frac{3+10}{48}=\frac{13}{48}$$

(احتمال) (ریاضی ۳، صفحه‌های ۴۴ تا ۴۸)

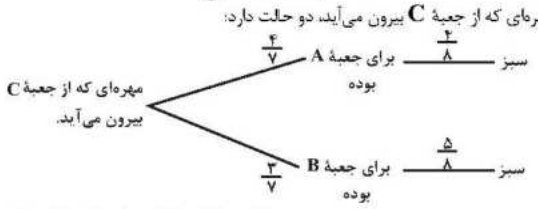
---

37 ــ گزینهٔ «۱» *(احسان غنی‌زاده)*

اول به این شکل نگاه کنید:



مهره‌ای که از جعبهٔ C بیرون می‌آید، دو حالت دارد:



$$\Rightarrow\frac{4}{7}\times\frac{4}{8}+\frac{3}{7}\times\frac{5}{8}=\frac{16}{56}+\frac{15}{56}=\frac{31}{56}$$

(احتمال) (ریاضی ۳، صفحه‌های ۴۴ تا ۴۸)

www.mapedu.ir

38 – گزینهٔ «۲» *(نیلوفر مهدوی)*

فرض کنید A پیشامد سمند بودن ماشین باشد. اگر B_1 پیشامد آن باشد که ماشین انتخابی از جایگاه دوم از ابتدا در جایگاه اول بوده و B_2 پیشامد آن باشد که ماشین انتخابی از جایگاه دوم از ابتدا در همان جایگاه حضور داشته است، آنگاه طبق قانون احتمال کل داریم:

$$P(A)=P(B_1)P(A\mid B_1)+P(B_2)P(A\mid B_2)$$

$$=\frac{2}{8}\times\frac{6}{10}+\frac{6}{8}\times\frac{3}{6}=\frac{3}{20}+\frac{3}{8}=\frac{6+15}{40}=\frac{21}{40}$$

(آمار و احتمال) (ریاضی ۲، صفحه‌های ۱۴۴ تا ۱۵۲)

---

39 – گزینهٔ «۱» *(نیلوفر مهدوی)*

با توجه به روابط جبر مجموعه‌ها داریم:

$$B\subseteq A\Rightarrow\begin{cases}A\cup B=A\\A\cap B=B\end{cases}$$

حال طبق قانون احتمال شرطی داریم:

$$P(A\mid B')=\frac{P(A\cap B')}{P(B')}=\frac{P(A)-P(A\cap B)}{P(B')}=\frac{P(A)-P(B)}{1-P(B)}$$

$$=\frac{\frac{1}{3}-\frac{1}{7}}{1-\frac{1}{7}}=\frac{\frac{4}{21}}{\frac{6}{7}}=\frac{2}{9}$$

$$\frac{P(A\mid B')}{P(A\cup B)}=\frac{P(A\mid B')}{P(A)}=\frac{\frac{2}{9}}{\frac{1}{3}}=\frac{2}{3}$$

(آمار و احتمال) (ریاضی ۲، صفحه‌های ۱۴۴ تا ۱۵۲)

---

40 – گزینهٔ «۲» *(افشین خاصه‌خان)*

عقربهٔ A روی عدد اول بایستد: $P(A)=\frac{2}{4}=\frac{1}{2}$

عقربهٔ B روی عدد اول بایستد: $P(B)=\frac{3}{5}$

چون این دو پیشامد مستقل‌اند:

$$P(A\cap B)=P(A).P(B)=\frac{1}{2}\times\frac{3}{5}=\frac{3}{10}$$

$$P(A\cup B)=P(A)+P(B)-P(A\cap B)$$

$$=0/5+0/6-0/3=0/8$$

(آمار و احتمال) (ریاضی ۲، صفحه‌های ۱۴۴ تا ۱۵۲)

---

41 – گزینهٔ «۴» *(سوگند روشنی)*

اگر احتمال شرکت سارا و مریم در مهمانی را به‌ترتیب با $P(S)$ و $P(M)$ نمایش دهیم، آن‌گاه داریم:

$$P(M\mid S)=\frac{P(M\cap S)}{P(S)}\Rightarrow 0/3=\frac{P(M\cap S)}{0/6}\Rightarrow P(M\cap S)=0/18$$

$$P(M\cup S)=P(M)+P(S)-P(M\cap S)=0/2+0/6-0/18=0/62$$

$$\Rightarrow P(M'\cap S')=1-P(M\cup S)=0/38$$

$$P(M'\mid S')=\frac{P(M'\cap S')}{P(S')}=\frac{0/38}{0/4}=\frac{19}{20}=0/95$$

(آمار و احتمال) (ریاضی ۲، صفحه‌های ۱۴۴ تا ۱۵۲)

---

42 – گزینهٔ «۲» *(علیرضا شریف‌قطبی)*

فرض کنید پیشامدهای A و B به‌ترتیب به‌صورت «بازیکن اول بلندتر از بازیکن دوم باشد.» و «بازیکن اول بلندقدترین بازیکن تیم باشد.» تعریف شوند. در این‌صورت داریم:

$$P(B\mid A)=\frac{P(A\cap B)}{P(A)}=\frac{P(B)}{P(A)}=\frac{\frac{1}{8}}{\frac{1}{2}}=\frac{1}{4}$$

تذکر: $P(A)=\frac{1}{2}$ است، چون بین دو بازیکن اول و دوم، احتمال بلندقدتر بودن یک بازیکن برابر دیگری است. همچنین پیشامد B، زیرمجموعهٔ پیشامد A است، بنابراین $A\cap B=B$ است.

(آمار و احتمال) (ریاضی ۲، صفحه‌های ۱۴۴ تا ۱۵۲)

---

43 – گزینهٔ «۱» *(وحید ونج‌آبادی)*

در پرتاب سه تاس داریم: $n(S)=6\times6\times6$

حال می‌خواهیم اعداد روشده سه تاس تشکیل دنبالهٔ هندسی با قدر نسبت ۲ بدهند، پس این اعداد باید ۴، ۲ و ۱ باشند که به $3!$ جایگشت دارند.

$$P(A)=\frac{n(A)}{n(S)}=\frac{3!}{6\times6\times6}=\frac{1}{36}$$

(آمار و احتمال) (ریاضی ۱، صفحه‌های ۱۴۲ تا ۱۵۱)

---

44 – گزینهٔ «۳» *(سهیل حسن‌خان‌پور)*

فضای نمونه‌ای برابر است با جایگشت ۸ نفر یعنی $n(S)=8!$. ۴ پزشک به نام A، B، C و D را در یک گروه قرار می‌دهیم و سپس به‌همراه بقیه جایگشت می‌دهیم.

$\boxed{ABCD}$ EFGH

دقت کنید همهٔ ۴ پزشک وقتی در یک گروه باشند با ۴ نفر دیگر به $5!$ حالت، جایگشت داشته، هم‌چنین $4!$ حالت برای جابه‌جایی خود ۴ پزشک درنظر می‌گیریم. پس داریم: $n(A)=5!\times4!$

$$\Rightarrow P(A)=\frac{n(A)}{n(S)}=\frac{5!\times4!}{8!}=\frac{1}{14}$$

(آمار و احتمال) (ریاضی ۱، صفحه‌های ۱۴۲ تا ۱۵۱)

---

45 – گزینهٔ «۲» *(عزیز اله علی‌اصغری)*

با بررسی فضای نمونه‌ای و پیشامد مورد نظر داریم:

$$n(S)=2^3=8$$

$$A=\{(ر،پ،پ)،(پ،ر،پ)،(پ،پ،ر)\}$$

$$\Rightarrow n(A)=3$$

$$\Rightarrow P(A)=\frac{n(A)}{n(S)}=\frac{3}{8}$$

(آمار و احتمال) (ریاضی ۱، صفحه‌های ۱۴۲ تا ۱۵۱)

---

46 – گزینهٔ «۴» *(حسین فایلو)*

تعداد زیرمجموعه‌های سه‌عضوی از ۹ عضو : فضای نمونه $=\binom{9}{3}=\frac{9!}{6!\times3!}=84$

تعداد زیرمجموعه‌های سه‌عضوی شامل ۲ ولی فاقد ۳ :پیشامد $=\binom{7}{2}=21$

$$\Rightarrow \text{احتمال مطلوب}=\frac{\binom{7}{2}}{\binom{9}{3}}=\frac{21}{84}=\frac{1}{4}=0/25$$

(آمار و احتمال) (ریاضی ۱، صفحه‌های ۱۴۲ تا ۱۵۱)

www.mapedu.ir

47 – گزینهٔ «۳» *(عادل حسینی)*

جدول ضربی که از اعداد ۱ تا ۵ تولید می‌شود به صورت زیر است:

$$n(S)=\binom{۲۵}{۲}=\frac{۲۵\times ۲۴}{۲}=۳۰۰$$

	۱	۲	۳	۴	۵
۱	۱	۲	۳	۴	۵
۲	۲	۴	۶	۸	۱۰
۳	۳	۶	۹	۱۲	۱۵
۴	۴	۸	۱۲	۱۶	۲۰
۵	۵	۱۰	۱۵	۲۰	۲۵

در جدول بالا ۴ عدد مشخص شده نه مضرب ۲ هستند و نه مضرب ۳، پس احتمال موردنظر برابر است با:

$$P=\frac{n(A)}{n(S)}=\frac{\binom{۴}{۲}}{۳۰۰}=\frac{۶}{۳۰۰}=\frac{۱}{۵۰}=۲\%$$

(آمار و احتمال) (ریاضی ۱، صفحه‌های ۱۴۲ تا ۱۵۱)

---

48 – گزینهٔ «۲» *(عادل حسینی)*

$S:$ اعداد ۳ رقمی $\Rightarrow n(S)=۹۰۰$

$A:$ اعداد زوج ۳ رقمی $\Rightarrow n(A)=[\frac{۹۹۹}{۲}]-[\frac{۹۹}{۲}]=۴۵۰$

$B:$ اعداد ۳ رقمی مضرب ۳ $\Rightarrow n(B)=[\frac{۹۹۹}{۳}]-[\frac{۹۹}{۳}]=۳۰۰$

$A\cap B:$ اعداد ۳ رقمی مضرب ۶ $\Rightarrow n(A\cap B)=[\frac{۹۹۹}{۶}]-[\frac{۹۹}{۶}]=۱۵۰$

$$P(A'\cap B')=۱-P(A\cup B)$$

$$=۱-(\frac{۴۵۰}{۹۰۰}+\frac{۳۰۰}{۹۰۰}-\frac{۱۵۰}{۹۰۰})=\frac{۳۰۰}{۹۰۰}=\frac{۱}{۳}$$

(آمار و احتمال) (ریاضی ۱، صفحه‌های ۱۴۲ تا ۱۵۱)

---

49 – گزینهٔ «۴» *(علی ایمانی)*

کافی است از میان ۴ ردیف، ۳ ردیف را به دلخواه انتخاب کرده و سپس از هر ردیف، یکی از ۳ نفر را انتخاب کنیم، بنابراین احتمال موردنظر برابر است با:

$$P(A)=\frac{\binom{۴}{۳}\binom{۳}{۱}\binom{۳}{۱}\binom{۳}{۱}}{\binom{۱۲}{۳}}=\frac{۴\times ۳\times ۳\times ۳}{۲۲۰}=\frac{۲۷}{۵۵}$$

(آمار و احتمال) (ریاضی ۱، صفحه‌های ۱۴۲ تا ۱۵۱)

---

50 – گزینهٔ «۳» *(اختصاصی ۵صه‌ان)*

تعداد اعضای فضای نمونهٔ این آزمایش تصادفی برابر است با:

$$n(S)=\binom{۹}{۲}=۳۶$$

حالت‌هایی که عدد یکی از کارت‌ها مضرب دیگری است (پیشامد مطلوب) عبارتند از:

$$A=\{(۱,۲),(۱,۳),(۱,۴),(۱,۵),(۱,۶),(۱,۷),(۱,۸),(۱,۹),(۲,۴),(۲,۶),(۲,۸),(۳,۶),(۳,۹),(۴,۸)\}$$

بنابراین داریم:

$$P(A)=\frac{۱۴}{۳۶}=\frac{۷}{۱۸}$$

تذکر: دقت کنید که اعضای مجموعهٔ A به صورت زوج مرتب نیستند.

(آمار و احتمال) (ریاضی ۱، صفحه‌های ۱۴۲ تا ۱۵۱)

51– گزینهٔ «۳» *(رحمان پوررحیم)*

قبولی علی و محمد دو پدیده مستقل از هم هستند و فقط یکی قبول نمی‌شود یعنی فقط یکی قبول می‌شود. بنابراین:

$P(A)$: احتمال قبولی علی

$P(M)$: احتمال قبولی محمد

$$P(\text{فقط یکی}) = P(A-M)+P(M-A) =$$
$$P(A\cap M')+P(M\cap A')$$
$$= P(A)P(M')+P(M)P(A')$$
$$= ۰/۸(۱-۰/۶)+۰/۶(۱-۰/۸) = ۰/۴۴$$

(احتمال) (ریاضی ۲، صفحه‌های ۴۴ تا ۱۵۲)

52– گزینهٔ «۳» *(بهانیدش نیکنام)*

$$n(S) = ۵\times ۴\times ۳\times ۲ = ۱۲۰$$

«الف»: کلمه ۴ حرفی که «ن» جزء حروف انتخابی نباشد.

$$۴\times ۳\times ۲\times ۱ = ۴! = ۲۴$$

«ب»: کلمه ۴ حرفی که «ن» جزء حروف انتخابی باشد و حرف اول و آخر نباشد.

$$\underset{۴}{_}\ _\ _\ \underset{۳}{_}$$

به ۴×۳ طریق حرف اول و آخر پر می‌شود.

۲ جا برای حرف «ن» و ۲ حالت برای یک حرف باقی مانده:

$$۴\times ۳\times ۲\times ۲ = ۴۸ \Rightarrow P = \frac{۲۴+۴۸}{۱۲۰} = \frac{۳}{۵}$$

(احتمال) (ریاضی ۱، صفحه‌های ۴۲ تا ۱۵۱)

53– گزینهٔ «۴» *(سعید عزیزخانی)*

در پرتاب ۱۰ سکه داریم:

$$n(S) = ۲^{۱۰} = ۱۰۲۴$$

پرتاب این ۱۰ سکه سه بخش دارد:

دقیقاً دوبار رو بیاید: $_\ _\ _\ _$

می‌تواند پشت یا رو بیاید: $_$

حداقل دوبار رو ظاهر شود: $_\ _\ _\ _\ _$

$$\left.\begin{array}{l} \text{دوبار رو}: \binom{۵}{۲} = ۱۰ \\ \text{سه بار رو}: \binom{۵}{۳} = ۱۰ \\ \text{چهار بار رو}: \binom{۵}{۴} = ۵ \\ \text{پنج بار رو}: \binom{۵}{۵} = ۱ \end{array}\right\} \xrightarrow{\text{مجموع}} ۲۶$$

در نهایت داریم:

$$n(A) = \binom{۴}{۲}\times ۲\times ۲۶ = ۳۱۲ \Rightarrow P(A) = \frac{۳۱۲}{۲^{۱۰}} = \frac{۳۹}{۱۲۸}$$

(احتمال) (ریاضی ۱، صفحه‌های ۴۲ تا ۱۵۱)

54– گزینهٔ «۳» *(مهسا اسماعیل‌پور)*

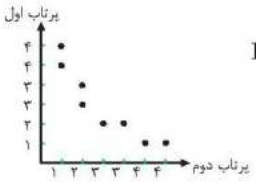
روش اول:

$$P(۱) = \frac{۱}{۶} \quad , \quad P(۲) = \frac{۱}{۶} \quad , \quad P(۳) = \frac{۲}{۶} \quad , \quad P(۴) = \frac{۲}{۶}$$

در پرتاب ۲ تاس، باید یکی از زوج‌های $(۱,۴)$ و $(۴,۱)$ و $(۲,۳)$ و $(۳,۲)$ بیاید تا مجموع ۵ ظاهر شود.

$$P\{(۱,۴),(۴,۱),(۲,۳),(۳,۲)\} = \frac{۱}{۶}\times\frac{۱}{۳}+\frac{۱}{۳}\times\frac{۱}{۶}+\frac{۱}{۶}\times\frac{۱}{۳}+\frac{۱}{۳}\times\frac{۱}{۶} = \frac{۴}{۱۸} = \frac{۲}{۹}$$

روش دوم: از نمودار استفاده می‌کنیم و حالاتی که مجموع دو تاس ۵ می‌باشد را مشخص می‌کنیم:



$$P(\text{مجموع دو تاس عدد ۵}) = \frac{۸}{۳۶} = \frac{۲}{۹}$$

(احتمال) (ریاضی ۱، صفحه‌های ۴۲ تا ۱۵۱)

55– گزینهٔ «۳» *(عباس اشرفی)*

سربازها را $S_۱ S_۲ S_۳ S_۴ S_۵ S_۶ S_۷ S_۸$ در نظر می‌گیریم. برای نمونه فرض کنید $S_۴$، $S_۱$ و $S_۷$ را انتخاب کرده‌ایم. اگر انتخاب شدن را با O و انتخاب نشدن را با N نمایش دهیم، داریم: O NNO NNO N

مانند این است که کلماتی هشت حرفی با پنج N و سه O بسازیم که هیچ دو O کنار هم نباشند.

$$\square\ N\ \square\ N\ \square\ N\ \square\ N\ \square\ N\ \square$$

کافی است از شش خانهٔ موجود، سه خانه انتخاب کنیم.

$$\binom{۶}{۳} = ۲۰$$

احتمال این پیشامد برابر است با:

$$P(A) = \frac{\binom{۶}{۳}}{\binom{۸}{۳}} = \frac{۲۰}{\frac{۸\times ۷\times ۶}{۶}} = \frac{۲۰}{۵۶} = \frac{۵}{۱۴}$$

(احتمال) (ریاضی ۱، صفحه‌های ۴۲ تا ۱۵۱)

56– گزینهٔ «۳» *(مهسا اسماعیل‌پور)*

$$\mathbf{n(S) = ۳۰۰-۱۵۱+۱ = ۱۵۰}$$

نکته: تعداد اعدادی از مجموعه $\{m+۱, m+۲, \dots, n\}$ که بر k بخش‌پذیر هستند برابر است با: $[\frac{n}{k}]-[\frac{m}{k}]$

$n(A\Delta B)$: یعنی تعداد عضوهایی که فقط به یکی از مجموعه‌های A و B تعلق دارد.

$$n(A\Delta B) = n(A)+(B)-۲n(A\cap B)$$

$B_۱$ عضوهایی از A که بر ۳ بخش‌پذیرند.

www.mapedu.ir

B_2 عضوهایی از A که بر ۷ بخش‌پذیرند.

باید احتمال پیشامد $B_1 \Delta B_2$ را به دست آوریم.

$$n(B_1 \Delta B_2) = n(B_1) + n(B_2) - 2n(B_1 \cap B_2)$$

$$= ([\frac{300}{3}] - [\frac{150}{3}]) + ([\frac{300}{7}] - [\frac{150}{7}]) - 2([\frac{300}{21}] - [\frac{150}{21}])$$

$$= (100 - 50) + (42 - 21) - 2(14 - 7)$$

$$= 50 + 21 - 14 = 57$$

احتمال مدنظر: $\frac{57}{150} = \frac{19}{50} = 38\%$

(احتمال) (ریاضی ۱، صفحه‌های ۱۴۲ تا ۱۵۱)

57- گزینهٔ «۴» (سروش موئینی)

$n(S) = 6^2 = 36$

حالات ممکن: $\Delta = a^2 - 4b \geq 0 \Rightarrow$

a	b
۱	-
۲	۱
۳	۱،۲
۴	۱،۲،۳،۴
۵	۱،۲،۳،۴،۵
۶	۱،۲،۳،۴،۵،۶

$n(A) = 19$

$P(A) = \frac{19}{36}$

(احتمال) (ریاضی ۱، صفحه‌های ۱۴۲ تا ۱۵۱)

58- گزینهٔ «۲» (سروش موئینی)

$$P(A \cap B \mid A \cup B) = \frac{P(A \cap B)}{P(A \cup B)} = \frac{0/7 - 0/5}{0/4 + 0/5} = \frac{2}{9}$$

(احتمال) (ریاضی ۲، صفحه‌های ۱۴۴ تا ۱۵۲)

59- گزینهٔ «۱» (مهرداد استقلالیان)

$P(\text{زدن هدف اول}) = P(\text{زدن هدف دوم}) = 0/7$

$P(\text{هدف اول} \cap \text{هدف دوم}) = 0/65$

$$P(\text{هدف اول} \mid \text{هدف دوم}) = \frac{P(\text{هدف اول} \cap \text{هدف دوم})}{P(\text{هدف دوم})}$$

$$= \frac{0/65}{0/7} = \frac{65}{70} = \frac{13}{14}$$

(احتمال) (ریاضی ۲، صفحه‌های ۱۴۴ تا ۱۵۲)

60- گزینهٔ «۴» (بهزاد مصرمی)

با توجه به اینکه پرتاب سکه‌ها و تاس مستقل است، احتمال اینکه دقیقاً یکی رو ظاهر شود، برابر است با:

$\{6, 3\}$ تاس مضرب ۳ ظاهر شود: $\frac{2}{6} \times \frac{\binom{3}{1}}{2^3} = \frac{2}{6} \times \frac{3}{8} = \frac{1}{8}$

$\{1, 2, 4, 5\}$ تاس مضرب ۳ ظاهر نشود: $\frac{4}{6} \times \frac{\binom{2}{1}}{2^2} = \frac{4}{6} \times \frac{2}{4} = \frac{1}{3}$

$$\xrightarrow{+} \frac{1}{8} + \frac{1}{3} = \frac{11}{24}$$

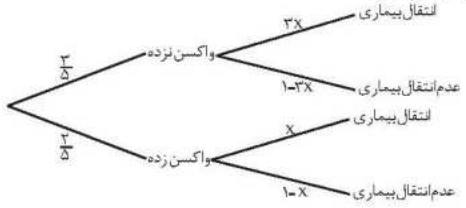
یادآوری: احتمال اینکه در پرتاب n سکه، k سکه رو یا پشت ظاهر شود:

$$\frac{\binom{n}{k}}{2^n}$$

(احتمال) (ریاضی ۲، صفحه‌های ۱۴۴ تا ۱۵۲) (ریاضی ۳، صفحه‌های ۱۴۴ تا ۱۴۸)

61- گزینهٔ «۴» (مهدی براتی)

به کمک نمودار درختی داریم:



بنابراین احتمال سالم ماندن $(P(A))$ افراد به صورت زیر است:

$$P(A) = \frac{67}{100} \to \frac{3}{5}(1 - 3x) + \frac{2}{5}(1 - x) = \frac{67}{100}$$

$$\to 1 - \frac{11}{5}x = \frac{67}{100} \to \frac{11}{5}x = \frac{33}{100} \to x = \frac{3}{20}$$

احتمال انتقال بیماری به افرادی که واکسن نزده‌اند برابر است با:

$$3 \times \frac{3}{20} = \frac{9}{20} = 0/45$$

(احتمال) (ریاضی ۳، صفحه‌های ۱۴۴ تا ۱۴۸)

62- گزینهٔ «۱» (محسن اسماعیل‌پور)

چون A و B مستقل‌اند، پس:

$$P(A \cap B) = P(A)P(B) \quad (*)$$

$$3P(A \cap B) = P(B) \to P(A) = \frac{1}{3}$$

$$\Rightarrow \frac{P(A) - P(A \cap B)}{P(A)} = \frac{\frac{1}{3} - P(A \cap B)}{\frac{1}{3}} = \frac{1}{5}$$

$$\Rightarrow \frac{1}{3} - P(A \cap B) = \frac{1}{15} \Rightarrow P(A \cap B) = \frac{4}{15} \xrightarrow{(*)} P(B) = \frac{4}{5}$$

$$\to P(B - A) = P(B) - P(A \cap B) = \frac{4}{5} - \frac{4}{15} = \frac{8}{15}$$

(احتمال) (ریاضی ۲، صفحه‌های ۱۴۴ تا ۱۵۲)

63- گزینهٔ «۱» (بابک سادات)

علیرغم اینکه در صورت سؤال عبارت یکی‌یکی و متوالی قید شده ولی چون ترتیب مهم نیست می‌توانیم فرض کنیم مهره‌ها با هم خارج می‌شوند و از ترکیب استفاده کنیم. مخرج کسر انتخاب ۴ مهره از ۱۳ مهره است و صورت هم ۳ زرد و یک غیر زرد و یا ۲ زرد، یک آبی و یک قرمز.

$$\Rightarrow P(A)=\frac{n(A)}{n(S)}=\frac{\binom{۳}{۳}\binom{۱۰}{۱}+\binom{۳}{۲}\binom{۴}{۱}\binom{۶}{۱}}{\binom{۱۳}{۴}}$$

$$=\frac{۱۰+۷۲}{\frac{۱۳\times۱۲\times۱۱\times۱۰}{۴\times۳\times۲}}=\frac{۸۲}{۷۱۵}\times۱۰۰=۱۱\%$$

(احتمال) (ریاضی ۱، صفحه‌های ۱۴۲ تا ۱۵۱)

64– گزینهٔ «۳» *(سیدجواد نظری)*

احتمال ایمنی فرد در برابر ویروس نوع A را $P(A)$ و احتمال ایمنی او در مقابل ویروس نوع B را $P(B)$ در نظر گرفته و داریم:

$$\begin{cases}P(A)=۰/۴\\P(B)=۰/۵\\P(B|A)=۰/۷۵\end{cases}\Rightarrow P(B|A)=\frac{P(A\cap B)}{P(A)}$$

$$\Rightarrow ۰/۷۵=\frac{P(A\cap B)}{۰/۴}\Rightarrow P(A\cap B)=۰/۳$$

حال برای به دست آوردن احتمال خواسته شده باید $P(B'|A')$ را محاسبه کنیم، پس:

$$P(B'|A')=\frac{P(A'\cap B')}{P(A')}=\frac{P((A\cup B)')}{P(A')}=\frac{۱-P(A\cup B)}{۱-P(A)}$$

$$=\frac{۱-(P(A)+P(B)-P(A\cap B))}{۱-P(A)}$$

$$P(B'|A')=\frac{۱-(۰/۴+۰/۵-۰/۳)}{۱-۰/۴}=\frac{۱-۰/۶}{۰/۶}=\frac{۰/۴}{۰/۶}=\frac{۲}{۳}$$

(احتمال) (ریاضی ۲، صفحه‌های ۱۴۴ تا ۱۵۲)

65– گزینهٔ «۱» *(پویان طهرانیان)*

پیشامد پیروزی سارا : $A\to P(A)=\frac{۲}{۵}$

پیشامد جلو افتادن سارا از علی در تعداد رأی : $B\to P(A|B)=\frac{۱}{۲}$

پیروزی سارا با جلو افتادن تعداد رأی از علی اتفاق می‌افتد، لذا: $A\cap B=A$ پس داریم:

$$P(A|B)=\frac{P(A\cap B)}{P(B)}\to\frac{۱}{۲}=\frac{P(A)}{P(B)}\to\frac{۱}{۲}=\frac{\frac{۲}{۵}}{P(B)}$$

$$\to P(B)=\frac{۴}{۵}$$

یعنی به احتمال $\frac{۴}{۵}$ سارا در تعداد رأی از علی جلو می‌افتد. پس به احتمال $۱-\frac{۴}{۵}=\frac{۱}{۵}$، علی از سارا در تعداد رأی جلو می‌افتد.

(احتمال) (ریاضی ۲، صفحه‌های ۱۴۴ تا ۱۵۲)

66– گزینهٔ «۲» *(امیرهوشنگ انصاری)*

هر دو تاس زوج بیاید: $A\Rightarrow P(A)=\frac{۱}{۲}\times\frac{۱}{۲}=\frac{۱}{۴}$

$$A'=۱-\frac{۱}{۴}=\frac{۳}{۴}$$

حال می‌خواهیم در حداکثر سه پرتاب، نتیجهٔ مطلوب حاصل شود یعنی یا در پرتاب اول یا در پرتاب دوم و یا در پرتاب سوم:

$$\frac{۱}{۴}+\frac{۳}{۴}\times\frac{۱}{۴}+\frac{۳}{۴}\times\frac{۳}{۴}\times\frac{۱}{۴}=\frac{۱}{۴}+\frac{۳}{۱۶}+\frac{۹}{۶۴}=\frac{۱۶+۱۲+۹}{۶۴}=\frac{۳۷}{۶۴}$$

(احتمال) (ریاضی ۱، صفحه‌های ۱۴۲ تا ۱۵۱)

67– گزینهٔ «۳» *(محمدحسن سلامی‌حسینی)*

$$\text{دانشجو هست}\ \frac{۲}{۱۰۰}\xrightarrow{\text{به مسافرت علاقمند است}}\frac{۷}{۱۰}$$

$$\text{دانشجو نیست}\ \frac{۹۸}{۱۰۰}\xrightarrow{\text{به مسافرت علاقمند است}}\frac{۶}{۱۰}$$

$$P(\text{دانشجو باشد و به مسافرت علاقمند باشد})=\frac{۱۴}{۱۰۰۰}$$

$$P(\text{دانشجو نباشد و به مسافرت علاقمند باشد})=\frac{۵۸۸}{۱۰۰۰}$$

$$P(\text{علاقمند به مسافرت})=\frac{۱۴}{۱۰۰۰}+\frac{۵۸۸}{۱۰۰۰}=\frac{۶۰۲}{۱۰۰۰}$$

$$P(\text{دانشجو باشد}|\text{به مسافرت علاقمند باشد})$$

$$=\frac{P(\text{به مسافرت علاقمند باشد}\cap\text{دانشجو باشد})}{P(\text{به مسافرت علاقمند باشد})}=\frac{\frac{۱۴}{۱۰۰۰}}{\frac{۶۰۲}{۱۰۰۰}}=\frac{۱۴}{۶۰۲}=\frac{۱}{۴۳}$$

(احتمال) (ریاضی ۲، صفحه‌های ۱۴۴ تا ۱۵۲) (ریاضی ۳، صفحه‌های ۱۴۴ تا ۱۴۸)

68– گزینهٔ «۳» *(سعید عزیزخانی)*

با توجه به پرتاب دو تاس داریم: $n(S)=۶^۲=۳۶$

پیشامدهای A و B را می‌نویسیم:

$$A=\{(۲,۲),(۲,۳),(۲,۵),(۳,۲),(۳,۳),(۳,۵),(۵,۲),(۵,۳),(۵,۵)\}$$

$$B=\{(۱,۶),(۶,۱),(۲,۵),(۵,۲),(۳,۴),(۴,۳)\}$$

بررسی گزینه‌ها:

گزینه «۱»: برای مستقل بودن پیشامدهای A و B باید داشته باشیم:

$$P(A\cap B)=P(A)\times P(B)$$

با توجه به پیشامدهای A و B و تعداد اعضای آن‌ها داریم:

$$P(A)=\frac{۹}{۳۶}=\frac{۱}{۴}\quad\text{و}\quad P(B)=\frac{۶}{۳۶}=\frac{۱}{۶}$$

$$A\cap B=\{(۲,۵),(۵,۲)\}\to P(A\cap B)=\frac{۲}{۳۶}=\frac{۱}{۱۸}$$

در نهایت: $P(A\cap B)\neq P(A)\times P(B)$ و گزینه «۱» نادرست است.

گزینه «۲»: با توجه به اینکه $A\cap B\neq\varnothing$ بنابراین پیشامدهای A و B ناسازگار نیستند.

گزینه «۳»: این گزینه صحیح است چون:

احتمال رخداد پیشامد A در صورت رخداد پیشامد B:

$$P(A|B)=\frac{P(A\cap B)}{P(B)}=\frac{\frac{۱}{۱۸}}{\frac{۱}{۶}}=\frac{۱}{۳}$$

$$\frac{P(A|B)}{P(B)}=\frac{\frac{۱}{۳}}{\frac{۱}{۶}}=۲$$

گزینه «۴»: احتمال رخداد حداقل یکی از پیشامدهای A و B:

$$P(A\cup B)=P(A)+P(B)-P(A\cap B)=\frac{۹}{۳۶}+\frac{۶}{۳۶}-\frac{۲}{۳۶}=\frac{۱۳}{۳۶}$$

(احتمال) (ریاضی ۱، صفحه‌های ۱۴۲ تا ۱۵۱) (ریاضی ۲، صفحه‌های ۱۴۴ تا ۱۵۲)

69– گزینهٔ «۳» *(سهیل محسن‌خان‌پور)*

۳ حالت کلی وجود دارد. ۳ عدد با هم برابر باشند، فقط ۲ تا از تاس‌ها برابر باشند، ۳ تاس متفاوت باشند.

«حالت اول»: در ۶ حالت هر ۳ تاس با هم برابرند.

«حالت دوم»: بزرگترین و کوچکترین عدد موردنظر را تعیین می‌کنیم:

$a=۱\ ,\ b\in\{۲,\dots,۶\}$

$a=۲\ ,\ b\in\{۴,۶\}$

$a=۳\ ,\ b\in\{۶\}$

تاس سوم یک بار می‌تواند با تاس بزرگتر برابر باشد و یک بار با تاس کوچکتر. پس هر حالت فوق را ۲ بار می‌شماریم. همچنین ۲ عدد یکسان و یک عدد متفاوت، ۳ حالت جایگشت دارند. $\{\triangle\triangle\bigcirc,\triangle\bigcirc\triangle,\bigcirc\triangle\triangle\}$

$$(۵+۲+۱)\times۲\times۳=۴۸$$

«حالت سوم»: ۳ عدد متفاوت باشند که بزرگترین و کوچکترین عدد مورد نظر را تعیین می‌کنیم:

هر حالت نیز !۳ جایگشت دارند:

$a=۱\quad b=۳\rightarrow c\in\{۲\}$

$a=۱\quad b=۴\rightarrow c\in\{۲,۳\}$

$a=۱\quad b=۵\rightarrow c\in\{۲,۳,۴\}$

$a=۱\quad b=۶\rightarrow c\in\{۲,۳,۴,۵\}$

$a=۲\quad b=۴\rightarrow c\in\{۳\}$

$a=۲\quad b=۶\rightarrow c\in\{۳,۴,۵\}$

$a=۳\quad b=۶\rightarrow c\in\{۴,۵\}$

تعداد حالات:

$$=(۱+۲+۳+۴+۱+۳+۲)\times۳!=۱۶\times۶=۹۶$$

$$P(A)=\frac{n(A)}{n(S)}=\frac{۶+۴۸+۹۶}{۶^۳}=\frac{۱۵۰}{۲۱۶}=\frac{۲۵}{۳۶}$$

(احتمال) (ریاضی ۱، صفحه‌های ۱۴۲ تا ۱۵۱)

70– گزینهٔ «۳» *(مهدی براتی)*

«حالت اول»: هر دو مهره از ظرف اول، آبی انتخاب شود:

$$\frac{\binom{۵}{۲}}{\binom{۹}{۲}}\rightarrow\left|\begin{matrix}۴\text{آبی}\\۴\text{قرمز}\end{matrix}\right|_{\text{ظرف دوم}}\ \frac{۴}{۸}\quad\text{احتمال آبی‌بودن}$$

«حالت دوم»: هر دو مهره از ظرف اول قرمز انتخاب شود:

$$\frac{\binom{۴}{۲}}{\binom{۹}{۲}}\rightarrow\left|\begin{matrix}۲\text{آبی}\\۶\text{قرمز}\end{matrix}\right|_{\text{ظرف دوم}}\ \frac{۲}{۸}\quad\text{احتمال آبی‌بودن}$$

«حالت سوم»: یک آبی و یک قرمز از ظرف اول انتخاب شود:

$$\frac{\binom{۵}{۱}\binom{۴}{۱}}{\binom{۹}{۲}}\rightarrow\left|\begin{matrix}۳\text{آبی}\\۵\text{قرمز}\end{matrix}\right|_{\text{ظرف دوم}}\ \frac{۳}{۸}\quad\text{احتمال آبی‌بودن}$$

بنابراین احتمال موردنظر برابر است با:

$$\frac{\binom{۵}{۲}}{\binom{۹}{۲}}\times\frac{۴}{۸}+\frac{\binom{۴}{۲}}{\binom{۹}{۲}}\times\frac{۲}{۸}+\frac{\binom{۵}{۱}\binom{۴}{۱}}{\binom{۹}{۲}}\times\frac{۳}{۸}$$

$$=\frac{۱۰}{۳۶}\times\frac{۴}{۸}+\frac{۶}{۳۶}\times\frac{۲}{۸}+\frac{۲۰}{۳۶}\times\frac{۳}{۸}=\frac{۴۰+۱۲+۶۰}{۳۶\times۸}=\frac{۱۱۲}{۳۶\times۸}=\frac{۷}{۱۸}$$

(احتمال) (ریاضی ۳، صفحه‌های ۱۴۴ تا ۱۴۸)

71– گزینهٔ «۱» *(سیدمحمدرضا حسینی‌فرد)*

تعداد کل مربع‌های قابل‌مشاهده برابر است با:

$$\left.\begin{matrix}۱:\text{مربع}\ ۳\times۳\\۴:\text{مربع}\ ۲\times۲\\۹:\text{مربع}\ ۱\times۱\end{matrix}\right\}\text{تعداد مربع‌ها}=۱۴$$

تعداد مربع‌های ۱×۱ که M رأس آن‌ها باشد برابر ۴ و تعداد مربع‌های ۲×۲ که M رأس آن‌ها باشد فقط یکی است پس:

$$P(M)=\frac{n(M)}{n(S)}=\frac{۵}{۱۴}$$

(احتمال) (ریاضی ۱، صفحه‌های ۱۴۲ تا ۱۵۱)

72– گزینهٔ «۳» *(مهدی براتی)*

با توجه به صورت سؤال $P(A)=۰/۴$ و $P(B)=۰/۳$ و اگر پیشامد A رخ دهد، احتمال پیشامد B، ۰/۴ افزایش می‌یابد یعنی برابر ۰/۷ می‌شود:

$$P(B|A)=۰/۷\rightarrow P(B|A)=\frac{P(A\cap B)}{P(A)}=۰/۷$$

$$\rightarrow\frac{P(A\cap B)}{۰/۴}=۰/۷\rightarrow P(A\cap B)=۰/۲۸$$

احتمال موردنظر نیز برابر است با:

$$P(A'|B')=\frac{P(A'\cap B')}{P(B')}=\frac{P(A\cup B)'}{P(B')}=\frac{1-P(A\cup B)}{1-P(B)}$$

$$=\frac{1-(0/4+0/3-0/28)}{1-0/3}=\frac{0/58}{0/7}=\frac{29}{35}$$

(احتمال) (ریاضی ۲، صفحه‌های ۱۴۴ تا ۱۴۶ و ۱۵۱ و ۱۵۲)

73– گزینهٔ «۲» (سیاوش راوطلب)

مجموع۱۰ مجموع۱۱ مجموع۱۲

$$B=\{\text{مجموع ۳عدد برابر ۱۶}\}=\{\underbrace{(\square,\square,4)}_{\text{۱حالت}},\underbrace{(\square,\square,5)}_{\text{۲حالت}},\underbrace{(\square,\square,6)}_{\text{۳حالت}}\}\Rightarrow n(B)=6$$

$$A=\{\text{تاس اول و سوم یکسان}\}=\{(5,6,5),(6,4,6)\}$$

$$\Rightarrow P(A|B)=\frac{n(A\cap B)}{n(B)}=\frac{2}{6}=\frac{1}{3}$$

(احتمال) (ریاضی ۳، صفحه‌های ۱۴۴ تا ۱۵۲)

74– گزینهٔ «۲» (فرشاد حسن‌زاده)

باید در پرتاب اول هر دو نفر به هدف نزنند و در پرتاب دوم نفر اول به هدف نزند و نفر دوم به هدف بزند، بنابراین:

$$(1-0/8)\times(1-0/6)\times(1-0/8)\times(0/6)=(0/2)\times(0/4)\times(0/2)\times(0/6)=0/0096$$

(ریاضی ۱، صفحه‌های ۱۴۲ تا ۱۵۱)

(احتمال) (ریاضی ۲، صفحه‌های ۱۴۴ تا ۱۵۲)

75– گزینهٔ «۴» (سهیل ساسانی)

می‌دانیم: $n(A-B')=n(A\cap B)=5$

حال اگر $n(S)=x$ داریم: $P(A\cap B)=P(A)\times P(B)$

$$\Rightarrow\frac{n(A\cap B)}{n(S)}=\frac{n(A)}{n(S)}\times\frac{n(B)}{n(S)}$$

$$\frac{5}{x}=\frac{20}{x}\times\frac{16}{x}\Rightarrow\frac{5}{1}=\frac{320}{x}$$

$$x=\frac{320}{5}=64$$

(احتمال) (ریاضی ۲، صفحه‌های ۱۴۶ تا ۱۵۲)

76– گزینهٔ «۴» (بهرام فلاح)

نکته: در انتخاب‌های متوالی هر گاه از نتیجه چند انتخاب اطلاع نداشته باشیم فرض می‌کنیم آن انتخاب‌ها کلاً صورت نگرفته‌اند. پس در این سؤال ۲ مهره را از ۱۵ مهره انتخاب می‌کنیم که احتمال هم‌رنگ بودن برابر است با:

$$P(A)=\frac{\binom{3}{2}+\binom{5}{2}+\binom{7}{2}}{\binom{15}{2}}=\frac{3+10+21}{105}=\frac{34}{105}$$

(ریاضی ۱، صفحه‌های ۱۴۲ تا ۱۵۱)

(احتمال) (ریاضی ۳، صفحه‌های ۱۴۴ تا ۱۴۸)

77– گزینهٔ «۴» (محسن اسماعیل‌پور)

اگر A پیشامد معیوب بودن و B_i پیشامد تولید کالا توسط کارخانهٔ iام باشد داریم:

$$P(A)=P(A|B_1)\times P(B_1)+P(A|B_2)\times P(B_2)$$

$$=\frac{1}{100}\times\frac{2}{3}+\frac{2}{100}\times\frac{1}{3}=\frac{4}{300}=\frac{1}{75}$$

(ریاضی ۲، صفحه‌های ۱۴۴ تا ۱۵۲)

(احتمال) (ریاضی ۳، صفحه‌های ۱۴۴ تا ۱۴۸)

78– گزینهٔ «۲» (سروش موئینی)

افراد انتخابی:

$$\text{دو ایرانی}\rightarrow\frac{\binom{3}{2}}{\binom{8}{2}}\rightarrow\text{قد بالا}\rightarrow\underline{0/3\times0/3}$$

$$\text{دو چینی}\rightarrow\frac{\binom{5}{2}}{\binom{8}{2}}\rightarrow\text{قد بالا}\rightarrow\underline{0/1\times0/1}$$

$$\text{یک ایرانی یک چینی}\rightarrow\frac{\binom{3}{1}\binom{5}{1}}{\binom{8}{2}}\rightarrow\text{قد بالا}\rightarrow\underline{0/3\times0/1}$$

$$P=\frac{3}{28}\times\frac{9}{100}+\frac{10}{28}\times\frac{1}{100}+\frac{15}{28}\times\frac{3}{100}=\frac{27+10+45}{2800}=\frac{82}{2800}=\frac{41}{1400}$$

(احتمال) (ریاضی ۳، صفحه‌های ۱۴۴ تا ۱۴۸)

---

www.mapedu.ir

زیست‌شناسی دهم

www.mapedu.ir

1 - سکه‌ای را به هوا پرتاب می‌کنیم. اگر رو بیاید دو سکه دیگر و اگر پشت بیاید یک تاس را پرتاب می‌کنیم. فضای نمونه‌ای این پیشامد چند عضو دارد؟

۱) ۱۲ ۲) ۱۰ ۳) ۴۸ ۴) ۲۴

پاسخ: گزینه ۲ (ریاضی ۱ ـ صفحات ۱۴۲ تا ۱۵۱ ـ ساده)

هر تست ماز یک کلاس درس!

تعریف فضای نمونه‌ای: در انجام یک آزمایش مجموعهٔ تمامی اتفاقاتی که ممکن است رخ دهد را فضای نمونه‌ای می‌نامیم.

نمونه) در پرتاب یک سکه فضای نمونه‌ای یک مجموعهٔ دو عضوی است: $S = \{$پشت، رو$\}$

در پرتاب یک تاس فضای نمونه‌ای یک مجموعهٔ ۶ عضوی است:

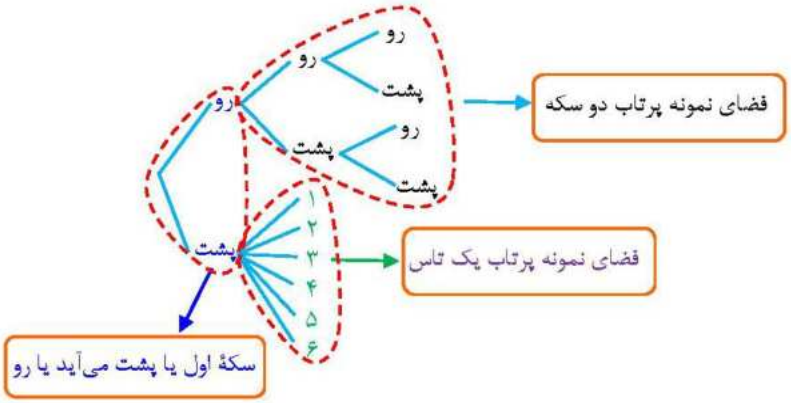
$S = \{۱,۲,۳,۴,۵,۶\}$

در پرتاب دو سکه فضای نمونه‌ای یک مجموعهٔ ۴ عضوی است:

$S = \{$(پشت، پشت) ، (رو، پشت) ، (پشت، رو) ، (رو، رو)$\}$

فضای نمونه‌ای این آزمایش به صورت زیر است که ده عضو دارد:

$S = \{$(۶،پ)، (۵،پ)، (۴،پ)، (۳،پ)، (۲،پ)، (۱،پ)، (پ،پ،ر)، (ر، پ،ر)، (پ، ر، ر)، (ر، ر، ر)$\}$



گروه آموزشی ماز

2 - می‌خواهیم با حروف a,b,c,d,e,f ، یک کلمهٔ ۶ حرفی بدون تکرار حروف بنویسیم. تعداد حالاتی که حرف a قبل از حروف e,d (نه لزوماً بلافاصله قبل از آن‌ها) آمده است، کدام است؟

۱) ۵۲۰ ۲) ۲۴۰ ۳) ۱۲۰ ۴) ۳۶۰

پاسخ: گزینه ۲ (ریاضی ۱ ـ صفحات ۱۴۲ تا ۱۵۱ ریاضی ۱ ـ ساده)

هر تست ماز یک کلاس درس!

ارتباط احتمال وقوع یک پیشامد و تعداد اعضای فضای نمونه‌ای و تعداد اعضای یک پیشامد:

$$P(A) = \frac{n(A)}{n(S)} \Rightarrow n(A) = P(A) \times n(S)$$

نکته ۱) اگر دو پیشامد A و A' هم‌شانس باشند، یعنی رخ دادن یا رخ ندادن یک پیشامد هم‌شانس باشند در این صورت $P(A) = P(A') = \frac{۱}{۲}$ است.

مثلاً در بدنیا آمدن یک فرزند احتمال دختر بودن با احتمال پسر بودن برابر و برابر $\frac{۱}{۲}$ است و یا در نوشتن کلمهٔ ۴ حرفی با حروف a,b,c,d اینکه a قبل از d بیاید با این که d قبل از a بیاید (نه لزوماً بلافاصله بعد از هم) هم‌شانس هستند و احتمال هر یک $\frac{۱}{۲}$ است.

نکته ۲) اگر سه پیشامد A، B، C هم‌شانس باشند و دوبه دو اشتراک نداشته باشند و $A \cup B \cup C = S$ باشد، احتمال رخ دادن هر یک $\frac{۱}{۳}$ است، مثلا در انتخاب یک جعبه از بین سه جعبه A، B، C احتمال انتخاب هر یک $\frac{۱}{۳}$ است.

نکته ۳) تعداد حالاتی که n شیء متمایز را می‌توان کنار هم چید برابر $n!$ است.

ببین در کل یا a قبل d و e میاد یا d قبل e و a یا e قبل از d و a میاد و احتمال هر کدام $\frac{۱}{۳}$ است. حال اگر پیشامد ظاهر شدن a قبل از d و e را A بنامیم تعداد اعضای فضای نمونه‌ای، یعنی تعداد ۶ حرفی‌هایی که با حروف a,b,c,d,e,f می‌تونیم بنویسیم، برابر !۶ است، بنابراین با توجه به درسنامه داریم

$$P(A)=\frac{n(A)}{n(S)} \Rightarrow \frac{۱}{۳}=\frac{n(A)}{۶!} \Rightarrow n(A)=\frac{۶!}{۳}=۲۴۰$$

www.biomaze.ir

3 - با حروف کلمهٔ «خارجی» یک کلمهٔ ۵ حرفی بدون تکرار حروف نوشته‌ایم. با کدام احتمال حروف اول و آخر نقطه دارند؟

۱) ۰/۲ ۲) ۰/۱ ۳) ۰/۳۲ ۴) ۰/۲۴

پاسخ: گزینه ۱ (ریاضی ۱ـ صفحات ۱۴۲ تا ۱۵۱ ـ متوسط)

برای حرف اول سه انتخاب داریم: {خ ، ج ، ی}

(دقت کن اگر «ی» اول بیاد نقطه داره ولی آخر بیاد نقطه نداره)

اگر «خ» رو اول بگذاریم برای حرف آخر تنها یک انتخاب داریم حرف «ج».

در مورد «ج» هم همین‌طوره، اگر اونو اول بیاریم برای حرف آخر یک انتخاب داریم حرف «خ». پس تعداد حالاتی که «خ» یا «ج» حرف اول باشن این طور بدست میاد:

$$\underline{۱}\times\underline{۱}\times\underline{۲}\times\underline{۳}\times\underline{۲}=۱۲$$

حرف اول خ یا ج باشد

ولی اگر «ی» حرف اول باشد برای حرف آخر دو انتخاب داریم «خ» یا «ج» بنابراین تعداد حالاتی که «ی» حرف اول باشد این‌طور بدست میاد:

$$\underline{۲}\times\underline{۱}\times\underline{۲}\times\underline{۳}\times\underline{۱}=۱۲$$

ی حرف اول باشد

بنابراین پیشامد ما دارای ۲۴ عضو است از طرفی فضای نمونه هم دارای $۵!=۱۲۰$ عضو است. بنابراین احتمال برابر $\frac{۲۴}{۱۲۰}=\frac{۱}{۵}=۰/۲$ است.

گروه آموزشی ماز

4 - ۳ دانش‌آموز رشتهٔ ریاضی و ۴ دانش‌آموز رشتهٔ تجربی در یک صف کنار هم ایستاده‌اند. با کدام احتمال دانش‌آموزان هم‌رشته کنار هم ایستاده‌اند؟

۱) $\frac{۴}{۳۵}$ ۲) $\frac{۲}{۳۵}$ ۳) $\frac{۲}{۷}$ ۴) $\frac{۱}{۷}$

پاسخ: گزینه ۲ (ریاضی ۱ ـ صفحات ۱۴۱ تا ۱۵۱ ـ ساده)

هر تست ماز یک کلاس درس!

در درسنامهٔ دو سوال قبلی دیدی که تعداد جایگشت‌های n شیء متمایز برابر !n است.

حال اگر n شیء داشته باشیم که $k_۱$ از نوع اول و $k_۲$ از نوع دوم و ...، k_m تا از نوع mام باشند و اشیاء هم نوع یکسان باشند تعداد حالات چیدن n شیء برابر $\frac{n!}{k_۱!\times k_۲!\times\ldots\times k_m!}$ است.

نمونه) تعداد ۷ حرفی‌های با حروف aabbbcc برابر $\frac{۷!}{۲!۳!۲!}$ است. در واقع اگر اشیاء یکسان داشته باشیم اول فرض کن اشیاء متفاوتن، بعد جواب بدست اومده رو تقسیم بر جایگشت‌های اشیاء یکسان کن.

ـ اگر $k_۱$ شیء متمایز از نوع ۱ و $k_۲$ شیء متمایز از نوع ۲ و ... ، k_m شیء متمایز از نوع m داشته باشیم تعداد حالاتی که تمام اشیاء چیده شوند به طوری‌که اشیاء هم‌نوع کنار هم باشند برابر است با: $m!\times k_۱!\times k_۲!\times\ldots\times k_m!$

ـ اگر اشیاء هم‌نوع یکسان باشند در این صورت تعداد حالات برابر !m است.

نمونه) تعداد حالاتی که ۳ کتاب ریاضی متمایز و ۴ کتاب فیزیک متمایز را می‌توان در یک قفسه چید به شرطی که کتاب‌های هم موضوع کنار هم باشند برابر $۲!\times۳!\times۴!$ است.

نمونه) در مثال بالا اگر کتاب‌های هم موضوع یکسان باشند در این صورت تعداد حالات چیدن آن‌ها در یک قفسه !۲ است. (فقط جایگشت دو دسته کتاب)

ـ حال اگر قرار باشد، اشیاء نوع اول که متمایزند کنار هم باشند تعداد حالات برابر است با: $(۱+k_۲+k_۳+\ldots+k_m)!\times k_۱!$

www.mapedu.ir

نمونه) تعداد حالاتی که ۳ کتاب ریاضی و ۴ کتاب فیزیک متمایز را می‌توان در یک قفسه چید به شرطی که کتاب‌های ریاضی کنار هم باشند برابر $(۱+۴)! \times ۳!$ است.

کتاب های ریاضی کتاب های فیزیک

ـ و اگر قرار باشد اشیاء نوع اول کنار هم باشند و اشیاء نوع دوم کنار هم باشند و لازم نباشد بقیهٔ اشیاء کنار هم باشند، تعداد حالات برابر است با:

$$(۲+k_۳+k_۴+...+k_m)! \times k_۱! \times k_۲!$$

با توجه به درسنامه:

$$n(A) = ۲! \times ۳! \times ۴!$$

$$n(S) = ۷!$$

$$\Rightarrow P(A) = \frac{۲! \times ۳! \times ۴!}{۷!} = \frac{۲ \times ۲ \times ۳}{۵ \times ۶ \times ۷} = \frac{۲}{۳۵}$$

سوالات منتخب:

۱- پنج کتاب زبان فارسی و ۳ کتاب زبان انگلیسی، به تصادف در یک قفسه کنار هم چیده شده‌اند. با کدام احتمال کتاب‌های هم‌زبان، کنار هم قرار می‌گیرند؟ *(کنکور تجربی ۹۹)*

۱) $\frac{۱}{۱۴}$ ۲) $\frac{۱}{۲۱}$ ۳) $\frac{۱}{۲۸}$ ✔ ۴) $\frac{۱}{۵۶}$

۲- ۱۰ نفر در یک صف ایستاده‌اند. با کدام احتمال دو فرد مورنظر از آن‌ها، در کنار هم نیستند؟ *(کنکور تجربی ۹۹ خارج)*

۱) $\frac{۲}{۳}$ ۲) $\frac{۳}{۴}$ ۳) $\frac{۴}{۵}$ ✔ ۴) $\frac{۹}{۱۰}$

(راهنمایی: از پیشامد متمم استفاده کن)

www.biomaze.ir

5 - سه کتاب ریاضی و سه کتاب فیزیک را در یک قفسه کنار هم چیده‌ایم. با کدام احتمال کتاب‌های ریاضی و فیزیک یک در میان قرار گرفته‌اند؟

۱) ۰/۰۵ ۲) ۰/۱ ۳) ۰/۲ ۴) ۰/۴

پاسخ: گزینه ۲ (ریاضی ۱ ـ صفحات ۱۴۲ تا ۱۵۱ ـ ساده)

هر تست ماز یک کلاس درس!

اگر n شیء متمایز از نوع اول و nشیء از نوع دوم داشته باشیم در صورتی که اشیاء هم‌نوع متفاوت باشند، تعداد حالاتی که این دو نوع شیء یک در میان قرار می‌گیرند برابر $۲ \times n! \times n!$ است و اگر اشیاء هم‌نوع یکسان باشند تعداد حالت‌ها ۲ است.

به ازای $n = ۳$ این دو حالت را داریم:

اگر $n+۱$ شیء از نوع اول و n شیء از نوع دوم باشند در صورتی که اشیاء هم‌نوع متفاوت باشند تعداد حالاتی که این دو نوع شیء یک در میان قرار می‌گیرند برابر $(n+۱)!n!$ است و اگر اشیاء هم‌نوع یکسان باشند تعداد حالات ۱ می‌باشد.

تعداد اعضای فضای نمونه‌ای برابر چیدن شش شیء متمایز است، که برابر $۶!$ است و تعداد اعضای پیشامد موردنظر برابر $۲ \times ۳! \times ۳!$ است بنابراین احتمال برابر $\frac{۲ \times ۳! \times ۳!}{۶!} = \frac{۲ \times ۶}{۶ \times ۵ \times ۴} = \frac{۱}{۱۰}$ است.

دقت کنید اگر فرض کنیم کتاب‌های هم موضوع یکسان‌اند باز هم جواب $\frac{۱}{۱۰}$ می‌شد.

گروه آموزشی ماز

6 - در پرتاب دو تاس احتمال این که مجموع دو تاس بزرگتر از ۵ باشد یا هر دو زوج باشند، کدام است؟

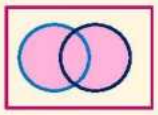
۱) $\frac{۳}{۴}$ ۲) $\frac{۵}{۶}$ ۳) $\frac{۵}{۹}$ ۴) $\frac{۸}{۹}$

www.mapedu.ir

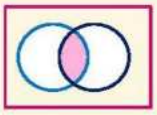
پاسخ: گزینه ۱ (ریاضی ۱ ـ صفحات ۱۴۲ تا ۱۵۱ ـ ساده)

هر تست ماز یک کلاس درس!

اجتماع دو پیشامد: پیشامد $A\cup B$ زمانی رخ دهد (اتفاق می‌افتد) که حداقل یکی از دو پیشامد رخ بدهند. (یا A رخ بدهد یا B رخ بدهد یا هر دو رخ بدهند)

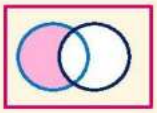


اشتراک دو پیشامد: پیشامد $A\cap B$ زمانی رخ می‌دهد که دو پیشامد با هم رخ بدهند. (هم پیشامد A رخ بدهد و هم پیشامد B رخ بدهد)



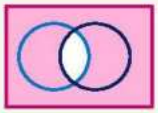
متمم یک پیشامد: متمم پیشامد A از فضای نمونه‌ای S را با A' یا A^c نمایش می‌دهند و این پیشامد زمانی رخ می‌دهد که A رخ ندهد، بنابراین $A\cap A'=\varnothing$ و $A\cup A'=S$ است.

تفاضل دو پیشامد: پیشامد $A-B$ زمانی رخ می‌دهد که پیشامد A رخ بدهد و پیشامد B رخ ندهد در واقع $A-B=A\cap B'$



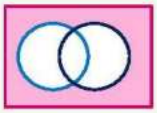
نکته)

متمم اشتراک:



$(A\cap B)'=A'\cup B'$

متمم اجتماع:



$(A\cup B)'=A'\cap B'$

- برای بدست آوردن احتمال اجتماع دو پیشامد از هر یک از روابط زیر می‌توانیم استفاده کنیم:

$$P(A\cup B)=P(A)+P(B)-P(A\cap B)=P(A)+P(B-A)=P(A-B)+P(B-A)+P(A\cap B)=1-P(A'\cap B')$$

- برای بدست آوردن احتمال متمم یک پیشامد از رابطهٔ زیر استفاده می‌کنیم:

$$P(A')=1-P(A)$$

- برای بدست آوردن احتمال تفاضل دو پیشامد از رابطهٔ زیر استفاده می‌کنیم:

$$P(A-B)=P(A\cap B')=P(A)-P(A\cap B)$$

نکته: در پرتاب دو تاس مجموع اعداد بزرگتر مساوی ۲ و کوچکتر یا مساوی ۱۲ است و مطابق جدول زیر تعداد حالات پیش آمده در مورد مجموع دو تاس را داریم، دقت کنید مجموع اعداد پشت و روی یک تاس ۷ است به همین دلیل جدول متقارن است.

مجموع	۲	۳	۴	۵	۶	۷	۸	۹	۱۰	۱۱	۱۲
تعداد حالات	۱	۲	۳	۴	۵	۶	۵	۴	۳	۲	۱
پیشامدها	(۱,۱)	(۱,۲) (۲,۱)	(۱,۳) (۲,۲) (۳,۱)	(۱,۴) (۲,۳) (۳,۲) (۴,۱)	(۱,۵) (۲,۴) (۳,۳) (۴,۲) (۵,۱)	(۱,۶) (۲,۵) (۳,۴) (۴,۳) (۵,۲) (۶,۱)	(۶,۲) (۵,۳) (۴,۴) (۳,۵) (۲,۶)	(۶,۳) (۵,۴) (۴,۵) (۳,۶)	(۶,۴) (۵,۵) (۴,۶)	(۶,۵) (۵,۵) (۵,۶)	(۶,۶)
	فضای نمونه در پرتاب دو تاس										

اگر A پیشامد مجموع دو تاس بزرگتر از ۵ ظاهر شده باشد و B پیشامد دو تاس زوج ظاهر شده باشد به دنبال $P(A\cup B)$ هستیم، از طرفی:

مجموع حالات مجموع دو تاس بیشتر از ۵ از روی جدول

$$P(A)=\frac{\overbrace{۵+۶+۵+۴+۳+۲+۱}}{۳۶}=\frac{۲۶}{۳۶}=\frac{۱۳}{۱۸}$$

هر تاس در سه حالت زوج ظاهر می‌شود. $\{۲,۴,۶\}$

$$P(B)=\frac{۳\times۳}{۳۶}=\frac{۹}{۳۶}=\frac{۱}{۴}$$

(طبق جدول درسنامه در ۸ مورد هر دو تاس زوج ظاهر می‌شوند و مجموع آن‌ها بزرگتر از ۵ است. وقتی مجموع ۶ است، دو مورد $(۲,۴)$ و $(۴,۲)$، وقتی مجموع ۸ است، سه مورد $(۲,۶),(۴,۴),(۶,۲)$ و وقتی مجموع ۱۰ است دو مورد $(۶,۴),(۴,۶)$، وقتی مجموع ۱۲ است یک مورد $(۶,۶)$)

بنابراین:

$$P(A\cap B)=\frac{۲+۳+۲+۱}{۳۶}=\frac{۸}{۳۶}=\frac{۲}{۹}$$

و در آخر:

$$P(A\cup B)=\frac{۱۳}{۱۸}+\frac{۱}{۴}-\frac{۲}{۹}=\frac{۲۶+۹-۸}{۳۶}=\frac{۲۷}{۳۶}=\frac{۳}{۴}$$

البته با محاسبه به روش زیر راحت‌تر به جواب می‌رسیدیم:

$$P(A\cup B)=P(A)+P(B-A)=\frac{۲۶}{۳۶}+\frac{۱}{۳۶}=\frac{۲۷}{۳۶}=\frac{۳}{۴}$$

تنها در یک مورد است که دو تاس زوج ظاهر می‌شوند و مجموع آن‌ها کوچکتر یا مساوی ۵ است، آن هم $(۲,۲)$ است.

سوالات منتخب:

به تصادف یک عدد طبیعی دو رقمی انتخاب می‌شود. با کدام احتمال، عدد انتخابی مضرب ۳ یا ۵ است؟

۱) $\frac{۲}{۵}$ ۲) $\frac{۳}{۵}$ ۳) $\frac{۷}{۱۵}$ ✔ ۴) $\frac{۸}{۱۵}$

(راهنمایی: برای شمارش اعداد دو رقمی مضرب ۳ اولین دو رقمی مضرب ۳ یعنی $۳\times۴=۱۲$ و آخرین دو رقمی مضرب ۳ یعنی $۳\times۳۳=۹۹$ را در نظر می‌گیریم، بعد تعداد اعضای مجموعهٔ $\{۴,۵,...,۳۳\}$ را در نظر می‌گیریم، بعد تعداد اعضای مجموعهٔ $\{۴,۵,...,۳۳\}$ را می‌شماریم که برابر $۳۳-۳=۳۰$ است و برای شمارش دو رقمی‌های مضرب ۵ هم به همین ترتیب تعداد آن‌ها را بدست می‌آوریم که برابر $۱۹-۱=۱۸$ است. به همین ترتیب تعداد دو رقمی‌های مضرب ۱۵ هم برابر ۶ است و تعداد کل دو رقمی‌ها هم که برابر $۹۹-۹=۹۰$ است.

www.biomaze.ir

7 - می‌خواهیم زیر مجموعه‌ای ۴ عضوی از مجموعهٔ $\{a,b,c,d,e,f,g\}$ انتخاب کنیم. احتمال این که این زیرمجموعه شامل حداقل یکی از دو عضو a یا b باشد و شامل c نباشد کدام است؟

۱) $\frac{۲}{۵}$ ۲) $\frac{۴}{۷}$ ۳) $\frac{۳}{۷}$ ۴) $\frac{۱۶}{۳۵}$

پاسخ: گزینه ۱ (ریاضی ۱ ـ صفحات ۱۴۲ تا ۱۵۱ ـ ساده)

هر تست ماز یک کلاس درس!

اگر بخواهیم از یک مجموعهٔ n عضوی زیرمجموعه‌ای k عضوی انتخاب کنیم تعداد حالات برابر است با: $\binom{n}{k}=\frac{n!}{(n-k)!\times k!}$

حال اگر بخواهیم:

	شامل a باشد	شامل a و b باشد	شامل c نباشد	شامل c و d نباشد
تعداد حالات	$\binom{n-۱}{k-۱}$	$\binom{n-۲}{k-۲}$	$\binom{n-۱}{k}$	$\binom{n-۲}{k}$

	شامل a باشد و شامل c نباشد	شامل a و b باشد و شامل c نباشد
تعداد حالات	$\binom{n-۲}{k-۱}$	$\binom{n-۳}{k-۲}$

www.mapedu.ir

روش اول) اگر بخواهیم زیرمجموعه شامل حداقل یکی از دو عضو a یا b باشد و شامل C نباشد، یا باید زیرمجموعهٔ موردنظر باید شامل a باشد و شامل c نباشد، تعداد چنین مجموعه‌هایی برابر $\binom{۵}{۳}=۱۰$ است.

یا باید زیرمجموعه شامل b باشد و شامل c نباشد، که تعداد چنین زیرمجموعه‌هایی هم برابر ۱۰ است. در هر دو حالت فوق تعداد حالاتی که زیرمجموعه شامل b و a باشد و شامل c نباشد حساب شده که تعداد حالات برابر $\binom{۴}{۲}=۶$ است. بنابراین:

تعداد کل حالات برابر $۱۰+۱۰-۶=۱۴$ است.

دقت کن $n(A\quad B)=n(A)+n(B)-n(A\quad B)$

از طرفی فضای نمونه‌ای دارای $\binom{۷}{۴}=۳۵$ عضو می‌باشد، پس احتمال برابر $\frac{۱۴}{۳۵}=\frac{۲}{۵}$ است.

روش دوم) ابتدا احتمال حالتی را بدست می‌آوریم که زیرمجموعه شامل c نباشد یعنی $\frac{\binom{۶}{۴}}{\binom{۷}{۴}}=\frac{۱۵}{۳۵}=\frac{۳}{۷}$ ، حالا احتمال حالتی را بدست آوریم که زیرمجموعه شامل c، b و a نباشد یعنی $\frac{\binom{۴}{۴}}{\binom{۷}{۴}}=\frac{۱}{۳۵}$ ، احتمال مورد نظر ما برابر اختلاف این دو احتمال است یعنی $\frac{۳}{۷}-\frac{۱}{۳۵}=\frac{۱۴}{۳۵}=\frac{۲}{۵}$ است.

(کل زیرمجموعه‌هایی که شامل c نباشد دو دسته‌اند)

زیرمجموعه‌هایی که a و b را ندارند.	زیرمجموعه‌هایی که حداقل یکی از a یا b را دارند

گروه آموزشی ماز

8 - تاس را پرتاب می‌کنیم، اگر ۴ ظاهر شود برنده‌ایم و اگر ۴ ظاهر نشود مجدداً تاس را پرتاب می‌کنیم و به همین ترتیب ادامه می‌دهیم، احتمال این که حداکثر در سه پرتاب برنده شویم چقدر است؟

۱) $\frac{۹۱}{۲۱۶}$ ۲) $\frac{۲۵}{۲۱۶}$ ۳) $\frac{۱}{۶}$ ۴) $\frac{۵}{۳۶}$

پاسخ: گزینه ۱ (ریاضی ۱ ـ صفحات ۱۴۲ تا ۱۵۱ ـ ساده)

هر تست ماز یک کلاس درس!

اگر A و B دو پیشامد ناسازگار باشند: $P(A\cup B)=P(A)+P(B)$

حال اگر سه پیشامد A و B و C دو به دو ناسازگار باشند: $P(A\cup B\cup C)=P(A)+P(B)+P(C)$

ـ چیدن n شیء در k مکان به شرطی که تکرار مجاز باشد n^k حالت دارد و اگر تکرار مجاز نباشد $P(n,k)=\frac{n!}{(n-k)!}$ حالت داریم.

ـ تعداد حالاتی که ۳ نفر می‌توانند در فصول سال به دنیا بیایند برابر $۴\times۴\times۴=۴^۳$ است و تعداد حالاتی که سه نفر در فصول مختلف سال بدنیا بیایند $۴\times۳\times۲$ است و تعداد حالاتی که سه نفر در یک فصل سال بدنیا بیایند برابر $۴^۱=۴$ است.

با توجه به درسنامه، فضای نمونه‌ای در پرتاب سه تاس، دو تاس و یک تاس به ترتیب $۶^۳$، $۶^۲$ و ۶ عضو دارد و پیشامد این که در پرتاب سه تاس، تاس آخر عدد ۴ ظاهر شود و بقیه ۴ ظاهر نشوند $۱\times۵\times۵$ عضو دارد و پیشامد این که در پرتاب دو تاس، تاس اول ۴ ظاهر نشود و تاس دو ۴ ظاهر شود ۱×۵ عضو دارد و پیشامد ظاهر شدن ۴ در پرتاب یک تاس ۱ عضو دارد. دقت کن یا بار اول برنده‌ایم (۴ ظاهر می‌شود) یا بار اول بازنده‌ایم و بار دوم برنده‌ایم یا بار اول و دوم بازنده‌ایم و بار سوم برنده‌ایم، با توجه به ناسازگار بودن سه پیشامد بالا احتمال برابر است با:

$$\frac{۱\times۵\times۵}{۶^۳}+\frac{۱\times۵}{۶^۲}+\frac{۱}{۶}=\frac{۲۵+۳۰+۳۶}{۶^۳}=\frac{۹۱}{۲۱۶}$$

سوالات منتخب:

با کدام احتمال ۳ نفر در یک فصل بدنیا می‌آیند؟

۱) $\frac{۱}{۶۴}$ ۲) $\frac{۱}{۱۶}$ ✓ ۳) $\frac{۳}{۶۴}$ ۴) $\frac{۳}{۱۶}$

www.biomaze.ir

9 - در یک کیسه ۲ مهرهٔ قرمز و ۴ مهرهٔ آبی وجود دارد. یک مهره به تصادف از کیسه خارج می‌کنیم و آن را مشاهده می برمی‌گردانیم. اگر سه بار این کار را انجام دهیم با چه احتمالی ۲ بار مهرهٔ قرمز مشاهده کرده‌ایم؟

۱) $\frac{۲}{۹}$ ۲) $\frac{۴}{۹}$ ۳) $\frac{۲}{۲۷}$ ۴) $\frac{۴}{۲۷}$

پاسخ: گزینه ۱ (ریاضی ۱ ـ صفحه ۱۴۲ تا ۱۵۱ ـ متوسط)

هر تست ماز یک کلاس درس!

اگر آزمایشی که تنها دو نتیجه دارد، (شکست و پیروزی) را n مرتبه انجام دهیم در صورتی که احتمال پیروزی در یک مرتبه آزمایش P باشد، احتمال k پیروزی در n آزمایش از رابطهٔ زیر بدست می‌آید:

$$\binom{n}{k}P^k(۱-P)^{n-k}$$

نمونه) در پرتاب ۴ سکه چقدر احتمال دارد که فقط یک بار رو ظاهر شود؟

قرار است آزمایش را ۴ مرتبه انجام دهیم و احتمال پیروزی (رو ظاهر شدن) $\frac{۱}{۲}$ است. بنابراین احتمال ۱ پیروزی در ۴ مرتبه آزمایش برابر $\binom{۴}{۱}(\frac{۱}{۲})^۱(۱-\frac{۱}{۲})^۳$

(یعنی $\frac{۱}{۴}=\frac{۴}{۱۶}$) است.

در هر بار خارج کردن یک مهره از کیسه احتمال پیروزی (مشاهدهٔ مهرهٔ قرمز) برابر $\frac{۱}{۳}=\frac{۲}{۶}$ است بنابراین در سه بار انجام آزمایش، احتمال دو پیروزی به صورت زیر بدست می‌آید:

$$\binom{۳}{۲}(\frac{۱}{۳})^۲(۱-\frac{۱}{۳})^۱=\frac{۲}{۹}$$

توجه کنید سوال‌هایی از این قبیل با کشیدن نمودار درختی نیز حل می‌گردند اما فرمول‌های فوق برای تسریع در حل سوال بیان شده است.

گروه آموزشی ماز

10 - علی و حسن به همراه پنج تن از دوستان خود دور یک میز گرد نشسته‌اند. چقدر احتمال دارد علی و حسن کنار هم نباشند؟

۱) $\frac{۱}{۳}$ ۲) $\frac{۲}{۳}$ ۳) $\frac{۲}{۷}$ ۴) $\frac{۵}{۷}$

پاسخ: گزینه ۲ (ریاضی ۱ ـ صفحات ۱۴۲ تا ۱۵۱ ـ ساده)

هر تست ماز یک کلاس درس!

تعداد حالات قرارگرفتن n نفر دور یک میز گرد برابر $(n-۱)!$ است و اگر ۲ نفر از n نفر کنار هم بنشینند تعداد حالات برابر $(n-۲)!\times ۲!$ است.

جابه‌جایی دو نفر

و اگر n عددی زوج باشد و بخواهیم n نفر یک در میان کنار هم بنشینند تعداد حالات $(\frac{n}{۲})!(\frac{n}{۲}-۱)!$ است.

و تعداد گردنبندهایی که با n مهرهٔ متمایز می‌توان ساخت برابر $\frac{(n-۱)!}{۲}$ است.

راه‌حل اول) از پیشامد متمم استفاده می‌کنیم. تعداد اعضای فضای نمونه‌ای یعنی تعداد حالاتی که ۷ نفر دور میز گرد می‌نشینند !۶ است و تعداد حالاتی که اگر دو نفر از این ۷ نفر کنار هم بنشینند برابر !۵×!۲ است. بنابراین:

$$P(A)=\frac{۵!\times ۲!}{۶!}=\frac{۲}{۶}=\frac{۱}{۳}\Rightarrow P(A')=\frac{۲}{۳}$$

(A پیشامد کنار هم قرار گرفتن علی و حسن است)

www.mapedu.ir

راه‌حل دوم) فرض کنیم علی روی یکی از صندلی‌های دور میز نشسته است، بنابراین ۶ صندلی خالی باقی می‌ماند که برای این که حسن کنار او ننشیند ۴ انتخاب دارد، پس احتمال برابر $\frac{۴}{۶}=\frac{۲}{۳}$ است.

سوالات منتخب:

۱- در یک جلسهٔ آموزشی میزگردی شامل ۴ دانش‌آموز کلاس پایهٔ یازدهم و ۴ دانش‌آموز کلاس پایهٔ دوازدهم تشکیل شده است. به چند حالت دانش‌آموزان در صندلی‌ها بنشینند، به طوری‌که در کنار هر دانش‌آموزی، دانش‌آموز هم‌پایه قرار نگیرد؟ *(کنکور تجربی ۱۴۰۰)*

۱) ۱۴۴ ✓ ۲) ۲۸۸ ۳) ۲۷۶ ۴) ۱۱۵۲

۲- یک خانوادهٔ شش نفره دور یک میز گرد نشسته‌اند، چقدر احتمال دارد که مادر و پدر کنار هم نشسته باشند؟ *(دوپینگ ماز ۱۴۰۰)*

۱) $\frac{۱}{۵}$ ۲) $\frac{۱}{۶}$ ۳) $\frac{۲}{۵}$ ✓ ۴) $\frac{۱}{۳}$

www.biomaze.ir

11- اگر $S=\{a,b,c,d,e,f\}$ فضای نمونه‌ای یک آزمایش باشد و $A=\{a,b,c\}$ و $B=\{b,d\}$ و $C=\{d\}$ سه پیشامد این آزمایش باشند، چه تعداد از گزاره‌های زیر درست است؟

الف) A و C ناسازگارند. **ب) B و C مستقل‌اند.** **پ) A و B مستقل‌اند.**

ت) B و C ناسازگارند. **ث) C و A وابسته‌اند.** **ج) $P(B|C)=۱$**

۱) ۳ ۲) ۴ ۳) ۵ ۴) ۶

پاسخ: گزینه ۲ (ریاضی ۱ و ریاضی ۲ ـ صفحات ۱۴۵ تا ۱۵۱ ریاضی ۱ و صفحات ۱۴۴ تا ۱۵۲ ریاضی ۲ ـ ساده)

هر تست ماز یک کلاس درس!

احتمال شرطی: منظور از $P(A|B)$ احتمال وقوع پیشامد A است به شرطی که پیشامد B رخ داده باشد. برای محاسبهٔ احتمال وقوع پیشامد A به شرطی که B رخ داده باشد از رابطهٔ زیر استفاده می‌کنیم:

$$P(A|B)=\frac{P(A\cap B)}{P(B)}$$

اگر $B\subset A$ باشد، $P(A\cap B)=P(B)$ و $P(A|B)=۱$ می‌شود.

ـ دو پیشامد A و B را مستقل گوییم هرگاه $P(A|B)=P(A)$ باشد در این صورت $P(A\cap B)=P(A)\times P(B)$ است در غیر این صورت یعنی اگر $P(A\cap B)\neq P(A)\times P(B)$ باشد دو پیشامد A و B را وابسته می‌گوییم.

ـ دو پیشامد A و B را ناسازگار می‌گوییم هرگاه $A\cap B=\varnothing$ باشد در این صورت $P(A\cap B)=۰$ است و $P(A\cup B)=P(A)+P(B)$ است. اگر $A\cap B\neq\varnothing$ باشد، A و B سازگارند.

$P(A)=\frac{n(A)}{n(S)}=\frac{۳}{۶}=\frac{۱}{۲}$ و $P(B)=\frac{۲}{۶}=\frac{۱}{۳}$ و $P(C)=\frac{۱}{۶}$

$A\cap B=\{b\}\Rightarrow P(A\cap B)=\frac{۱}{۶}$

$A\cap C=\varnothing\Rightarrow P(A\cap C)=۰$

$C\subset B\Rightarrow B\cap C=C$ و $P(B\cap C)=\frac{۱}{۶}$

حالا بریم سراغ بررسی گزاره‌ها:

✓الف) درست است زیرا: $P(A\cap C)=۰$

✗ب) نادرست است زیرا: $P(B)\times P(C)\neq P(B\cap C)\Rightarrow \frac{۱}{۳}\times\frac{۱}{۶}\neq\frac{۱}{۶}$

× = ✓

www.mapedu.ir

✗ت) نادرست است زیرا: $P(B\cap C)=\frac{1}{6}\neq 0$

✓ث) درست است زیرا: $P(A)\times P(C)\neq P(A\cap C)\Rightarrow \frac{1}{2}\times\frac{1}{6}\neq 0$

✓ج) درست است زیرا: $P(B|C)=\frac{P(B\cap C)}{P(C)}=\frac{P(C)}{P(C)}=1$

بنابراین ۴ گزاره درست است.

گروه آموزشی ماز

12 - علی دو مسابقه پیش رو دارد. اگر احتمال پیروزی او در مسابقهٔ اول ۰/۸ باشد و احتمال برد در مسابقهٔ دوم به شرط پیروزی در مسابقهٔ اول ۰/۶ باشد، احتمال این که علی مسابقهٔ اول را ببرد و مسابقهٔ دوم را ببازد چقدر است؟

۱) ۰/۴۸ ۲) ۰/۳۲ ۳) ۰/۹۲ ۴) ۰/۱۲

پاسخ: گزینه ۲ (ریاضی ۲ و ریاضی ۱ ـ صفحات ۱۴۴ تا ۱۵۲ ریاضی ۲ و صفحات ۱۴۴ تا ۱۴۶ ریاضی ۱ ـ متوسط)

هر تست ماز یک کلاس درس!

ـ پیشامد $A-B$ یا $A\cap B'$ یعنی A رخ دهد و B رخ ندهد و احتمال آن از رابطهٔ زیر بدست می‌آید:

$$P(A-B)=P(A\cap B')=P(A)-P(A\cap B)$$

ـ احتمال شرطی: احتمال وقوع پیشامد A به شرط این که B رخ داده باشد از رابطهٔ زیر بدست می‌آید:

$$P(A|B)=\frac{P(A\cap B)}{P(B)}$$

بنابراین: $P(A\cap B)=P(A|B)\times P(B)$

اگر A پیشامد برد علی در مسابقهٔ اول باشد و B پیشامد برد علی در مسابقهٔ دوم، در این صورت ما به دنبال $P(A-B)=P(A\cap B')$ هستیم از طرفی: $P(A)=0/8$

$$P(B|A)=\frac{P(B\cap A)}{P(A)}\Rightarrow 0/6=\frac{P(B\cap A)}{0/8}\Rightarrow P(B\cap A)=0/48$$

بنابراین: $P(A-B)=P(A\cap B')=P(A)-P(A\cap B)=0/8-0/48=0/32$

سوالات منتخب:

احتمال موفقیت فردی، در آزمون اول ۰/۷ و در آزمون دوم ۰/۶ است. اگر این فرد در آزمون اول موفق شود، احتمال موفقیت وی در آزمون دوم ۰/۸ می‌شود. با کدام احتمال، لااقل در یکی از این دو آزمون، موفق می‌شود؟

۱) ۰/۷۴ ✓ ۲) ۰/۷۶ ۳) ۰/۸۲ ۴) ۰/۸۴

www.biomaze.ir

13 - ۵ سکه را پرتاب کرده‌ایم. اگر حداقل دو تای آن‌ها رو ظاهر شده باشد با کدام احتمال حداقل یکی از سکه‌های دیگر پشت ظاهر می‌شود؟

۱) $\frac{7}{8}$ ۲) $\frac{12}{13}$ ۳) $\frac{25}{26}$ ۴) $\frac{9}{10}$

پاسخ: گزینه ۳ (ریاضی ۲ ـ صفحات ۱۴۴ تا ۱۵۲ ـ ساده)

هر تست ماز یک کلاس درس!

$$P(A|B)=\frac{P(A\cap B)}{P(B)}=\frac{n(A\cap B)}{n(B)}$$

اگر B پیشامد ظاهر شدن حداقل ۲ سکه رو در پرتاب ۵ سکه باشد پیشامد B، $2^5-1-5=26$ عضو دارد که تنها در یکی از آن‌ها همهٔ سکه‌ها رو هستند بنابراین در ۲۵ عدد از آن‌ها حداقل یک پشت وجود دارد، بنابراین اگر A پیشامد ظاهر شدن حداقل یک پشت باشد: $P(A|B)=\frac{n(A\cap B)}{n(B)}=\frac{25}{26}$

دقت کنید فضای نمونه‌ای پرتاب ۵ سکه $2^5=32$ عضو دارد که در ۵ تا از آن‌ها فقط یک سکه رو ظاهر می‌شود و در یکی همگی پشت. پس تعداد اعضای پیشامدی که در آن حداقل ۲ رو ظاهر شده برابر $32-5-1=26$ است.

www.mapedu.ir

سوالات منتخب:

می‌دانیم مادری سه فرزند دارد و حداقل یکی از فرزندانش دختر است. این مادر با کدام احتمال پسر دارد؟

۱) $\frac{۷}{۸}$ ۲) $\frac{۶}{۷}$ ✓ ۳) $\frac{۳}{۴}$ ۴) $\frac{۱}{۷}$

گروه آموزشی ماز

14 - اگر $P(A|B)=\frac{۱}{۳}$ و $P(B-A)=۰/۲$ و $P(A-B)=۰/۵$ باشد، $P(A\cup B)$ کدام است؟

۱) ۰/۷ ۲) ۰/۸ ۳) ۰/۹ ۴) ۰/۶

پاسخ: گزینه ۲ (ریاضی ۲ ـ صفحات ۱۵۸ تا ۱۴۲ ـ ساده)

$$P(A|B)=\frac{P(A\cap B)}{P(B)}=\frac{۱}{۳}$$

بنابراین:

$$\frac{P(A\cap B)}{P(B)-P(A\cap B)}=\frac{۱}{۳-۱}=\frac{۱}{۲}$$

از طرفی:

$$P(B-A)=P(B)-P(A\cap B)$$

و چون: $P(B-A)=۰/۲$

پس:

$$\frac{P(A\cap B)}{۰/۲}=\frac{۱}{۲}\Rightarrow P(A\cap B)=۰/۱$$

از طرفی:

$$P(A\cup B)=P(A-B)+P(B-A)+P(A\cap B)=۰/۵+۰/۲+۰/۱=۰/۸$$

www.biomaze.ir

15 - احتمال قبولی علی در دروس ریاضی و ادبیات و شیمی به ترتیب ۰/۶، ۰/۷ و ۰/۸ است، احتمال قبولی علی حداقل در یکی از این دروس کدام است؟

۱) ۰/۹۸۴ ۲) ۰/۹۷۶ ۳) ۰/۹۶۶ ۴) ۰/۹۷۹

پاسخ: گزینه ۲ (ریاضی ۲ و ریاضی ۱ ـ صفحات ۱۴۴ تا ۱۵۴ ریاضی ۲ و صفحات ۱۴۴ و ۱۴۵ ریاضی ۱ ـ ساده)

هر تست ماز یک کلاس درس!

اگر دو پیشامد A و B مستقل باشند در این صورت برای محاسبهٔ احتمال اجتماع دو پیشامد از یکی از راوبط زیر استفاده می‌کنیم. (استفاده از رابطهٔ آخر سریع‌تر است.)

$$P(A\cup B)=P(A)+P(B)-P(A)\times P(B)$$

$$P(A\cup B)=P(A)\times P(B')+P(B)\times P(A')+P(A)\times P(B)$$

$$P(A\cup B)=۱-P(A')\times P(B')$$

حال اگر سه پیشامد مستقل A، B و C را داشته باشیم برای محاسبهٔ احتمال اجتماع سه پیشامد بهتر است از رابطهٔ زیر استفاده کنیم:

$$P(A\cup B\cup C)=۱-P(A')\times P(B')\times P(C')$$

با توجه به این که قبولی در دروس مختلف مستقل‌اند از رابطه‌ای که در درسنامه آمده استفاده می‌کنیم:

احتمال این که علی در درس ادبیات قبول نشود.

$$۱-\underbrace{(۱-۰/۶)}_{\text{احتمال این که علی در درس ریاضی قبول نشود.}}\overbrace{(۱-۰/۷)}^{\text{احتمال این که علی در درس ادبیات قبول نشود.}}\underbrace{(۱-۰/۸)}_{\text{احتمال این که علی در درس شیمی قبول نشود.}}=۱-۰/۴\times۰/۳\times۰/۲=۰/۹۷۶$$

گروه آموزشی ماز

16 - کدام گزینه یک افراز روی مجموعهٔ $S=\{a,b,c,d,e\}$ درست کرده‌اند؟

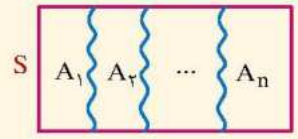
۱) $\{a,b\},\{b,c,d\},\{e\}$ ۲) $\{a\},\{b\},\{c,d\}$

۳) $\{a,b,c\},\{b,d,e\}$ ۴) $\{a\},\{b,c\},\{d,e\}$

پاسخ: گزینه ۴ (ریاضی ۳ ـ صفحه ۱۴۵ ـ ساده)

هر تست ماز یک کلاس درس!

افراز: فرض کنید $A_1, A_2, ..., A_n$ زیرمجموعه‌های ناتهی S باشند و برای هر $i \neq j$ داشته باشیم $A_i \cap A_j = \varnothing$ یعنی اشتراک دو به دوی آن‌ها تهی باشد و $A_1 \cup A_2 \cup ... \cup A_n = S$ یعنی اجتماع همهٔ آن‌ها برابر مجموعهٔ S باشد در این صورت مجموعه‌های $A_1, A_2, ..., A_n$ یک افراز روی S درست کرده اند.



نمونه) اعداد زوج و فرد یک افراز برای $\mathbb{N}$ هستند.

(راستی طبق پاورقی صفحهٔ ۱۴۵ قرار نیست از تعداد افرازهای یک مجموعه تو کنکور تجربی سوال بیاد)

با توجه به درسنامه به دنبال گزینه‌ای هستیم که اجتماع مجموعه‌های موجود در گزینه برابر S باشد و دو به دوی مجموعه‌های اون گزینه اشتراک نداشته باشن. گزینهٔ ۴ این ویژگی رو داره و اما سایر گزینه‌ها:

بررسی سایر گزینه‌ها

گزینهٔ ۱: $\{a,b\} \cap \{b,c,d\} = \{b\}$

گزینهٔ ۲: $\{a\} \cup \{b\} \cup \{c,d\} = \{a,b,c,d\} \neq S$

گزینهٔ ۳: $\{a,b,c\} \cap \{b,d,e\} = \{b\}$

www.biomaze.ir

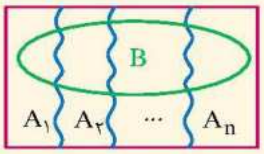
17 - در یک دبیرستان دورهٔ دوم بیست دانش‌آموز سال دوازدهم و سی دانش‌آموز یازدهم و پنجاه دانش‌آموز سال دهم وجود دارد. اگر ۰/۸ دانش‌آموزان دوازدهمی و ۰/۷ دانش‌آموزان یازدهمی و ۰/۶ دانش‌آموزان سال دهمی معدل بالای ۱۸ داشته باشند با انتخاب یک دانش‌آموز از این مدرسه با چه احتمالی معدل بالای ۱۸ دارد؟

۱) ۰/۷۲ ۲) ۰/۷ ۳) ۰/۶۷ ۴) ۰/۶

پاسخ: گزینه ۳ (ریاضی ۳ ـ صفحات ۱۴۵ تا ۱۴۸ ـ ساده)

هر تست ماز یک کلاس درس!

قانون احتمال کل: اگر فرض کنیم $A_1, A_2, ..., A_n$ پیشامدهایی باشند که روی فضای نمونه‌ای S یک افراز تشکیل می‌دهند و B یک پیشامد دلخواه باشد، برای محاسبهٔ احتمال وقوع پیشامد B از رابطهٔ زیر استفاده می‌کنیم که به آن قانون احتمال کل می‌گوییم.



$$P(B) = P(A_1) \times P(B|A) + P(A_2)P(B|A_2) + ... + P(A_n)P(B|A_n)$$

در واقع رابطهٔ بالا به صورت زیر بوده و چون $P(B \cap A_i) = P(A_i) \times P(B|A_i)$ است به شکل بالا در آمده:

$$P(B) = P(B \cap A_1) + P(B \cap A_2) + ... + P(B \cap A_n)$$

برای استفاده از قانون احتمال کل جملهٔ زیر کمکت می‌کنه:

«دانش‌آموز انتخاب شده یا سال دوازدهمه و معدل بالا داره یا سال یازدهمه و معدل بالا داره یا سال دهمه و معدل بالا داره»

بنابراین احتمال این که دانش‌آموز انتخاب شده معدل بالا داشته باشد از رابطهٔ زیر بدست میاد:

احتمال سال یازدهمی بودن — احتمال معدل بالا داشتن به شرط یازدهمی بودن

$$\frac{۲۰}{۱۰۰} \times ۰/۸ + \frac{۳۰}{۱۰۰} \times ۰/۷ + \frac{۵۰}{۱۰۰} \times ۰/۶ = \frac{۱۶+۲۱+۳۰}{۱۰۰} = ۰/۶۷$$

احتمال سال دوازدهمی بودن — احتمال معدل بالا داشتن به شرط دوازدهمی بودن — احتمال سال — احتمال معدل بالا داشتن به شرط دهمی بودن

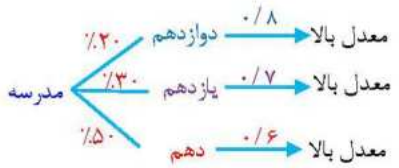
www.mapedu.ir

این روش هم برای درک بهتر راه‌حل کمکت می‌کنه:

	دوازدهمی‌ها	یازدهمی‌ها	دهمی‌ها	کل
افرادی که معدل بالا دارند	۰/۸×۲۰=۱۶	۰/۷×۳۰=۲۱	۰/۶×۵۰=۳۰	۶۷
افرادی که معدل بالا ندارند.	۲۰−۱۶=۴	۳۰−۲۱=۹	۵۰−۳۰=۲۰	۳۳
کل	۲۰	۳۰	۵۰	۱۰۰

کل دوازدهمی‌ها ۲۰ نفرند که ۰/۸ آن‌ها یعنی ۰/۸×۲۰=۱۶ نفر معدل بالا دارند.
کل یازدهمی‌ها ۳۰ نفرند که ۰/۷ آن‌ها یعنی ۰/۷×۳۰=۲۱ نفر معدل بالا دارند.
کل دهمی‌ها ۵۰ نفرند که ۰/۶ آن‌ها یعنی ۰/۶×۵۰=۳۰ نفر معدل بالا دارند.
حالا تعداد کل معدل بالاها یعنی ۶۷ رو به کل مدرسه که ۱۰۰ نفره تقسیم می‌کنیم تا احتمال معدل بالا بودن بدست بیاید.

نمودار درختی زیر و هم ببین:



احتمال معدل بالا داشتن برابر مجموع، حاصل‌ضرب اعداد روی هر شاخه یعنی: ۰/۲ × ۰/۸ + ۰/۳×۰/۷ + ۰/۵ × ۰/۶ = ۰/۶۷

سوالات منتخب:

۱- بهروز جهت مشارکت در یک مسابقه، از بین پرسش‌های ۵ بستهٔ ریاضی، ۷ بستهٔ تجربی و ۶ بسته علوم انسانی، به تصادف یک بسته اختیار کرده است. احتمال برنده شدن در هر بسته این دروس به ترتیب ۰/۷ و ۰/۸ و ۰/۹ است. با کدام احتمال، بهروز برنده می‌شود؟ *(کنکور تجربی ۹۸ خارج)*

۱) $\frac{۲۵}{۳۶}$ ۲) $\frac{۲۹}{۳۶}$ ✔ ۳) $\frac{۳۰}{۳۶}$ ۴) $\frac{۳۱}{۳۶}$

۲- در جعبه‌ای ۵ مهرهٔ سفید و ۶ مهرهٔ سیاه است. ابتدا یک مهره را بدون رویت خارج می‌کنیم. سپس از بین بقیهٔ مهره‌ها، ۲ مهره بیرون می‌کشیم. با کدام احتمال هر دو مهرهٔ اخیر، سفید است؟ *(کنکور تجربی ۹۸)*

۱) $\frac{۱}{۱۱}$ ۲) $\frac{۲}{۱۱}$ ✔ ۳) $\frac{۴}{۱۱}$ ۴) $\frac{۵}{۲۲}$

۳- در یک شرکت تعداد کارمندان زن دو برابر کارمندان مرد است. اگر ۶۰٪ کارمندان زن و ۸۰٪ کارمندان مرد بیمه شده باشند، با انتخاب یک فرد در این شرکت، وی با چه احتمالی بیمه شده است؟ *(دوپینگ ماز ۱۴۰۰)*

۱) $\frac{۱}{۲}$ ۲) $\frac{۱}{۶}$ ۳) $\frac{۱}{۳}$ ۴) $\frac{۲}{۳}$ ✔

(ببین سوال آخر امتحان نهایی امسال شبیه ایناس، پس حتماً سوال منتخب‌ها رو برای تمرین حل کن.)

گروه آموزشی ماز

18 - در یک دانشگاه، نسبت دانشجویان پسر به دختر برابر $\frac{۲}{۳}$ است. اگر ده درصد دانشجویان پسر و بیست درصد دانشجویان دختر بیشتر از صد واحد درسی را گذرانده باشند، با انتخاب یک دانشجو به تصادف با چه احتمالی او بیشتر از صد واحد درسی را گذرانده است؟

۱) ۰/۱۶ ۲) ۰/۱۵ ۳) $\frac{۲}{۱۵}$ ۴) $\frac{۱}{۶}$

پاسخ: گزینه ۱ (ریاضی ۳ و ریاضی ۱ ـ صفحات ۱۴۴ تا ۱۴۸ ریاضی ۳ و صفحات ۱۴۵ و ۱۵۶ ریاضی ۱ ـ ساده)

هر تست ماز یک کلاس درس!

اگر $\frac{P(A)}{P(A')}=\frac{a}{b}$ باشد در این صورت $P(A)=\frac{a}{a+b}$ و $P(A')=\frac{b}{a+b}$ است.

اگر پیشامد A دانشجوی پسر بودن باشد، بنابراین A' پیشامد دانشجوی دختر بودن است و چون $\frac{n(A)}{n(A')}=\frac{۲}{۳}$ است پس طبق درسنامه $P(A)=\frac{۲}{۵}$ و $P(A')=\frac{۳}{۵}$ است. از طرفی با انتخاب یک دانشجو یا پسر است و بیشتر از صد واحد درسی را گذرانده یا دختر است و بیشتر از صد واحد درسی را گذرانده.

بنابراین احتمال این که دانشجوی انتخاب شده بیشتر از صد واحد درسی را گذرانده باشد به صورت زیر بدست می‌آید:

$$\frac{۲}{۵}\times\frac{۱۰}{۱۰۰}+\frac{۳}{۵}\times\frac{۲۰}{۱۰۰}=\frac{۸۰}{۵۰۰}=\frac{۸}{۵۰}=\frac{۱۶}{۱۰۰}$$

یه نگاهم به جدول زیر بنداز:

	دانشجویان پسر	دانشجویان دختر	تعداد کل
افرادی که بیشتر از صد واحد درسی را گذرانده‌اند.	۴	۱۲	۱۶
افرادی که کمتر یا مساوی صد واحد درسی را گذرانده‌اند.	۳۶	۴۸	۸۴
تعداد کل	۴۰	۶۰	۱۰۰

اگر فرض کنیم این دانشگاه ۱۰۰ دانشجو داره $(\frac{۲}{۵}\times۱۰۰=۴۰)$ نفر پسر هستن و بقیه دختر $(۱۰۰-۴۰=۶۰)$، از طرفی ده درصد پسرها یعنی $(\frac{۱۰}{۱۰۰}\times۴۰=۴)$ نفر بیشتر از صد واحد درسی رو گذروندن و بیست درصد دخترها یعنی $(\frac{۲۰}{۱۰۰}\times۶۰=۱۲)$ نفر هم بیشتر از صد واحد درسی رو گذروندن (جدول بالا رو اینجوری کامل کردیم)

بالاخره کل دانشجوهایی که بیشتر از صد واحد درسی رو گذروندن $۱۲+۴=۱۶$ نفر هستند و کل دانشگاه هم که صد دانشجو داشت پس جواب $\frac{۱۶}{۱۰۰}$ میشه.

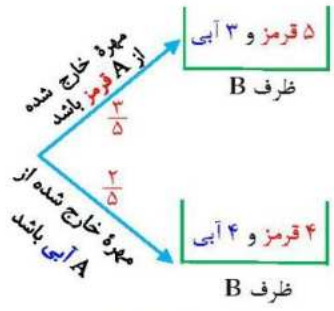
www.biomaze.ir

19 - جعبهٔ **A** شامل ۳ مهرهٔ قرمز و ۲ مهرهٔ آبی است و جعبهٔ **B** شامل ۴ مهرهٔ قرمز و ۳ مهرهٔ آبی است. یک مهره از ظرف **A** خارج می‌کنیم و در ظرف **B** قرار می‌دهیم سپس ۲ مهره از ظرف **B** خارج می‌کنیم. احتمال این که دو مهره آخر همرنگ باشند چقدر است؟

۱) ۰/۵ ۲) $\frac{۲۵}{۴۶}$ ۳) ۰/۴۵ ۴) $\frac{۱}{۳}$

پاسخ: گزینه ۳ (ریاضی ۳ ـ صفحات ۱۴۴ تا ۱۴۸ ـ متوسط)

یا مهرهٔ خارج شده از ظرف A قرمز است و ۲ مهره‌ای که از ظرف B خارج می‌کنیم همرنگ هستند یا مهرهٔ خارج شده از ظرف A آبی است و ۲ مهره‌ای که از ظرف B خارج می‌کنیم همرنگ هستند.



احتمال همرنگ بودن دومهره خارج شده از B: $\frac{\binom{۵}{۲}+\binom{۳}{۲}}{\binom{۸}{۲}}=\frac{۱۳}{۲۸}$

احتمال همرنگ بودن دومهره خارج شده از B: $\frac{\binom{۴}{۲}+\binom{۴}{۲}}{\binom{۸}{۲}}=\frac{۱۲}{۲۸}$

$$\frac{۳}{۵}\times\frac{۱۳}{۲۸}+\frac{۲}{۵}\times\frac{۱۲}{۲۸}=\frac{۳۹+۲۴}{۱۴۰}=\frac{۶۳}{۱۴۰}=\frac{۹}{۲۰}=۰/۴۵$$

www.mapedu.ir

20 - ۴۰ درصد کارکنان یک شرکت را مردان و بقیه را زنان تشکیل داده‌اند و ۸۰ درصد مردان و ۵۰ درصد زنان بیمه دارند، یکی از کارکنان این شرکت را انتخاب کرده‌ایم، اگر بیمه داشته باشد با چه احتمالی مرد است؟

۱) $\frac{۱۵}{۳۱}$ ۲) $\frac{۱۶}{۳۱}$ ۳) $\frac{۴}{۱۹}$ ۴) $\frac{۱۵}{۱۹}$

پاسخ: گزینه ۲ (ریاضی ۳ ـ صفحات ۱۴۵ تا ۱۴۸ ـ متوسط)

هر تست ماز یک کلاس درس!

با توجه به این که $P(A|B)=\frac{P(A\cap B)}{P(B)}$، بنابراین $P(A\cap B)=P(A|B)P(B)$

اگر B پیشامد بیمه داشتن و $A_۱$ پیشامد مرد بودن و $A_۲$ پیشامد زن بودن باشند، به دنبال $P(A_۱|B)$ هستیم.

از طرفی احتمال بیمه داشتن با توجه به قانون احتمال کل برابر است با:

$$P(B)=P(A_۱)\times P(B|A_۱)+P(A_۲)\times P(B|A_۲)=\frac{۴۰}{۱۰۰}\times\frac{۸۰}{۱۰۰}+\frac{۶۰}{۱۰۰}\times\frac{۵۰}{۱۰۰}=\frac{۶۲}{۱۰۰}$$

یعنی فرد انتخاب شده یا (مرد است و بیمه دارد و یا زن است و بیمه دارد)

همین‌طور:

$$P(A_۱\cap B)=P(A_۱)\times P(B|A_۱)=\frac{۴۰}{۱۰۰}\times\frac{۸۰}{۱۰۰}=\frac{۳۲}{۱۰۰}$$

بنابراین:

$$P(A_۱|B)=\frac{P(A_۱\cap B)}{P(B)}=\frac{\frac{۳۲}{۱۰۰}}{\frac{۶۲}{۱۰۰}}=\frac{۳۲}{۶۲}=\frac{۱۶}{۳۱}$$

یه نگاهم به جدول زیر بنداز: (فرض کردیم تعداد کارکنان شرکت ۱۰۰ نفره)

	مرد	زن	کل
افرادی که بیمه دارند	۳۲	۳۰	۶۲
افرادی که بیمه ندارند	۸	۳۰	۳۸
کل	۴۰	۶۰	۱۰۰

کل افرادی که بیمه دارند ۶۲ نفراند که ۳۲ نفر اونها مرد هستند، پس جواب $\frac{۳۲}{۶۲}=\frac{۱۶}{۳۱}$ است.

21 - احتمال بارندگی در ۲ روز اول هفته ۰/۸ و در سایر روزهای هفته ۰/۶ است. به کدام احتمال در هفته آینده روز بارانی نخواهیم داشت؟

۱) $\frac{۲۴}{۳۵}$ ۲) $\frac{۱۲}{۳۵}$ ۳) $\frac{۱۶}{۳۵}$ ۴) $\frac{۱۱}{۳۵}$

پاسخ: گزینه ۲ (ریاضی ۳ ـ ساده)

نکته) قانون کلی احتمال

$$P(A)=P(A_۱).P(A|A_۱)+P(A_۲).P(A|A_۲)$$

روش اول)

$$\frac{۲}{۷}\times\frac{۲}{۱۰}+\frac{۵}{۷}\times\frac{۴}{۱۰}=\frac{۴+۲۰}{۷۰}=\frac{۲۴}{۷۰}=\frac{۱۲}{۳۵}$$

روش دوم)

$$P(\text{بارانی})=P(\text{دو روز اول})P(\text{بارانی}|\text{دو روز اول})+P(\text{پنج روز دوم})P(\text{پنج روز دوم}|\text{بارانی})$$

احتمال فوق، احتمال بارانی است

$$\text{روز غیربارانی}=۱-P(\text{بارانی})$$

سوالات منتخب:

در یک بیمارستان ۰/۸ جمعیت مردان هستند، ۲۵ درصد مردان عمل جراحی دارند همین عمل برای زنان ۴۰ درصد است. شخصی از این بیمارستان به تصادف اختیار می‌کنیم، به کدام احتمال عمل جراحی ندارد؟

۱) $\frac{۱}{۳}$ ۲) $\frac{۳}{۵}$ ۳) $\frac{۷۲}{۱۰۰}$ ✓ ۴) $\frac{۳۸}{۵۰}$

گروه آموزشی ماز

22 - در کیسه A، ۱۰ مهره قرمز، ۲ مهره سفید و در کیسه B، ۸ مهره قرمز و ۴ مهره سفید داریم. از کیسه A، ۶ مهره و از کیسه B، ۵ مهره به تصادف در کیسه خالی C می‌ریزیم و به تصادف مهره‌ای از کیسه C خارج می‌کنیم. به کدام احتمال مهره خارج شده از کیسه C، قرمز است؟

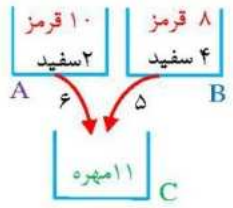
۱) $\frac{۷۱}{۱۱۰}$ ۲) $\frac{۵۶}{۱۱۰}$ ۳) $\frac{۸۰}{۱۳۲}$ ۴) $\frac{۱۰۰}{۱۳۲}$

پاسخ: گزینه ۴ (ریاضی ۳ ـ متوسط)

هر تست ماز یک کلاس درس!

قانون کلی احتمالی: $P(\text{قرمز})=P(A)P(\text{قرمز}|A)+P(B).P(\text{قرمز}|B)$

مطابق شکل مقابل، در کیسه C، ۱۱ مهره داریم، پس احتمال خروج مهره قرمز از کیسه C داریم:



قرمز از A — قرمز از B

$$P(\text{قرمز})=\frac{۵}{۱۱}\times\frac{۸}{۱۲}+\frac{۶}{۱۱}\times\frac{۱۰}{۱۲}=\frac{۱۰۰}{۱۱\times۱۲}=\frac{۱۰۰}{۱۳۲}$$

مهره خارج شده از C انتقالی از A باشد — مهره خارج شده از C انتقالی از B باشد

سوالات منتخب:

در جعبه A، ۴ مهره سفید، ۶ مهره سیاه و در جعبه B و C، هر کدام ۷ مهره سفید و ۳ مهره سیاه داریم. یکی از جعبه‌ها را به تصادف انتخاب می‌کنیم. سه مهره پشت سر هم از آن انتخاب می‌کنیم. (بدون جایگذاری) به کدام احتمال اولی سفید و سومی سیاه است؟

۱) $\frac{۱۷}{۴۵}$ ۲) $\frac{۱۱}{۴۵}$ ✓ ۳) $\frac{۱۹}{۴۵}$ ۴) $\frac{۱۳}{۴۵}$

www.biomaze.ir

23 - تعداد دانش‌آموزان تجربی یک دبیرستان ۳ برابر تعداد دانش‌آموزان رشته ریاضی همان دبیرستان است. ۲۰ درصد دانش‌آموزان تجربی و ۱۰ درصد دانش‌آموزان ریاضی بیماری دارند. یک دانش‌آموز به تصادف انتخاب می‌شود. به کدام احتمال بیمار است؟

۱) $\frac{۹}{۴۰}$ ۲) $\frac{۱}{۶}$ ۳) $\frac{۷}{۴۰}$ ۴) $\frac{۱۵}{۱۰۰}$

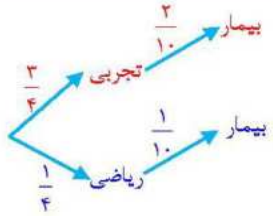
www.mapedu.ir

پاسخ: گزینه ۳ (ریاضی ۳ ـ ساده)

نکته) مطابق قانون احتمالی کلی:

$$P(A) = P(A_1).P(A|A_1) + P(A_2).P(A|A_2)$$

به کمک نمودار درختی داریم:



$$P(\text{بیمار}) = \frac{3}{4}\times\frac{2}{10}+\frac{1}{4}\times\frac{1}{10}=\frac{7}{40}$$

سوالات منتخب:

در پرتاب دو سکه، اگر حداقل یکی از سکه‌ها رو بیاید دو تاس، در غیر این صورت ۳ تاس پرتاب می‌کنیم. به کدام احتمال جمع اعداد تاس‌ها ۵ است؟

۱) $\frac{13}{144}$ ✓ ۲) $\frac{13}{72}$ ۳) $\frac{15}{72}$ ۴) $\frac{15}{144}$

گروه آموزشی ماز

24 - ظرف A شامل ۵ مهره قرمز و ۴ مهره آبی و ظرف B شامل ۴ مهره قرمز و یک مهره آبی است. مهره‌ای از هر ظرف به تصادف اختیار می‌کنیم. هرگاه مهره خارج شده قرمز باشد به کدام احتمال از ظرف B خارج شده است؟

۱) $\frac{5}{9}$ ۲) $\frac{4}{5}$ ۳) $\frac{36}{61}$ ۴) $\frac{31}{61}$

پاسخ: گزینه ۳ (ریاضی ۳ ـ دشوار)

نکته) اگر $B \neq \varnothing$، آن‌گاه $P(A|B) = \frac{P(A\cap B)}{P(B)}$

از هر ظرف یک مهره خارج می‌کنیم و احتمال قرمز بودن آن را بدست می‌آوریم.

$$P(\text{قرمز}) = \frac{1}{2}\times\frac{5}{9}+\frac{1}{2}\times\frac{4}{5}=\frac{5}{18}+\frac{4}{10}=\frac{61}{90}$$

حال احتمال آن را می‌خواهیم که از ظرف B خارج شده باشد.

$$P(B|\text{قرمز}) = \frac{\frac{1}{2}\times\frac{4}{5}}{\frac{61}{90}} = \frac{\frac{4}{10}}{\frac{61}{90}} = \frac{36}{61}$$

سوالات منتخب:

در ظرف A، ۳ مهره سفید، ۵ مهره سیاه و در ظرف B، ۴ مهره سفید و ۳ مهره سیاه داریم. یک مهره از ظرف A درون ظرف B می‌اندازیم. سپس از ظرف B یک مهره خارج می‌کنیم. به کدام احتمال این مهره سفید است؟

۱) $\frac{27}{64}$ ۲) $\frac{13}{32}$ ۳) $\frac{15}{32}$ ۴) $\frac{35}{64}$ ✓

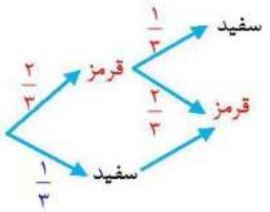
25 - در یک جعبه ۳ مهره سفید و ۶ مهره قرمز داریم. به تصادف مهره‌ای از جعبه خارج کرده پس از مشاهده رنگ آن، آن را به جعبه برمی‌گردانیم و مجدد مهره دیگری خارج می‌کنیم. به کدام احتمال فقط یک بار مهره قرمز خارج شده است؟

۱) $\frac{5}{9}$ ۲) $\frac{4}{9}$ ۳) $\frac{2}{9}$ ۴) $\frac{1}{9}$

پاسخ: گزینه ۲ (ریاضی ۳ ـ دشوار)

نکته) قانون احتمالی کلی: اگر برای پیشامدهای $A_1, A_2, ..., A_n$ داشته باشیم: $A_1 \cup A_2 \cup ... A_n = S$ و B یک پیشامد دلخواه در فضای S باشد.

$$P(B) = P(A_1).P(B|A_1) + P(A_2).P(B|A_2) + ... + P(A_n).P(B|A_n)$$



$$P(A)=\underset{\text{قرمز}}{\frac{۲}{۳}}\times\underset{\text{سفید}}{\frac{۱}{۳}}+\underset{\text{سفید}}{\frac{۱}{۳}}\times\underset{\text{قرمز}}{\frac{۲}{۳}}=\frac{۴}{۹}$$

سوالات منتخب:

۳۰ درصد اهالی شهر A و ۴۰ درصد اهالی شهر B خانم هستند. اگر جمعیت شهر A نصف جمعیت شهر B باشد به طوری که خانمی از این جمع انتخاب کنیم به کدام احتمال عضو شهر B است؟

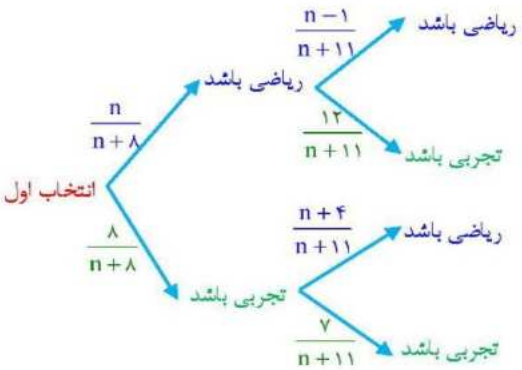
۱) $\frac{۶}{۱۱}$ ۲) $\frac{۵}{۱۱}$ ۳) $\frac{۸}{۱۱}$ ✔ ۴) $\frac{۷}{۱۱}$

گروه آموزشی ماز

26 - در یک کلاس n دانش‌آموز ریاضی و ۸ دانش‌آموز تجربی داریم. یک دانش‌آموز به تصادف از کلاس خارج می‌کنیم و به جای آن ۴ دانش‌آموز از رشته دیگر اضافه می‌کنیم. اگر اکنون یک دانش‌آموز از این کلاس انتخاب کنیم به احتمال $\frac{۲۶}{۴۵}$ از رشته تجربی خواهد بود. عدد n کدام است؟

۱) ۶ ۲) ۸ ۳) ۴ ۴) ۹

پاسخ: گزینه ۳ (ریاضی ۳ ـ دشوار)



در ابتدا $n+۸$ عضو کلاس بودند یک نفر خارج می‌کنیم و به جای آن ۴ نفر دیگر اضافه می‌کنیم در واقع ۳ نفر دیگر به کلاس اضافه کردیم.
پس در مرحله دوم تعداد نفرات کلاس به $n+۱۱$ خواهد رسید.
اگر قرار باشد نفر انتخابی در نهایت تجربی باشد، پس:

$$P(A)=\frac{n}{n+۸}\times\frac{۱۲}{n+۱۱}+\frac{۸}{n+۸}\times\frac{۷}{n+۱۱}$$

$$P(A)=\frac{۱۲n+۵۶}{(n+۸)(n+۱۱)}=\frac{۲۶}{۴۵}\Rightarrow n=۴$$

سوالات منتخب:

در پرتاب ۲ تاس، اگر بدانیم تاس اول عدد بزرگتری نمایش می‌دهد، به کدام احتمال ضرب اعداد ظاهر شده زوج است؟

۱) $\frac{۳}{۵}$ ۲) $\frac{۴}{۵}$ ✔ ۳) $\frac{۵}{۶}$ ۴) $\frac{۶}{۱۱}$

27 – از ۱۰ لامپ موجود در یک جعبه ۳ تای آن‌ها معیوب است. هرگاه سه لامپ متوالی و بدون جایگذاری از جعبه خارج کنیم، با کدام احتمال لااقل به یک لامپ معیوب می‌رسیم؟

۱) $\frac{۱۷}{۲۴}$ ۲) $\frac{۲۱}{۴۰}$ ۳) $\frac{۳۳}{۴۰}$ ۴) $\frac{۷}{۱۰}$

پاسخ: گزینه ۱ (ریاضی ۲ ـ صفحه ۱٤٦ و ۱٤۷ ـ ساده)

پاسخ تشریحی:

هر سه لامپ سالم

$A \Rightarrow P(A') = \frac{۷}{۱۰} \times \frac{۶}{۹} \times \frac{۵}{۸} = \frac{۷}{۲۴}$ لااقل یک لامپ معیوب باشد

$P(A) = ۱ - \frac{۷}{۲۴} = \frac{۱۷}{۲۴}$

گروه آموزشی ماز

28 – اگر A و B دو پیشامد ناسازگار با شرط $P(A|B') = ۲P(B|A') = \frac{۱}{۲}$ باشند، مقدار $\frac{P(A)}{P(B)}$ کدام است؟

۱) ۴ ۲) ۳ ۳) $\frac{۵}{۲}$ ۴) $\frac{۵}{۳}$

پاسخ: گزینه ۲ (ریاضی ۲ ـ صفحه ۱٤٤ و ۱٤٥ ـ متوسط)

پاسخ تشریحی:

A و B ناسازگارند، پس: $A \cap B = \varnothing$ ، به همین جهت: $A \cap B' = A \ , \ B \cap A' = B$

$$P(A|B') = \frac{P(A \cap B')}{P(B')} = \frac{P(A)}{۱ - P(B)} = \frac{۱}{۲}$$

$$P(B|A') = \frac{P(B \cap A')}{P(A')} = \frac{P(B)}{۱ - P(A)} = \frac{۱}{۴}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} P(A) = \frac{۳}{۷} \\ P(B) = \frac{۱}{۷} \end{cases} \Rightarrow \frac{P(A)}{P(B)} = ۳$$

گروه آموزشی ماز

29 – یک عدد سه رقمی با تکرار ارقام انتخاب می‌کنیم. اگر بدانیم مضرب ۵ است، با کدام احتمال مضرب ۳ نمی‌باشد؟

۱) $\frac{۱}{۳}$ ۲) $\frac{۲}{۱۵}$ ۳) $\frac{۱}{۶}$ ۴) $\frac{۲}{۳}$

پاسخ: گزینه ٤ (ریاضی ۲ ـ صفحه ۱٤٤ و ۱٤٥ ـ متوسط)

پاسخ تشریحی:

روش اول:

تعداد اعداد ۳ رقمی که تکرار رقم مجاز باشد ۹۰۰ عدد است. از هر پنج عدد متوالی یکی مضرب ۵ است و از هر ۱۵عدد متوالی، یکی هم مضرب ۵ و هم مضرب ۳ است. البته در این تست می‌دانیم عدد انتخاب شده مضرب ۵ است.

پس در واقع:

$P(\text{مضرب ۵ باشد} | \text{مضرب ۳ نباشد}) = ?$

اگر دقیق به تست نگاه کنیم از مجموعه مضارب ۵، $\frac{۱}{۳}$ مضرب ۳ هم هستند و $\frac{۲}{۳}$ مضرب ۳ نیستند. پس:

$P(\text{مضرب ۵ باشد} | \text{مضرب ۳ نباشد}) = \frac{۲}{۳}$

روش دوم:

$$P(\text{مضرب ۵ باشد} | \text{مضرب ۳ نباشد}) = ۱ - P(\text{مضرب ۵ باشد} | \text{مضرب ۳ باشد}) = ۱ - \frac{P(\text{مضرب ۱۵ باشد})}{P(\text{مضرب ۵ باشد})}$$

$$= ۱ - \frac{۶۰}{۱۸۰} = ۱ - \frac{۱}{۳} = \frac{۲}{۳}$$

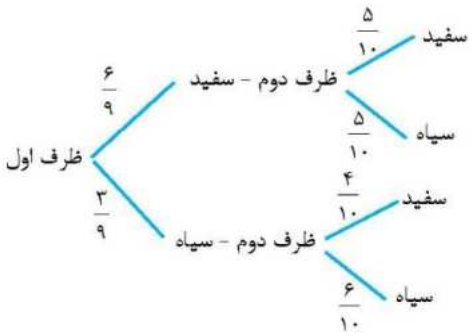
30 - در ظرف اول ۶ مهره سفید و ۳ مهره سیاه و در ظرف دوم ۴ مهره سفید و ۵ مهره سیاه قرار دارند. یک مهره به دلخواه از ظرف اول به ظرف دوم انتقال می‌دهیم. سپس از ظرف دوم دو مهره با هم خارج می‌کنیم. به کدام احتمال لااقل یکی از دو مهره سفید است؟

۱) $\frac{۳۴}{۴۵}$ ۲) $\frac{۲۰}{۲۷}$ ۳) $\frac{۳۸}{۴۵}$ ۴) $\frac{۲۳}{۲۷}$

پاسخ: گزینه ۲ (ریاضی ۳ ـ صفحه ۱۴۵ تا ۱۴۸ ـ دشوار)

پاسخ تشریحی:

ابتدا به سراغ ظرف اول رفته و مهره‌ای از آن به ظرف دوم انتقال می‌دهیم.



$$\text{احتمال خروج لااقل یک مهره سفید} = (۱-\underbrace{\frac{\binom{۵}{۲}}{\binom{۱۰}{۲}}}_{\text{هر ۲ سیاه از ظرف B}})\times\overset{\text{انتقال از ظرف A با رنگ سفید}}{\frac{۶}{۹}}+(۱-\frac{\binom{۶}{۲}}{\binom{۱۰}{۲}})\times\underset{\text{انتقال از ظرف A با رنگ سیاه}}{\frac{۳}{۹}}$$

$$P(A)=\frac{۲}{۳}\times(۱-\frac{۱۰}{۴۵})+\frac{۱}{۳}(۱-\frac{۱۵}{۴۵})=\frac{۲}{۳}\times\frac{۷}{۹}+\frac{۱}{۳}\times\frac{۲}{۳}=\frac{۱۴+۶}{۲۷}=\frac{۲۰}{۲۷}$$

گروه آموزشی ماز

31 - ۴ مرد و ۳ زن در یک ردیف کنار هم ایستاده‌اند. اگر بدانیم هیچ دو زنی کنار هم نیستند به کدام احتمال زنان یک در میان هستند؟

۱) ۱ ۲) $\frac{۱}{۸}$ ۳) $\frac{۳}{۱۰}$ ۴) $\frac{۱}{۱۰}$

پاسخ: گزینه ۳ (ریاضی ۲ ـ صفحه ۱۴۴ و ۱۴۵ ـ دشوار)

پاسخ تشریحی:

در واقع احتمال شرطی است. ابتدا تعداد حالاتی که هیچ دو زن کنار هم نباشند را می‌نویسیم:

هیچ دو زن کنار هم نباشند $\Rightarrow ۴!\times۵\times۴\times۳$

ابتدا مردان به !۴ قرار می‌گیرند و ۵ حالت برای زنان درست می‌شود.
حال در بین این حالات، حالتی را می‌خواهیم که زنان یک در میان باشند.

$$P(A)=\frac{۴!\times۳\times۳!}{۴!\times۵\times۴\times۳}=\frac{۳\times۶}{۵\times۴\times۳}=\frac{۳}{۱۰}$$

اگر مردان با M و زنان را با W نشان دهیم: M M M M
آن‌گاه زنان ۳ حالت برای یک در میان دارند و هر حالت !۳ است.

گروه آموزشی ماز

32 - احتمال موفقیت رضا در آزمون فیزیک سه برابر احتمال موفقیت او در آزمون شیمی است. او به احتمال $\frac{۱۳}{۱۶}$ لااقل در یکی از دو آزمون موفقیت داشته است. به کدام احتمال او فقط در شیمی موفقیت داشته است؟

۱) $\frac{۳}{۱۶}$ ۲) $\frac{۱}{۸}$ ۳) $\frac{۱}{۱۶}$ ۴) $\frac{۳}{۳۲}$

پاسخ: گزینه ۳ (ریاضی ۲ ـ صفحه ۱۴۶ و ۱۴۷ ـ متوسط)

پاسخ تشریحی:

اگر فرض کنیم احتمال موفقیت در آزمون شیمی x باشد آن‌گاه احتمال موفقیت در آزمون فیزیک ۳x است.

$P(P)=3x \ , \ P(C)=x$

$$P(P\cup C)=P(P)+P(C)-\underbrace{P(P\cap C)}_{P(P).P(C)}\Rightarrow \frac{13}{16}=3x+x-3x^2\Rightarrow 3x^2-4x+\frac{13}{16}=0$$

$$(x-\frac{1}{4})(3x-\frac{13}{4})=0\begin{cases}x=\frac{1}{4}\\ x=\frac{13}{12}\ \text{غ ق ق}\end{cases}\Rightarrow P(C-P)=P(C).P(P')=\frac{1}{4}\times\frac{1}{4}=\frac{1}{16}$$

$P(C)=\frac{1}{4} \ , \ P(P)=\frac{3}{4}$

گروه آموزشی ماز

33 ـ احتمال قبولی **A** و **B** در یک آزمون به ترتیب $\frac{1}{2}$ و $\frac{2}{3}$ است. احتمال قبولی لااقل یکی از آن‌ها چند برابر قبولی دقیقاً یکی از آن‌ها می‌باشد؟

۱) $\frac{5}{2}$ ۲) $\frac{5}{3}$ ۳) ۲ ۴) $\frac{4}{3}$

پاسخ: گزینه ۲ (ریاضی ۲ ـ صفحه ۱۴۶ و ۱۴۷ ـ متوسط)

پاسخ تشریحی:

همانطور که بدیهی است، احتمالی قبولی A و B مستقل از یکدیگر است، پس:

$P(A\cap B)=P(A).P(B)=\frac{1}{3}$

$P(A\cup B)=\frac{1}{2}+\frac{2}{3}-\frac{1}{3}=\frac{3+4-2}{6}=\frac{5}{6}$

$P(A-B)+P(B-A)=\frac{1}{2}+\frac{2}{3}-\frac{2}{3}=\frac{3}{6}$

$\Rightarrow \frac{P(A\cup B)}{P(A-B)+P(B-A)}=\frac{5}{3}$

گروه آموزشی ماز

34 ـ هرگاه **A** و **B** دو پیشامد مستقل از هم باشند و $P(A-B)=3P(A\cap B)$، مقدار $P(B|A)$ چه عددی است؟

۱) $\frac{1}{4}$ ۲) $\frac{1}{3}$ ۳) $\frac{2}{3}$ ۴) $\frac{3}{4}$

پاسخ: گزینه ۱ (ریاضی ۲ ـ صفحه ۱۴۵ تا ۱۴۷ ـ متوسط)

پاسخ تشریحی:

چون A و B مستقل از هم هستند، پس: $P(A\cap B)=P(A).P(B)$

از طرفی: $P(A-B)=P(A\cap B')=P(A).P(B')$

پس: $P(A-B)=3P(A\cap B)\Rightarrow P(A).P(B')=3P(A)P(B)$

با توجه به آن‌که $P(A)\neq 0$، پس: $P(B')=3P(B)$

$\Rightarrow 1-P(B)=3P(B)\Rightarrow P(B)=\frac{1}{4}$

برای یافتن $P(B|A)$ داریم: $P(B|A)=\frac{P(A)P(B)}{P(A)}=P(B)\Rightarrow P(B|A)=\frac{1}{4}$

35- اگر دو تاس را با هم پرتاب کنیم، تعداد m پیشامد می‌توان تعریف کرد که با پیشامد «هر دو زوج» ناسازگار باشد. $\log m$ کدام است؟ $(\log ۲ = ۰/۳)$

۱) ۸/۱ ۲) ۸/۳ ۳) ۸/۴ ۴) ۸/۷

پاسخ: گزینه ۱ (ریاضی ۱ ـ صفحات ۱۴۴ تا ۱۴۶ ـ متوسط)

پاسخ تشریحی:

در پرتاب دو تاس، فضای نمونه‌ای دارای $۳۶ = ۶^۲$ عضو است. که در ۹ تای آن‌ها $(۹ = ۳ \times ۳)$ هر دو تاس عدد زوج خواهند شد. اگر این ۹ تا را از ۳۶ کم کنیم مجموعه‌ای دارای ۲۷ عضو خواهیم داشت که دارای $۲^{۲۷}$ زیرمجموعه است. پس:

$$m = ۲^{۲۷} \Rightarrow \log m = \log ۲^{۲۷} = ۲۷ \log ۲ = ۲۷ \times ۰/۳ = ۸/۱$$

گروه آموزشی ماز

36- هفت نفر به تصادف در یک صف قرار گرفته‌اند. به چه احتمالی، دو نفر خاص از آن‌ها، در ردیف اول و دوم صف قرار ندارند؟

۱) $\frac{۲}{۷}$ ۲) ۳) ۴) $\frac{۱۰}{۲۱}$

پاسخ: گزینه ۴ (ریاضی ۱ ـ صفحات ۱۴۶ و ۱۴۷ ـ ساده)

پاسخ تشریحی:

$n(S) = ۷!$ $\quad n(A) = \underset{\text{ردیف دوم}}{۵} \times \overset{\text{ردیف اول}}{۴} \times ۵! \rightarrow$ ۵ نفر بقیه

$$P(A) = \frac{n(A)}{n(S)} = \frac{۵ \times ۴ \times ۵!}{۷!} = \frac{۵ \times ۴ \times ۵!}{۷ \times ۶ \times ۵!} = \frac{۲۰}{۴۲} = \frac{۱۰}{۲۱}$$

گروه آموزشی ماز

37- در یک خانواده ۳ فرزندی، اگر فرزند اول دختر باشد به احتمال $P_۱$ دو فرزند دیگر پسر هستند و اگر یکی از فرزندان دختر باشد، به احتمال $P_۲$ دو فرزند دیگر پسر هستند. مقدار $P_۱ \times P_۲$ کدام است؟

۱) ۲) $\frac{۹}{۴۹}$ ۳) $\frac{۳}{۲۸}$ ۴) $\frac{۱}{۸}$

پاسخ: گزینه ۳ (ریاضی ۲ ـ صفحات ۱۴۴ تا ۱۴۶ ـ متوسط)

پاسخ تشریحی:

$$\left.\begin{array}{l} P_۱ = \frac{۱}{۲} \times \frac{۱}{۲} = \frac{۱}{۴} \\ P_۲ = \frac{۳}{۸-۱} = \frac{۳}{۷} \end{array}\right\} \Rightarrow P_۱ \times P_۲ = \frac{۱}{۴} \times \frac{۳}{۷} = \frac{۳}{۲۸}$$

توجه کنید در معادله $P_۲$، حالت هر سه پسر از ۸ حالت کل، کسر شده است.

گروه آموزشی ماز

38- در یک خانواده با دو فرزند، احتمال مبتلا بودن فرزند اول به ویروس کرونا، ۰/۴ و احتمال مبتلا بودن فرزند دوم به ویروس آنفولانزا برابر ۰/۷ است. به چه احتمالی، حداقل یکی از دو فرزند مبتلا هستند؟

۱) ۰/۸۲ ۲) ۰/۷۸ ۳) ۰/۸۴ ۴) ۰/۷۶

پاسخ: گزینه ۱ (ریاضی ۲ ـ صفحات ۱۴۶ تا ۱۵۰ ـ ساده)

پاسخ تشریحی:

مبتلا شدن به دو ویروس متفاوت، مستقل از یکدیگر خواهد بود. پس:

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A) \times P(B) = ۰/۴ + ۰/۷ - ۰/۴ \times ۰/۷ = ۰/۸۲$$

گروه آموزشی ماز

39- اگر A و B دو پیشامد از فضای نمونه‌ای و $P(A|B)=\frac{۲}{۳}$ و $P(B|A)=\frac{۳}{۷}$ و $P(A')+P(B')=\frac{۳۷}{۳۰}$ باشد، احتمال آن که فقط پیشامد A رخ دهد، کدام است؟

۱) $\frac{۱}{۳}$ ۲) $\frac{۴}{۱۵}$ ۳) $\frac{۲}{۱۵}$ ۴) $\frac{۷}{۱۵}$

پاسخ: گزینه ۲ (ریاضی ۲ ـ صفحات ۱۴۴ تا ۱۴۶ ـ متوسط)

پاسخ تشریحی:

$$\left.\begin{array}{l} P(A|B)=\frac{P(A\cap B)}{P(B)}=\frac{۲}{۳} \\ P(B|A)=\frac{P(A\cap B)}{P(A)}=\frac{۳}{۷} \end{array}\right\} \Rightarrow \frac{P(B)}{P(A)}=\frac{۹}{۱۴} \Rightarrow P(B)=\frac{۹}{۱۴}P(A) \quad (۱)$$

$$P(A')+P(B')=۱-P(A)+۱-P(B)=۲-\left(P(A)+P(B)\right)=\frac{۳۷}{۳۰} \Rightarrow P(A)+P(B)=\frac{۲۳}{۳۰}$$

$$P(A)+\frac{۹}{۱۴}P(A)=\frac{۲۳}{۳۰} \rightarrow \frac{۲۳}{۱۴}\times P(A)=\frac{۲۳}{۳۰} \rightarrow P(A)=\frac{۷}{۱۵}$$

$$P(A\cap B)=P(A)\times P(B|A)=\frac{۷}{۱۵}\times\frac{۳}{۷}=\frac{۱}{۵}$$

$$P(A-B)=P(A)-P(A\cap B)=\frac{۷}{۱۵}-\frac{۱}{۵}=\frac{۴}{۱۵}$$

گروه آموزشی ماز

40- ۳ تاس را پرتاب می‌کنیم. اگر بدانیم مجموع اعداد رو شده فرد است، به چه احتمالی، حداقل روی یکی از تاس‌ها عدد ۱ ظاهر شده است؟

۱) $\frac{۴۳}{۱۰۸}$ ۲) $\frac{۴۶}{۱۰۸}$ ۳) $\frac{۴۳}{۱۰۵}$ ۴) $\frac{۴۶}{۱۰۵}$

پاسخ: گزینه ۲ (ریاضی ۲ ـ صفحات ۱۴۴ تا ۱۴۶ ـ متوسط)

پاسخ تشریحی:

برای این‌که مجموع ۳ عدد فرد باشد یا باید هر ۳ عدد فرد باشند و یا ۲ عدد زوج و یکی فرد باشد.

$$\left.\begin{array}{l} ۳\times۳\times۳=۲۷ : \text{هر ۳ فرد} \\ \underbrace{۳\times۳\times۳\times\frac{۳!}{۲!}}_{\text{فرد زوج زوج}}=۸۱ : \text{دو زوج و یکی فرد} \end{array}\right\} \Rightarrow n(B)=۲۷+۸۱=۱۰۸$$

$$\left.\begin{array}{l} ۲۷-(۲\times۲\times۲)=۱۹ : \text{هر ۳ فرد که حداقل یک عدد ۱ داشته باشد} \\ ۸۱-\left(۳\times۳\times۲\times\frac{۳!}{۲!}\right)=۲۷ : \text{دو زوج و یکی فرد که حداقل یک عدد ۱ داشته باشد} \end{array}\right\} \Rightarrow n(A\cap B)=۱۹+۲۷=۴۶$$

$$P(A|B)=\frac{n(A\cap B)}{n(B)}=\frac{۴۶}{۱۰۸}$$

(برای محاسبه حداقل یک عدد ۱، تعداد حالاتی که در هیچ کدام عدد ۱ ظاهر نشده‌اند را از کل حالات کم کرده‌ایم.)

گروه آموزشی ماز

41- در یک کلاس، ۶ دانشجوی پسر و ۴ دانشجوی دختر وجود دارد و یکی از دانشجویان از کلاس خارج می‌شود. اگر از ۹ نفر باقی‌مانده دو نفر را انتخاب کنیم، به چه احتمالی، هر دوی آن‌ها دختر هستند؟

۱) $\frac{۳}{۱۵}$ ۲) $\frac{۲}{۱۵}$ ۳) $\frac{۴}{۱۵}$ ۴) $\frac{۷}{۱۵}$

پاسخ: گزینه ۲ (ریاضی ۳ ـ صفحات ۱۴۵ تا ۱۴۸ ـ متوسط)

پاسخ تشریحی:

اگر دانشجوی خارج شده، پسر باشد. $\Rightarrow \frac{۶}{۱۰}\times\frac{\binom{۴}{۲}}{\binom{۹}{۲}}=\frac{۳}{۵}\times\frac{۶}{۳۶}=\frac{۱}{۱۰}$

اگر دانشجوی خارج شده، دختر باشد. $\Rightarrow \frac{۴}{۱۰}\times\frac{\binom{۳}{۲}}{\binom{۹}{۲}}=\frac{۲}{۵}\times\frac{۳}{۳۶}=\frac{۱}{۳۰}$

قانون جمع احتمالات $\Rightarrow P(A)=\frac{۱}{۱۰}+\frac{۱}{۳۰}=\frac{۴}{۳۰}=\frac{۲}{۱۵}$

گروه آموزشی ماز

42- در یک کیسه، $۲n+۱$ مهره آبی و $n+۲$ مهره قرمز وجود دارد. اگر یک مهره از این کیسه خارج کنیم به احتمال $\frac{۵}{۱۲}$ قرمز خواهد بود. ۳ مهره پشت سر هم و بدون جایگذاری از این کیسه خارج می‌کنیم. به چه احتمالی، فقط مهره دوم، آبی است؟

۱) $\frac{۳۹}{۴۳۲}$ ۲) $\frac{۳۵}{۴۳۲}$ ۳) $\frac{۷}{۶۶}$ ۴) $\frac{۱۳}{۶۶}$

پاسخ: گزینه ۳ (ریاضی ۲ ـ صفحات ۱۴۴ تا ۱۴۶ / ریاضی ۳ ـ صفحات ۱۴۵ تا ۱۴۸ ـ متوسط)

پاسخ تشریحی:

$$P(A)=\frac{n+۲}{(n+۲)+(۲n+۱)}=\frac{n+۲}{۳n+۳}=\frac{۵}{۱۲}\Rightarrow n=۳$$

پس در این کیسه، ۷ مهره آبی و ۵ مهره قرمز وجود دارد. اکنون باید احتمال وقوع اولی قرمز و دومی آبی و سومی قرمز (بدون جایگذاری) را حساب کنیم.

$$\frac{۵}{۱۲}\times\frac{۷}{۱۱}\times\frac{۴}{۱۰}=\frac{۱}{۳}\times\frac{۷}{۱۱}\times\frac{۱}{۲}=\frac{۷}{۶۶}$$

گروه آموزشی ماز

43- احتمال آن‌که تیم فوتبال استقلال، تیم پرسپولیس را شکست دهد برابر $\frac{۲}{۳}$ و احتمال قهرمان شدن آن برابر $\frac{۱}{۴}$ است و در صورتی که تیم پرسپولیس را شکست دهد به $\frac{۱}{۳}$ افزایش خواهد یافت. اگر استقلال قهرمان شود، با کدام احتمال، تیم پرسپولیس را شکست داده است؟

۱) $\frac{۸}{۹}$ ۲) $\frac{۷}{۹}$ ۳) $\frac{۱۷}{۱۸}$ ۴) $\frac{۱۵}{۱۸}$

پاسخ: گزینه ۱ (ریاضی ۲ ـ صفحات ۱۴۴ تا ۱۴۶ ـ متوسط)

پاسخ تشریحی:

$$P(A)=\frac{۲}{۳}\ ,\ P(T)=\frac{۱}{۴}\ ,\ P(T|A)=\frac{۱}{۳}\Rightarrow\frac{P(T\cap A)}{P(A)}=\frac{۱}{۳}$$

$$P(T\cap A)=\frac{۲}{۳}\times\frac{۱}{۳}=\frac{۲}{۹}$$

$$P(A|T)=\frac{P(A\cap T)}{P(T)}=\frac{\frac{۲}{۹}}{\frac{۱}{۴}}=\frac{۸}{۹}$$

44- در هر یک از ۳ طبقه موجود در یک ساختمان، پدر و مادری به همراه ۳، ۲ و ۱ فرزندشان زندگی می‌کنند. احتمال انتخاب هر طبقه متناسب با تعداد اعضای خانواده‌هاست. یک طبقه را انتخاب کرده و یک نفر را به تصادف بیرون می‌آوریم. به چه احتمالی، پدر یک خانواده انتخاب شده است؟

۱) $\frac{۵}{۱۲}$ ۲) $\frac{۱}{۱۲}$ ۳) $\frac{۱}{۳}$ ۴) $\frac{۱}{۴}$

پاسخ: گزینه ٤ (ریاضی ۳ ـ صفحات ۱٤٥ تا ۱٤۸ ـ متوسط)

پاسخ تشریحی:

تعداد کل افراد $\Rightarrow ۵+۴+۳=۱۲$

$\frac{۵}{۱۲}$ اگر طبقه اول انتخاب شود $\xrightarrow{\text{احتمال انتخاب پدر}}$ $\frac{۱}{۵}$

$\frac{۴}{۱۲}$ اگر طبقه دوم انتخاب شود $\xrightarrow{\text{احتمال انتخاب پدر}}$ $\frac{۱}{۴}$

$\frac{۳}{۱۲}$ اگر طبقه سوم انتخاب شود $\xrightarrow{\text{احتمال انتخاب پدر}}$ $\frac{۱}{۳}$

قانون جمع احتمالات $\Rightarrow P(A)=(\frac{۵}{۱۲}\times\frac{۱}{۵})+(\frac{۴}{۱۲}\times\frac{۱}{۴})+(\frac{۳}{۱۲}\times\frac{۱}{۳})=\frac{۱}{۱۲}+\frac{۱}{۱۲}+\frac{۱}{۱۲}=\frac{۳}{۱۲}=\frac{۱}{۴}$

گروه آموزشی ماز

45- احتمال آن‌که فرزند دختر یک خانواده بیماری ارثی داشته باشد، ۰/۴ و همین احتمال برای فرزند پسر برابر ۰/۶ است. مادر فرزند بیماری به دنیا آورده است، به کدام احتمال فرزند او پسر بوده است؟

۱) ۰/۴ ۲) ۰/۶ ۳) ۰/۵ ۴) ۰/۳

پاسخ: گزینه ۲ (ریاضی ۳ ـ صفحات ۱٤٤ تا ۱٤۸ـ متوسط)

پاسخ تشریحی:

$P(\text{بیمار بودن})=\frac{۱}{۲}\times\frac{۴}{۱۰}+\frac{۱}{۲}\times\frac{۶}{۱۰}=\frac{۱}{۲}$

یعنی به احتمال فرزند بیمار خواهد بود، اما دقت کنید:

$P(\text{پسر بودن}|\text{بیمار بودن})=\frac{\frac{۱}{۲}\times\frac{۶}{۱۰}}{\frac{۱}{۲}}=\frac{\frac{۶}{۲۰}}{\frac{۱۰}{۲۰}}=۰/۶$

گروه آموزشی ماز

46- در ظرف A، ۴ مهره قرمز، ۳ مهره سفید و در ظرف B، ۳ مهره قرمز، ۴ مهره سفید داریم. تاسی را رها می‌کنیم. اگر مضرب ۳ آمد مهره‌ای از A در غیر این صورت، مهره‌ای از B خارج می‌کنیم. به کدام احتمال مهره خارج شده، سفید است؟

۱) $\frac{۱۱}{۲۱}$ ۲) $\frac{۸}{۲۱}$ ۳) $\frac{۱۹}{۴۲}$ ۴) $\frac{۱۳}{۴۲}$

پاسخ: گزینه ۱ (ریاضی ۳ ـ صفحات ۱۴۴ تا ۱۴۸ـ ساده)

پاسخ تشریحی:

خروج از ظرف A خروج از ظرف B

$$P(\text{سفید بودن}) = \frac{۲}{۶} \times \frac{۳}{۷} + \frac{۴}{۶} \times \frac{۴}{۷} = \frac{۶+۱۶}{۴۲} = \frac{۲۲}{۴۲} = \frac{۱۱}{۲۱}$$

مضرب ۳ باشد مضرب ۳ نباشد

گروه آموزشی ماز

47- در هر یک از سه ظرف A و B و C، هر کدام ۳ مهره سفید و ۲ مهره سیاه داریم. به تصادف مهره‌ای از A و مهره‌ای از B داخل ظرف C می‌اندازیم و سپس مهره جدیدی از ظرف C خارج می‌کنیم، به کدام احتمال این مهره سیاه است؟

۱) $\frac{۲}{۷}$ ۲) ۳) $\frac{۲}{۵}$ ۴) $\frac{۴}{۷}$

پاسخ: گزینه ۳ (ریاضی ۳ ـ صفحات ۱۴۴ تا ۱۴۸ ـ متوسط)

پاسخ تشریحی:

هم‌اکنون داخل ظرف C، ۷ مهره داریم به طوری که به احتمال $\frac{۱}{۷}$ مهره از A منتقل شده و به احتمال $\frac{۱}{۷}$ مهره از B منتقل شده و به احتمال $\frac{۵}{۷}$ از ابتدا در ظرف C بوده است. پس:

سیاه در C احتمال سیاه از B احتمال سیاه از A

$$P(A) = \frac{۱}{۷} \times \frac{۲}{۵} + \frac{۱}{۷} \times \frac{۲}{۵} + \frac{۵}{۷} \times \frac{۲}{۵} = \frac{۲+۲+۱۰}{۳۵} = \frac{۱۴}{۳۵} = \frac{۲}{۵}$$

از ابتدا در C باشد انتقال از B انتقال از A

گروه آموزشی ماز

48- در یک دبیرستان با سه رشته ریاضی، تجربی و انسانی که ظرفیت آن‌ها به ترتیب ۲۵، ۱۵ و ۲۰ نفر می‌باشد به ترتیب ۵، ۷ و ۹ نفر عینکی هستند. یک نفر به تصادف از این دبیرستان انتخاب می‌کنیم. اگر بدانیم عینکی است به کدام احتمال رشته انسانی است؟

۱) $\frac{۹}{۶۰}$ ۲) $\frac{۳}{۷}$ ۳) $\frac{۲۱}{۶۰}$ ۴) $\frac{۷}{۶۰}$

پاسخ: گزینه ۲ (ریاضی ۳ ـ صفحات ۱۴۴ تا ۱۴۸ـ متوسط)

پاسخ تشریحی:

جمعیت مدرسه، ۶۰ نفر است.

$$P(\text{عینکی بودن}) = \frac{۲۵}{۶۰} \times \frac{۵}{۲۵} + \frac{۱۵}{۶۰} \times \frac{۷}{۱۵} + \frac{۲۰}{۶۰} \times \frac{۹}{۲۰} = \frac{۵+۷+۹}{۶۰} = \frac{۲۱}{۶۰}$$

حال، آنچه خواسته شده:

$$P(\text{عینکی بودن} | \text{انسانی}) = \frac{\frac{۹}{۶۰}}{\frac{۲۱}{۶۰}} = \frac{۹}{۲۱} = \frac{۳}{۷}$$

گروه آموزشی ماز

49- در ظرف A، ۳ مهره قرمز و تعداد n مهره سفید و در ظرف B، ۲ مهره قرمز و تعداد ۲n مهره سفید داریم. با چشم بسته، مهره‌ای از A به B منتقل کرده و سپس مهره‌ای از B خارج می‌کنیم. اگر احتمال خروج مهره قرمز $\frac{۱۱}{۲۰}$ باشد، عدد n کدام است؟

۱) ۲) ۳) ۴)

پاسخ: گزینه ۱ (ریاضی ۳ ـ صفحات ۱۴۴ تا ۱۴۸ـ دشوار)

پاسخ تشریحی:

$$P(\text{قرمز بودن}) = \frac{\overset{\text{قرمز از A}}{۳}}{n+۳} \times \frac{\overset{\text{قرمز از B}}{۳}}{۲n+۳} + \frac{\overset{\text{سفید از A}}{n}}{n+۳} \times \frac{\overset{\text{قرمز از B}}{۲}}{۲n+۳} = \frac{۱۱}{۲۰}$$

$$\frac{۹+۲n}{(n+۳)(۲n+۳)} = \frac{۱۱}{۲۰} \Rightarrow ۱۸۰+۴۰n = ۱۱(۲n^۲+۹n+۹) \Rightarrow ۲۲n^۲+۵۹n-۸۱=۰$$

$$\Rightarrow (n-۱)(۲۲n+۸۱)=۰ \Rightarrow n=۱$$

گروه آموزشی ماز

50- اگر از کیسه‌ای که مجموعاً شامل ۶ مهره آبی و سبز است، ۲ مهره پشت سر هم به تصادف و بدون جایگذاری خارج کنیم، به احتمال $\frac{۸}{۱۵}$ همرنگ نخواهند بود. به چه احتمالی، مهره اول، آبی و مهره دوم سبز است؟

۱) $\frac{۱۰}{۱۵}$ ۲) $\frac{۶}{۱۵}$ ۳) $\frac{۴}{۱۵}$ ۴) $\frac{۸}{۱۵}$

پاسخ: گزینه ۳ (ریاضی ۲ ـ صفحات ۱۴۶ تا ۱۴۹ ـ متوسط)

پاسخ تشریحی:

$$\frac{\binom{x}{۱}\binom{۶-x}{۱}}{\binom{۶}{۲}} = \frac{۸}{۱۵} \Rightarrow \frac{x\times(۶-x)}{\frac{۶\times۵}{۲}} = \frac{۸}{۱۵} \Rightarrow ۶x-x^۲=۸ \Rightarrow \begin{cases} x=۲ \\ x=۴ \end{cases}$$

اگر $x=۲ \Rightarrow$ ۲ آبی ۴ سبز $\Rightarrow P_۱ = \frac{۲}{۶}\times\frac{۴}{۵} = \frac{۸}{۳۰} = \frac{۴}{۱۵}$

اگر $x=۴ \Rightarrow$ ۴ آبی ۲ سبز $\Rightarrow P_۲ = \frac{۴}{۶}\times\frac{۲}{۵} = \frac{۸}{۳۰} = \frac{۴}{۱۵}$

گروه آموزشی ماز

51- احتمال صعود تیم ملی ایران به دور دوم مسابقات جام جهانی فوتبال، برابر $\frac{۱}{۵}$ است. ولی اگر رقیب اول را شکست دهد این احتمال به $\frac{۹}{۱۰}$ افزایش پیدا خواهد کرد. اگر احتمال شکست دادن این رقیب برابر $\frac{۴}{۱۰}$ باشد، به چه احتمالی، این رقیب را شکست می‌دهد ولی صعود نمی‌کند؟

۱) ۰/۱۲ ۲) ۰/۰۸ ۳) ۰/۰۴ ۴) ۰/۰۶

پاسخ: گزینه ۳ (ریاضی ۲ ـ صفحات ۱۴۴ تا ۱۴۶ ـ متوسط)

پاسخ تشریحی:

A = صعود B = شکست دادن رقیب اول

$$P(A)=\frac{۱}{۵},\ P(B)=\frac{۴}{۱۰},\ P(A|B)=\frac{۹}{۱۰} \Rightarrow \frac{P(A\cap B)}{P(B)} = \frac{۹}{۱۰} \xrightarrow{P(B)=\frac{۴}{۱۰}} P(A\cap B)=\frac{۳۶}{۱۰۰}$$

$$P(B\cap A') = P(B-A) = P(B)-P(A\cap B) = \frac{۴}{۱۰}-\frac{۳۶}{۱۰۰} = \frac{۴}{۱۰۰} = ۰/۰۴$$

گروه آموزشی ماز

52- در یک اتاق، ۵ آقا و ۳ بانو وجود دارد. به تصادف، شخصی را از آن‌ها انتخاب کرده و پس از مشاهده، آن شخص را با دو شخص هم جنس دیگر با او به اتاق برمی‌گردانیم و مجدداً شخصی را از آن اتاق خارج می‌کنیم. به چه احتمالی فقط یک بانو از اتاق خارج شده است؟

۱) ۲) ۳) $\frac{۲}{۸}$ ۴)

پاسخ: گزینه ۱ (ریاضی ۲ ـ صفحات ۱۴۴ تا ۱۴۹ ـ متوسط)

پاسخ تشریحی:

برای پیشامد مورد نظر ۲ حالت روبرو وجود دارد:

$\frac{۵}{۸}\times(\frac{۳}{۸+۲})=\frac{۵}{۸}\times\frac{۳}{۱۰}=\frac{۱۵}{۸۰}$ ⇐ شخص دوم، بانو باشد و شخص اول، آقا باشد.

$\frac{۳}{۸}\times(\frac{۵}{۸+۲})=\frac{۳}{۸}\times\frac{۵}{۱۰}=\frac{۱۵}{۸۰}$ ⇐ شخص دوم، آقا باشد و شخص اول، بانو باشد.

$$\Rightarrow \frac{۱۵}{۸۰}+\frac{۱۵}{۸۰}=\frac{۳۰}{۸۰}=\frac{۳}{۸}$$

گروه آموزشی ماز

53- در ظرف A دو مهره سفید و سه مهره قرمز و در ظرف B یک مهره سفید و تعدادی مهره قرمز است. اگر مهره‌ای به تصادف از ظرف A به ظرف B انتقال دهیم، احتمال انتخاب مهره قرمز از ظرف B، $\frac{۱}{۳۰}$ افزایش می‌یابد. در ابتدا در ظرف B چند مهره قرمز بوده است؟

۱) ۲) ۳) ۴)

پاسخ: گزینه ۱ (ریاضی ۳ ـ صفحات ۱۴۴ تا ۱۴۸ ـ متوسط)

پاسخ تشریحی:

فرض کنیم در ابتدا n مهره قرمز در ظرف B بوده است، پس احتمال خروج مهره قرمز از B برابر $P(\text{قرمز})=\frac{n}{n+۱}$ بوده.

حال مهره‌ای به تصادف از A به B انتقال داده و سپس مهره‌ای از B خارج می‌کنیم. احتمال مهره قرمز برابر است با:

$$\underbrace{\frac{۲}{۵}}_{\text{انتقال سفید}}\times\overbrace{\frac{n}{n+۲}}^{\text{خروج قرمز}}+\underbrace{\frac{۳}{۵}}_{\text{انتقال قرمز}}\times\overbrace{\frac{n+۱}{n+۲}}^{\text{خروج قرمز}}=\frac{۵n+۳}{۵(n+۲)}$$

$$\frac{-n}{n+۱}+\frac{۵n+۳}{۵(n+۲)}=\frac{۱}{۳۰}\Rightarrow n^۲+۱۵n-۱۶=۰\xrightarrow{n>۰}n=۱$$

گروه آموزشی ماز

54- سه عدد از اعداد طبیعی ۱ تا ۵۰ را به تصادف انتخاب می‌کنیم. چقدر احتمال دارد که این عددها دنباله‌ای هندسی با قدرنسبت بزرگ‌تر از یک تشکیل دهند؟

۱) $\frac{۱}{۱۲۲۵}$ ۲) $\frac{۳}{۲۴۵۰}$ ۳) $\frac{۱}{۴۹۰}$ ۴) $\frac{۳}{۱۲۲۵}$

پاسخ: گزینه ۲ (ریاضی ۱ ـ صفحات ۲۵ و ۲۶ و ۱۴۶ تا ۱۴۹ ـ دشوار)

پاسخ تشریحی:

انتخاب سه عدد از بین ۵۰ عدد به $\binom{۵۰}{۳}$ طریق امکان‌پذیر است. از طرف دیگر، اگر بخواهیم این عددها دنبالهٔ هندسی با قدرنسبت بزرگ‌تر از یک تشکیل دهند، قدرنسبت دنباله باید عددی طبیعی و بزرگ‌تر از یک باشد. اگر جملهٔ اول برابر a و قدرنسبت r باشد، در این صورت:

$$r=۲ \Rightarrow a_۳=ar^۲=۴a\le ۵۰ \Rightarrow a\le \frac{۵۰}{۴} \Rightarrow ۱\le a\le ۱۲ \Rightarrow a\in\{۱,۲,\dots,۱۲\}$$

پس ۱۲ دنباله هندسی با قدرنسبت ۲ وجود دارد.

$$r=۳ \Rightarrow a_۳=ar^۲=۹a\le ۵۰ \Rightarrow a\le \frac{۵۰}{۹} \Rightarrow ۱\le a\le ۵ \Rightarrow a\in\{۱,۲,\dots,۵\}$$

پس ۵ دنبالهٔ هندسی با قدرنسبت ۳ وجود دارد.

$$r=۴ \Rightarrow a_۳=ar^۲=۱۶a\le ۵۰ \Rightarrow a\le \frac{۵۰}{۱۶} \Rightarrow ۱\le a\le ۳ \Rightarrow a\in\{۱,۲,۳\}$$

پس ۳ دنبالهٔ هندسی با قدرنسبت ۴ وجود دارد.

$$r=۵ \Rightarrow a_۳=ar^۲=۲۵a\le ۵۰ \Rightarrow ۱\le a\le ۲ \Rightarrow a\in\{۱,۲\}$$

پس ۲ دنبالهٔ هندسی با قدرنسبت ۵ وجود دارد.

$$r=۶ \Rightarrow a_۳=ar^۲=۳۶a\le ۵۰ \Rightarrow a=۱$$

پس ۱ دنبالهٔ هندسی با قدرنسبت ۶ وجود دارد.

$$r=۷ \Rightarrow a_۳=ar^۲=۴۹a\le ۵۰ \Rightarrow a=۱$$

پس ۱ دنبالهٔ هندسی با قدرنسبت ۷ وجود دارد و اگر $r\ge ۸$، آن‌گاه $a_۳>۵۰$، پس دنبالهٔ دیگری وجود ندارد. بنابراین احتمال موردنظر برابر است با:

$$\frac{۱۲+۵+۳+۲+۱+۱}{\binom{۵۰}{۳}}=\frac{۲۴}{۱۹۶۰۰}=\frac{۳}{۲۴۵۰}$$

گروه آموزشی ماز

55- احتمال این که علی در آزمون ریاضی و آزمون فیزیک قبول شود به ترتیب $\frac{۱}{۶}$ و $\frac{۱}{۵}$ است. اگر او در آزمون ریاضی قبول شود، احتمال قبولی او در فیزیک دو برابر می‌شود. چقدر احتمال دارد که علی حداقل در یکی از دو آزمون قبول شود؟

۱) ۰/۲ ۲) ۰/۳ ۳) ۰/۴ ۴) ۰/۵

پاسخ: گزینه ۲ (ریاضی ۲ ـ صفحات ۱۴۴ تا ۱۵۰ ـ ساده)

پاسخ تشریحی:

اگر A پیشامد قبولی علی در ریاضی و B پیشامد قبولی او در فیزیک باشد، آن‌گاه:

$$P(A)=\frac{۱}{۶},\ P(B)=\frac{۱}{۵},\ P(B|A)=\frac{۲}{۵}$$

بنابراین:

$$P(B|A)=\frac{P(A\cap B)}{P(A)} \Rightarrow \frac{۲}{۵}=\frac{P(A\cap B)}{\frac{۱}{۶}} \Rightarrow P(A\cap B)=\frac{۱}{۱۵}$$

پس احتمال قبولی علی حداقل در یکی از دو آزمون برابر است با:

$$P(A\cup B)=P(A)+P(B)-P(A\cap B)=\frac{۱}{۶}+\frac{۱}{۵}-\frac{۱}{۱۵}=\frac{۳}{۱۰}$$

گروه آموزشی ماز

56- همه توابع به صورت $f:A\to B$ که در آن $A=\{a,b,c\}$ و $B=\{۱,۲,۳,۴,۵\}$ است را تعریف کرده‌ایم و از میان آن‌ها یکی را به تصادف انتخاب می‌کنیم. چقدر احتمال دارد تابع موردنظر یک‌به‌یک باشد؟

۱) %۴۸ ۲) %۵۲ ۳) %۴۶ ۴) %۵۴

پاسخ: گزینه ۱ (ریاضی ۱ ـ صفحات ۱٤٦ تا ۱٤۹ ـ دشوار)

پاسخ تشریحی:

فضای نمونه شامل همه توابع قابل ساخت است:

$$f=\{(a,\bigcirc),(b,\bigcirc),(c,\bigcirc)\}\Rightarrow n(S)=۵\times۵\times۵=۱۲۵$$

۵ حالت ۵ حالت ۵ حالت

پیشامد مطلوب، توابع دارای مولفه دوم متمایز هستند:

$$f=\{(a,\bigcirc),(b,\bigcirc),(c,\bigcirc)\}\Rightarrow n(A)=۵\times۴\times۳=۶۰$$

۵ حالت ۴حالت ۳ حالت

$$\Rightarrow P(A)=\frac{n(A)}{n(S)}=\frac{۶۰}{۱۲۵}=\frac{۱۲}{۲۵}=۰/۴۸$$

گروه آموزشی ماز

57- در کیسه A، ۳ مهره قرمز و ۴ مهره آبی و در کیسه B، ۵ مهره قرمز و ۳ مهره آبی قرار دارد. از کیسه A مهره‌ای به تصادف خارج و در کیسه B می‌اندازیم و سپس مهره‌های کیسه B را متوالیاً و بدون جایگذاری خارج می‌کنیم. چقدر احتمال دارد مهره‌های اول و سوم همرنگ باشند؟

۱) $\frac{۱۰}{۲۱}$ ۲) $\frac{۲۹}{۶۳}$ ۳) $\frac{۵۹}{۱۲۶}$ ۴)

پاسخ: گزینه ۳ (ریاضی ۳ ـ صفحات ۱٤٤ تا ۱٤۸ ـ متوسط)

نکته:

چون در مورد رنگ مهره دوم صحبت نشده، فرض می‌کنیم مهره دوم خارج شده، یعنی کافیست احتمال این را بیابیم که مهره اول و دوم همرنگ باشند.

پاسخ تشریحی:

براساس اینکه مهره خروجی از کیسه A قرمز یا آبی باشد، فضای نمونه به دو بخش افراز می‌شود:

$$\overset{A\text{ قرمز}}{\frac{۳}{۷}}\times(\underbrace{\frac{۶}{۹}\times\frac{۵}{۸}}_{\text{هر دو قرمز}}+\underbrace{\frac{۳}{۹}\times\frac{۲}{۸}}_{\text{هر دو آبی}})+\overset{A\text{ آبی}}{\frac{۴}{۷}}\times(\frac{۵}{۹}\times\frac{۴}{۸}+\frac{۴}{۹}\times\frac{۳}{۸})=\frac{۳\times۳۶+۴\times۳۲}{۷\times۸\times۹}=\frac{۳\times۹+۳۲}{۷\times۲\times۹}=\frac{۵۹}{۱۲۶}$$

گروه آموزشی ماز

شرکت تعاونی خدمات آموزشی کارکنان
سازمان سنجش آموزش کشور

www.mapedu.ir

۱. گزینه ۲ درست است.

حالت‌های (۲,۳,۴)، (۲,۳,۷)، (۲,۴,۶)، (۲,۵,۸)، (۲,۶,۷)، (۳,۴,۵)، (۳,۴,۸)، (۳,۵,۷)، (۳,۷,۸)، (۴,۵,۶)، (۴,۶,۸)، (۵,۶,۷) و (۶,۷,۸) مواردی هستند که تنها انتخاب آنها منجر به عدد سه رقمی بخش پذیر ۳ می‌شود و تعداد حالت انتخاب ۳ عدد برابر $n(s)=\binom{۷}{۳}=۳۵$ است.

$$P(A)=\frac{۱۳}{۳۵}$$

۲. گزینه ۴ درست است.

$$P=\frac{\binom{۵}{۱}\binom{۴}{۱}\binom{۱}{۱}+\binom{۵}{۱}\binom{۴}{۲}\binom{۱}{۰}+\binom{۵}{۲}\binom{۴}{۱}\binom{۱}{۰}}{\binom{۱۰}{۳}}=\frac{۲۰+۳۰+۴۰}{\frac{۸\times۹\times۱۰}{۱\times۲\times۳}}=\frac{۹۰}{۱۲۰}=\frac{۳}{۴}$$

۳. گزینه ۲ درست است.

A پیشامد ابتلا اولیه، B پیشامد درمان و C پیشامد اینکه تا ده سال آینده مبتلا شود، باشد. به کمک فرمول‌های $P(A)=۱-P(A')$، $P(B|A)=\frac{P(A\cap B)}{P(A)}$ و $P(C|A\cap B)=\frac{P(A\cap B\cap C)}{P(A\cap B)}$ داریم:

$$P(A)=۱-\frac{۸۰}{۱۰۰}=\frac{۲۰}{۱۰۰}$$

$$P(B|A)=\frac{۶۰}{۱۰۰}$$

$$P(C|A\cap B)=۱-\frac{۷۵}{۱۰۰}=\frac{۲۵}{۱۰۰}$$

$$P(A\cap B\cap C')=P(A)\times P(B|A)\times P(C'|A\cap B)=\frac{۳}{۱۰۰}$$

۴. گزینه ۲ درست است.

تفاضل ۲ باشد.

$$A=\{(۱,۳),(۲,۴),(۳,۵),(۴,۶),(۳,۱),(۴,۲),(۵,۳),(۶,۴)\}$$

تفاضل ۳ باشد.

$$B=\{(۱,۴),(۲,۵),(۳,۶),(۶,۳),(۵,۲),(۴,۱)\}$$

$$P(A\cup B)=P(A)+P(B)=\frac{۸+۶}{۳۶}=\frac{۷}{۱۸}$$

۵. گزینه ۳ درست است.

هر سه سیب سالم یا ۲ سیب سالم است. $P=\frac{\binom{۸}{۳}\binom{۴}{۰}+\binom{۸}{۲}\binom{۴}{۱}}{\binom{۱۲}{۳}}$ پس $P=\frac{۵۶+۱۱۲}{۲۲۰}=\frac{۴۲}{۵۵}$

۶ گزینه ۴ درست است.

تعداد حالات مساعد ۴۹ و تعداد فضای نمونه‌ای $\binom{۵۰}{۲}=\frac{۵۰\times۴۹}{۲}$ پس $p=\frac{۴۹}{۲۵\times۴۹}=۰/۰۴$

۷. گزینه ۲ درست است.

در احتمال مکمل داریم $p(A)=۱-p(A')$ و $p(A')=\frac{۱۲}{۱۲}\times\frac{۱۱}{۱۲}\times\frac{۱۰}{۱۲}\times\frac{۹}{۱۲}\times\frac{۸}{۱۲}$ پس $p(A)=۱-\frac{۵۵}{۱۴۴}=\frac{۸۹}{۱۴۴}$

۸. گزینه ۳ درست است.

دو آزمون مستقل از هم‌اند.

$$p(A\cap B)=p(A).p(B)=۰/۷\times۰/۸=۰/۵۶$$
$$p(A\cup B)=p(A)+p(B)-p(A\cap B)=۰/۹۴$$

۹. گزینه ۱ درست است.

اگر دو پیشامد ناسازگار نباشند $(A\cap B)\neq\varnothing$ آنگاه $p(A\cup B)\neq p(A)+p(B)$

۱۰. گزینه ۱ درست است.

در قانون احتمال کل داریم: $Q=\frac{۰/۳۰\times۰/۰۳}{۰/۳۰\times۰/۰۳+۰/۲۵\times۰/۰۴+۰/۴۵\times۰/۲}=\frac{۹}{۸}$

۱۱. گزینه ۴ درست است.

حالت مساعد هر دو عدد زوج یا هر دو فرد باشند پس احتمال وقوع مجموع دو عدد زوج:

$$P=\frac{\binom{۴۵}{۲}+\binom{۴۵}{۲}}{\binom{۹۰}{۲}}=\frac{۴۵\times۴۴}{۴۵\times۸۹}=\frac{۴۴}{۸۹}$$

۱۲. گزینه ۳ درست است.

پرتاب سکه و تاس مستقل از یکدیگرند. $P(A\cap B)=P(A)\times P(B)$

اگر تاس ۶ نباشد $P(A)=\frac{۵}{۶}$ اگر لااقل یکی از دو سکه رو باشد $P(B)=\frac{۳}{۴}$ و در نتیجه $P(A\cap B)=\frac{۵}{۶}\times\frac{۳}{۴}=\frac{۵}{۸}$

۱۳. گزینه ۲ درست است.

از ۵ پرسش، ۲ پرسش انتخابی صحیح و ۳ پرسش نادرست بوده است. احتمال موفقیت پرسش صحیح $\frac{۱}{۵}$ است. پس

$$P=\binom{۵}{۲}\left(\frac{۱}{۵}\right)^{۲}\left(\frac{۴}{۵}\right)^{۳}=\frac{۱۲۸}{۶۲۵}$$

۱۴ گزینه ۲ درست است.

$$P(A)=\frac{۱}{۵},\ P(B)=\frac{۱}{۳},\ P(B|A)=\frac{۲}{۵}\Rightarrow P(A\cap B)=P(B|A)\times P(A)=\frac{۲}{۲۵}$$
$$P(A\cup B)=P(A)+P(B)-P(A\cap B)=\frac{۱}{۵}+\frac{۱}{۳}-\frac{۲}{۲۵}=\frac{۳۴}{۷۵}$$

۱۵. گزینه ۳ درست است.

مجموع دو عدد تاس‌ها به صورت ۱۲,۹,۶,۳ باشد حالات مساعد برای آن‌ها به ترتیب ۱,۴,۵,۲ می‌باشد.

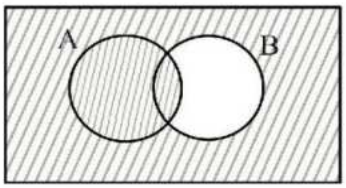
$$P=\frac{۲+۵+۴+۱}{۳۶}=\frac{۱}{۳}$$

۱۶. گزینه ۲ درست است.

بنابر قانون کل احتمالات داریم: $P=\frac{۰/۱\times ۰/۵}{۰/۱\times ۰/۵+۰/۶\times ۰/۳+۰/۳\times ۰/۲}=\frac{۵}{۲۹}$

۱۷. گزینه ۳ درست است.

با توجه به نمودار ون $A\cup B'$ را رسم می‌کنیم:



$$\Rightarrow P(A\cup B')+P(B-A)=۱$$

$$\Rightarrow P(B-A)=P(B)-P(A\cap B)=\frac{۴۰}{۱۰۰}$$

$$\Rightarrow P(A-B)=P(A)-P(A\cap B)=\frac{۲۰}{۱۰۰}$$

$$\Rightarrow P(B)-P(A)=\frac{۲۰}{۱۰۰}$$

$$۳(۱-P(A))=۵(۱-P(B))\Rightarrow ۵P(B)-۳P(A)=۲$$

$$\Rightarrow (۵-۳)P(B)=\frac{۱۴۰}{۱۰۰}\Rightarrow P(B)=٪۷۰\Rightarrow P(A\cap B)=٪۳۰$$

$$\Rightarrow P(A)=٪۵۰\Rightarrow P(A\cup B)=٪۷۰+٪۵۰-٪۳۰=٪۹۰$$

۱۸. گزینه ۲ درست است.

فرض می‌کنیم $A_۱$، $A_۲$ و $A_۳$ پیشامد انتخاب کتاب فیزیک برای ریاضی دهم، یازدهم و دوازدهم باشد.

$$P(A_۱\cap A_۲\cap A_۳)=P(A_۱)\times P(A_۲\mid A_۱)P(A_۳\mid A_۱\cap A_۲)=\frac{۱}{۵}\times\frac{۱}{۴}\times\frac{۱}{۳}=\frac{۱}{۶۰}$$

۱۹ . گزینه ۴ درست است.

احتمال متمم پیشامد را محاسبه می‌کنیم و داریم:

$$P=۱-\frac{\binom{۷}{۳}}{\binom{۱۲}{۳}}=\frac{۳۷}{۴۴}$$

۲۰. گزینه ۲ درست است.

۹۰۰ عدد ۳ رقمی داریم که به ترتیب ۳۰۰، ۱۲۸ و ۴۲ تا آنها بر ۳، ۷ و ۲۱ بخش‌پذیرند. اگر A و B اعداد بخش‌پذیر بر ۳ و ۷ باشند، داریم:

$$P=P(A-B)+P(B-A)=P(A)+P(B)-۲P(A\cap B)=\frac{۳۴۴}{۹۰۰}=\frac{۸۶}{۲۲۵}$$

۲۱. گزینه ۴ درست است.

$$P=\frac{۳}{۷}\times\frac{۴}{۹}+\frac{۴}{۷}\times\frac{۴}{۶}=\frac{۴+۸}{۲۱}=\frac{۴}{۷}$$

۲۲. گزینه ۱ درست است.

فرض کنید فضای نمونه ای x عضو دارد:

$$P(A)=\frac{۳}{x},P(B)=\frac{۴}{x},P(A\underbrace{\cap}_{\text{مستقل‌اند}}B)=P(A).P(B)=\frac{۱۲}{x^{۲}},P(A\cup B)=\frac{۵}{x}$$

$$P(A\cup B)=P(A)+P(B)-P(A\cap B)$$

$$(\frac{۵}{x}=\frac{۳}{x}+\frac{۴}{x}-\frac{۱۲}{x^{۲}})\times x^{۲}$$

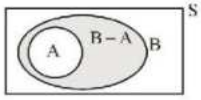
$۵x=۳x+۴x-۱۲\rightarrow x=۶$ تعداد اعضای فضای نمونه ای

$$P(A'\cap B')=P(A\cup B)'=۱-P(A\cup B)=۱-\frac{۵}{x}=۱-\frac{۵}{۶}=\frac{۱}{۶}$$

احتمال آنکه نه A و نه B همزمان اتفاق بیفتد.

۲۳. گزینه ۳ درست است.

بررسی موارد:



الف) درست است زیرا:

$$P(B-A)=P(B)-P(A\cap B)=P(B)-P(A)\xrightarrow{P(B-A)\geq ۰}P(B)-P(A)\geq ۰$$
$$\rightarrow P(A)\leq P(B)$$

ب) درست است زیرا $A\subseteq B\rightarrow A-B=\phi$

$$P(A-B)=P(\phi)=۰$$

ج) نادرست، زیرا در حالت $A=B$ (یکی از زیر حالت‌های $A\subseteq B$)

$$P(B-A)=P(\phi)=۰$$

د) درست: چون $A\cap B=A\leftarrow A\subseteq B$ و داریم:

$$P(B-A)=P(B)-P(A\cap B)=P(B)-P(A)$$

هـ) درست: $A\subseteq B\Rightarrow A\cap B=A$

و) درست

۲۴. گزینه ۴ درست است.

شانس قبولی علی $P(A)=۳x$

شانس قبولی حسن $P(B)=x$

هر دو قبول شوند (مستقل از هم) $P(A\cap B)=P(A)\times P(B)=۳x^{۲}$

$$P(A\cup B)=\frac{۷}{۱۲}$$

$$P(A\cup B)=P(A)+P(B)-P(A\ \ B)$$

$$\frac{۷}{۱۲}=۳x+x-۳x^{۲}$$

$$۳x^{۲}-۴x+\frac{۷}{۱۲}=۰$$

$$\Delta=(-۴)^{۲}-\cancel{۴(۳)}(\frac{۷}{\cancel{۱۲}})$$

$$\Delta=۱۶-۷=۹$$

$$x=\frac{۴\pm۳}{۶}\nearrow\boxed{x=\frac{۱}{۶}}$$ شانس قبولی حسن

$$\searrow x=\frac{۷}{۶}$$ غیر قابل قبول چون احتمال بین صفر و یک است

۲۵ . گزینه ۱ درست است.

$$\frac{\binom{۳}{۲}\binom{۹}{۴}+\binom{۳}{۳}\binom{۹}{۳}}{\binom{۱۲}{۶}}=\frac{۳۷۸+۸۴}{۹۲۴}=\frac{۱}{۲}$$

۲۶ . گزینه ۲ درست است.

روش اول:

$$\frac{P}{P'}=۳\Rightarrow\frac{P}{۱-P}=۳\Rightarrow P=\frac{۳}{۴}\Rightarrow P'=\frac{۱}{۴}$$

احتمال اینکه به یک سؤال جواب درس دهیم: $\frac{۳}{۴}\times\frac{۱}{۴}+\frac{۱}{۴}\times\frac{۳}{۴}$ و اینکه به ۲ سؤال جواب دهیم: $\frac{۳}{۴}\times\frac{۳}{۴}$، پس داریم:

$$\frac{۶}{۱۶}+\frac{۹}{۱۶}=\frac{۱۵}{۱۶}=٪۹۳/۷۵$$

روش دوم: متمم پیشامد فوق این است که به هر دو سؤال جواب نادرست دهیم.

$$۱-\frac{۱}{۴}\times\frac{۱}{۴}=\frac{۱۵}{۱۶}=٪۹۳/۷۵$$

۲۷ گزینه ۴ درست است.

$$P=\frac{\binom{۴}{۳}\times\binom{۶}{۴}}{\binom{۱۰}{۷}}=\frac{۴\times۳\times۵}{۱۰\times۳\times۴}=\frac{۱}{۲}$$

۲۸ گزینه ۱ درست است.

$$1-\left(\frac{\binom{3}{1}\times\binom{4}{1}\times\binom{5}{1}}{\binom{12}{3}}+\frac{\binom{3}{3}+\binom{4}{3}+\binom{5}{3}}{\binom{12}{3}}\right)=1-\left(\frac{60}{220}+\frac{15}{220}\right)=\frac{145}{220}=\frac{29}{44}$$

۲۹ گزینه ۲ درست است.

فضای نمونه‌ای جدید $S=\{(1,1)(2,2),\dots,(6,6),(1,4)(4,1)(2,5)(5,2)(3,6)(6,3)\}$ است و پیشامد مطلوب $A=\{(2,2)(2,5)(5,2)\}$ می‌باشد، پس:

$$P(A)=\frac{3}{12}=\frac{1}{4}$$

۳۰ گزینه ۴ درست است.

$P(A|B)+P(A')=1\Rightarrow P(A|B)=1=P(A')\Rightarrow P(A|B)=P(A)\Rightarrow$ A و B مستقل‌اند.

$$P(A\cup B)=\frac{7}{12}\Rightarrow P(A)+P(B)-P(A)\times P(B)=\frac{7}{12}\xrightarrow{P(A)=x\Rightarrow P(B)=3x}x+3x-3x^2=\frac{7}{12}$$

$$\Rightarrow 3x^2-4x+\frac{7}{12}=0\xrightarrow{\Delta=16-7=9}x=\frac{4\pm\sqrt{9}}{2}\Rightarrow x=\frac{1}{6}\Rightarrow P(B)=3x=\frac{3}{6}=\frac{1}{2}$$

۳۱ گزینه ۳ درست است.

$$\begin{cases}\xrightarrow{\text{مبتلا باشد}}0/02\xrightarrow{\text{آزمایش مثبت}}0/97\\ \xrightarrow{\text{مبتلا نباشد}}0/98\xrightarrow{\text{آزمایش مثبت}}0/05\end{cases}\Rightarrow P=0/02\times0/97+0/98\times0/05=0/0684$$

۳۲ گزینه ۴ درست است.

تعداد حالاتی که هیچ دو زنی کنار هم نیستند برابر است با:

$$n(s)=4!\times\binom{5}{3}\times3!$$

هم‌چنین تعداد حالاتی که مردان و زنان یک در میان هستند برابر $4!\times3!$ است. پس:

$$p=\frac{4!\times3!}{4!\times\binom{5}{3}\times3!}=\frac{1}{\binom{5}{3}}=\frac{1}{10}$$

۳۳ گزینه ۳ درست است.

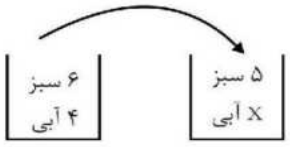
اگر پیشامد این که عدد رو شدهٔ تاس سفید ۲ باشد را با A و پیشامدهای مطرح شده در گزینه‌ها را با B نشان دهیم، در صورتی A و B مستقل‌اند که $P(A\cap B)=P(A)\times P(B)$ باشد. در گزینهٔ (۳) داریم:

$$\begin{cases}A=\{(2,1)(2,2)(2,3)(2,4)(2,5)(2,6)\}\Rightarrow P(A)=\frac{6}{36}\\ B=\{(1,6)(6,1)(2,5)(5,2)(3,4)(4,3)\}\Rightarrow P(B)=\frac{6}{36}\end{cases}\Rightarrow A\cap B=\{(2,5)\}\Rightarrow P(A\cap B)=\frac{1}{36}$$

چون $\frac{1}{36}=\frac{6}{36}\times\frac{6}{36}$ می‌باشد، پس $P(A\cap B)$ برابر $P(A)\times P(B)$ است و این یعنی A و B مستقل‌اند.

۳۴. گزینه ۲ درست است.

فرض می‌کنیم در ظرف دوم x مهرهٔ آبی داریم. پس:



$$\frac{۶}{۱۰}\times\frac{۶}{x+۶}+\frac{۴}{۱۰}\times\frac{۵}{x+۶}=\frac{۲۸}{۶۵}\Rightarrow\frac{۱}{x+۶}\times(\frac{۳۶}{۱۰}+\frac{۲۰}{۱۰})=\frac{۲۸}{۶۵}$$

$$\Rightarrow\frac{۱}{x+۶}=\frac{۲۸}{۶۵}\times\frac{۱۰}{۵۶}=\frac{۱}{۱۳}\Rightarrow x+۶=۱۳\Rightarrow x=۷$$

بنابراین ظرف دوم دارای ۱۲ مهره است.

۳۵. گزینه ۲ درست است.

اگر احتمال حل شدن مسأله توسط دوست رضا x باشد، احتمال حل شدن مسأله توسط رضا $۳x$ است. چون مسأله حل شده، پس حداقل یک نفر از آن‌ها، مسأله را حل کرده است. از آن‌جایی که حل مسأله توسط رضا و دوستش مستقل از یکدیگرند، داریم:

$$\frac{۲۰}{۲۷}=x+۳x-۳x\times x\Rightarrow -۸۱x^۲+۱۰۸x-۲۰=۰\Rightarrow x=\frac{۲}{۹}$$

حال احتمال آن که هر دو نفر مسأله را حل کنند برابر است با:

$$p=\frac{۲}{۹}\times\frac{۶}{۹}=\frac{۴}{۲۷}$$

۳۶ گزینه ۱ درست است.

$$p=\frac{۴}{۱۶}\times\frac{۴}{۱۲}+\frac{۶}{۱۶}\times\frac{۲}{۸}+\frac{۶}{۱۶}\times\frac{۲}{۶}=\frac{۱}{۱۲}+\frac{۳}{۳۲}+\frac{۱}{۸}=\frac{۸+۹+۱۲}{۹۶}=\frac{۲۹}{۹۶}$$

۳۷. گزینه ۱ درست است.

تعداد مهره‌های داخل جعبه $n-۲+n=۲n-۲$

$$n(S)=C(۲n-۲,۲)=\frac{(۲n-۲)!}{(۲n-۴)!۲!}=\frac{\cancel{(۲n-۴)!}(۲n-۳)(۲n-۲)}{۲\cancel{(۲n-۴)!}}=(n-۱)(۲n-۳)$$

(احتمال هم‌رنگ بودن دو مهره) $P=\frac{C(n,۲)+C(n-۲,۲)}{C(۲n-۲,۲)}$

$$C(n,۲)=\frac{n!}{(n-۲)!۲!}=\frac{\cancel{(n-۲)!}(n-۱)n}{(n-۲)!۲!}=\frac{n(n-۱)}{۲}$$

$$C(n-۲,۲)=\frac{(n-۲)!}{(n-۴)!۲!}=\frac{\cancel{(n-۴)!}(n-۳)(n-۲)}{\cancel{(n-۴)!}\times ۲}=\frac{(n-۲)(n-۳)}{۲}$$

(احتمال هم‌رنگ بودن دو مهره) $P=\frac{C(n,۲)+C(n-۲,۲)}{C(۲n-۲,۲)}=\frac{\frac{n(n-۱)}{۲}+\frac{(n-۲)(n-۳)}{۲}}{(n-۱)(۲n-۳)}$

$$=\frac{n^۲-n+n^۲-۵n+۶}{۲(n-۱)(۲n-۳)}=\frac{n^۲-۳n+۳}{(n-۱)(۲n-۳)}=\frac{۱}{۲}$$

$\cancel{۲n^۲}-۶n+۶=\cancel{۲n^۲}-۵n+۳\Rightarrow n=۳\rightarrow ۲n-۲=۴$ تعداد مهره‌های داخل جعبه

۳۸ گزینه ۴ درست است.

$A =$ ۷ مجموع دو تاس $= \{(۱,۶),(۲,۵),(۳,۴),(۴,۳),(۵,۲),(۶,۱)\}$

$P(A) = \frac{۶}{۳۶} = \frac{۱}{۶}$

$B =$ ۵ اولین تاس مضرب $= \{(۵,۲)\} \Rightarrow P(B|A) = \frac{۱}{۶} = P(A)$ دو پیشامد A و B مستقل‌اند.

۳۹. گزینه ۲ درست است.

$$P(B|A') = \frac{P(A' \cap B)}{P(A')} = \frac{\frac{۵}{۱۲}}{۱-\frac{۳}{۸}} = \frac{\frac{۵}{۱۲}}{\frac{۵}{۸}} = \frac{۲}{۳}$$

۴۰. گزینه ۱ درست است.

$\underset{۴}{\square}\underset{۳}{\square}\underset{۲}{\square}\underset{۱}{\boxed{\circ}}$ $\quad ۴\times۳\times۲\times۱ = ۲۴$

$\underset{۳}{\square}\underset{۳}{\square}\underset{۲}{\square}\underset{۲}{\boxed{۲ \text{ یا } ۴}}$ $\quad ۳\times۳\times۲\times۲ = ۳۶$

$n(s) = ۲۴ + ۳۶ = ۶۰$

$\underset{۱}{\boxed{۳}}\underset{۱}{\boxed{۱}}\underset{۲}{\square}\underset{۱}{\boxed{\circ}}$ $\quad ۱\times۱\times۲\times۱ = ۲$

$\underset{۲}{\boxed{۱ \text{ یا } ۲}}\underset{۳}{\square}\underset{۲}{\square}\underset{۱}{\boxed{\circ}}$ $\quad ۲\times۳\times۲\times۱ = ۱۲$

$\underset{۱}{\boxed{۳}}\underset{۱}{\boxed{\circ}}\underset{۲}{\square}\underset{۲}{\boxed{۲ \text{ یا } ۴}}$ $\quad ۱\times۱\times۲\times۲ = ۴$

$\underset{۱}{\boxed{۳}}\underset{۱}{\boxed{۱}}\underset{۲}{\square}\underset{۲}{\boxed{۲ \text{ یا } ۴}}$ $\quad ۱\times۱\times۲\times۲ = ۴$

$\underset{۱}{\boxed{۱}}\underset{۳}{\square}\underset{۲}{\square}\underset{۱}{\boxed{۲}}$ $\quad ۱\times۳\times۲\times۱ = ۶$

$\underset{۲}{\boxed{۱ \text{ یا } ۲}}\underset{۳}{\square}\underset{۲}{\square}\underset{۱}{\boxed{۴}}$ $\quad ۲\times۳\times۲\times۱ = ۱۲$

$$\begin{cases} n(A) = ۲+۱۲+۴+۴+۶+۱۲ = ۴۰ \\ P(A) = \frac{۴۰}{۶۰} = \frac{۲}{۳} \end{cases}$$

۴۱. گزینه ۲ درست است.

A: پیشامد نفر اول شدن در مسابقات

B: پیشامد خوردن تیر به هدف

$P(A) = \frac{۱}{۳}$, $P(B) = \frac{۱}{۴}$, $B(A|B) = \frac{۱}{۲}$

$P(A \cap B) = P(A|B) \times P(B) = \frac{۱}{۲} \times \frac{۱}{۴} = \frac{۱}{۸}$

$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B) = \frac{۱}{۳} + \frac{۱}{۴} - \frac{۱}{۸} = \frac{۷}{۱۲} - \frac{۱}{۸} = \frac{۱۱}{۲۴}$

۴۲. گزینه ۲ درست است.

چون مهره‌های اولیه خارج شده را نگاه نکرده‌ایم، پس شانس خروج دو مهره هم‌رنگ تغییری نکرده است:

$$P(\text{۲ مهره هم‌رنگ}) = \frac{\overbrace{\binom{۵}{۲}\binom{۷}{۰}}^{\text{هر دو قرمز}} + \overbrace{\binom{۷}{۲}\binom{۵}{۰}}^{\text{هر دو آبی}}}{\binom{۱۲}{۲}} = \frac{۱۰+۲۱}{۶۶} = \frac{۳۱}{۶۶}$$

۴۳. گزینه ۱ درست است.

$$\text{مجموعه اعداد اول کوچک‌تر از ۳۰} = \{۲,۳,۵,۷,۱۱,۱۳,۱۷,۱۹,۲۳,۲۹\}$$

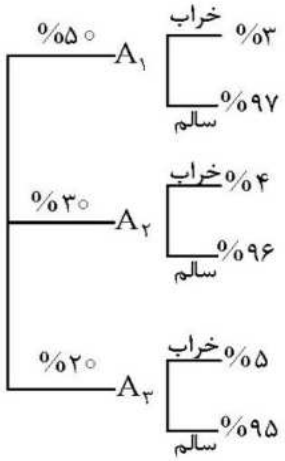
$$n(s) = \binom{۱۰}{۴} = \frac{۱۰!}{(۱۰-۴)!۴!} = ۲۱۰$$

اعداد اول بین ۷ و ۲۳ عبارت‌اند از: ۱۹,۱۷,۱۳,۱۱ که باید از بین آن‌ها دو عدد انتخاب کنیم: $n(A) = \binom{۴}{۲} = ۶$

$$P(A) = \frac{n(A)}{n(s)} = \frac{۶}{۲۱۰} = \frac{۱}{۳۵}$$

۴۴ گزینه ۳ درست است.

با رسم نمودار درختی این مسئله را حل می‌کنیم:



$$\text{احتمال قطعه خراب} = \frac{۵۰}{۱۰۰}\times\frac{۳}{۱۰۰} + \frac{۳۰}{۱۰۰}\times\frac{۴}{۱۰۰} + \frac{۲۰}{۱۰۰}\times\frac{۵}{۱۰۰} = \frac{۳۷}{۱۰۰۰}$$

$$P(A_۲ \mid \text{خراب بودن قطعه}) = \frac{P(A_۲ \cap \text{خراب بودن قطعه})}{P(\text{خراب بودن قطعه})} = \frac{\frac{۳۰}{۱۰۰}\times\frac{۴}{۱۰۰}}{\frac{۳۷}{۱۰۰۰}} = \frac{۱۲}{۳۷}$$

۴۵ گزینه ۴ درست است.

در حالت‌کلی چون برای هریک از پارامترهای c, b, a ، چهار مقدار وجود دارد، $۴\times۴\times۴=۶۴$ معادله درجه دوم مختلف می‌توان نوشت.

حالا پیشامد مطلوب را به زبان ریاضی می‌نویسیم:

$$s=p-۲\Rightarrow\frac{-b}{a}=\frac{c}{a}-۲\xrightarrow{\times a}-b=c-۲a\Rightarrow b+c=۲a$$

با چک کردن مقادیر صحیح از ۱ تا ۴ به جای c, b, a به حالات قابل قبول زیر می‌رسیم:

b	c	a
۱	۱	۱
۱	۳	۲
۲	۲	۲
۲	۴	۳
۳	۱	۲
۳	۳	۳
۴	۲	۳
۴	۴	۴

امّا دقت کنید! برای آن‌که اساساً در معادله فوق، جمع و ضرب ریشه‌ها معنادار باشد، لازم است که شرط $\Delta>۰$ هم بررسی شود:

$$b^۲-۴ac>۰\Rightarrow b^۲>۴ac$$

اگر مقادیر قابل قبول c, b, a در هریک از ۸ سطر جدول فوق را در نامساوی بالا چک کنید، فقط حالت $b=۳$ ، $c=۱$ و $a=۲$ صدق می‌کند و لذا فقط یک حالت از ۶۴ حالت قابل قبول است:

$$P=\frac{۱}{۶۴}$$

۴۶ . گزینه ۳ درست است.

علی، امیر و رضا را یک بسته در نظر می‌گیریم تعداد جایگشت‌های این بسته با ۳ نفر دیگر !۴ است. علی و رضا نیز می‌توانند باهم جابه‌جا شوند پس:

$$n(A)=۲\times۴!=۲\times۲۴=۴۸$$

تعداد اعضای مجموعهٔ فضای نمونه‌ای نیز !۶ است.

$$N(s)=۶!$$

درنتیجه:

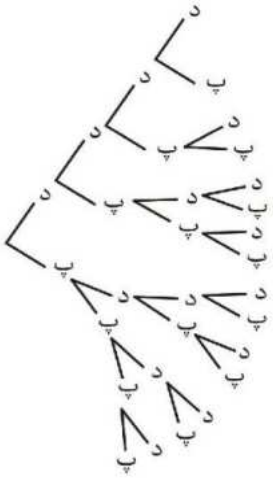
$$P_{(A)}=\frac{n(A)}{n(S)}=\frac{۲\times۴!}{۶!}=\frac{۲}{۶\times۵}=\frac{۱}{۱۵}$$

۴۷. گزینه ۳ درست است.

نمودار درختی فرزندان خانواده را رسم می‌کنیم:

تعداد اعضای مجموعهٔ پیشامد ۴ و تعداد اعضای مجموعهٔ فضای نمونه ۱۱ است.

$$P(A)=\frac{n(A)}{n(S)}=\frac{۴}{۱۱}$$



۴۸. گزینه ۲ درست است.

$$\frac{۱\text{ تا }۹}{۹}\times\frac{۰\text{ تا }۹}{۱۰}\times\frac{۰\text{ تا }۹}{۱۰}\times\frac{۰\text{ تا }۹}{۱۰}$$

$n(s)=۹۰۰۰$ تعداد کل اعداد چهار رقمی

$$\frac{۱\text{ تا }۹}{۹}\quad \underbrace{\underline{x}\ \ \underline{y}}_{\text{مجموع }۱۰}\quad \frac{۰\text{ تا }۹}{۱۰}$$

$n(A)=۹۰۰$ تعداد اعدادی که مجموع دو رقم وسط ۱۰ باشد

$$\%P(A)=\frac{۹\times۹\times۱۰}{۹۰۰۰}\times۱۰۰=\%۹$$

x	y
۱	۹
۲	۸
۳	۷
۴	۶
۵	۵

x	y
۶	۴
۷	۳
۸	۲
۹	۱

۴۹. گزینه ۲ درست است.

$$P(B|A)=\frac{P(A\cap B)}{P(A)}\to ۰/۲۵=\frac{P(A\cap B)}{۰/۴}\to P(A\cap B)=۰/۱$$

$$P(B-A)=۰/۲\to P(B)-\underbrace{P(A\cap B)}_{۰/۱}=۰/۲\to P(B)=۰/۳$$

$$P(A'\cap B')=P((A\cup B)')=۱-P(A\cup B)=۱-P(A)-P(B)+P(A\cap B)=$$
$$۱-۰/۴-۰/۳+۰/۱=۰/۴$$

$$P(B|A')=\frac{P(B\cap A')}{P(A')}=\frac{P(B-A)}{P(A')}=\frac{۰/۲}{۱-۰/۴}=\frac{۱}{۳}$$

$$P(A'|B')=\frac{P(A'\cap B')}{P(B')}=\frac{۰/۴}{۱-۰/۳}=\frac{۴}{۷}$$

۵۰. گزینه ۱ درست است.

$$P(\text{معدل بالای ۱۹})=\underbrace{\frac{۴}{۵}\times\frac{۲۵}{۱۰۰}}_{\text{مدرسه A}}+\underbrace{\frac{۱}{۵}\times\frac{۱۵}{۱۰۰}}_{\text{مدرسه B}}=\frac{۱۱۵}{۵۰۰}=\frac{۲۳}{۱۰۰}\to\%۲۳$$

۵۱. گزینه ۲ درست است.

مطابق تعریف احتمال شرطی:

$$\left.\begin{array}{r} P(A): \text{احتمال مبتلا شدن} = ۰/۱۲ \\ P(B|A): \text{احتمال بهود یافتن به شرط مبتلا شدن} = ۰/۶ \end{array}\right\} \Rightarrow P(A\cap B) = P(A)\times P(B|A) = ۰/۱۲\times ۰/۶ = ۰/۰۷۲ \rightarrow \%۷/۲$$

۵۲. گزینه ۳ درست است.

$$\text{اعداد اول و کوچک‌تر از ۴۰} = \{۲,۳,۵,۷,۱۱,۱۳,۱۷,۱۹,۲۳,۲۹,۳۱,۳۷,۳۹\}$$

$$n(s) = \binom{۱۳}{۵} = \frac{۱۳!}{(۱۳-۵)!۵!} = ۱۲۸۷$$

اعداد اول بین ۱۳ و ۳۱ عبارت‌اند از: ۱۷ و ۱۹ و ۲۳ و ۲۹ که باید از بین آن‌ها سه عدد انتخاب کنیم:

$$n(A) = \binom{۴}{۳} = ۴$$

$$P(A) = \frac{n(A)}{n(S)} = \frac{۴}{۱۲۸۷}$$

۵۳ گزینه ۳ درست است.

انتخاب طول نقطه A از مجموعه $\{۰,۱,۲,۳,۴\}$ به ۵ طریق و انتخاب عرض آن از مجموعه $\{-۲,-۱,۰,۱,۲,۳\}$ به ۶ طریق قابل انجام است. پس طبق اصل ضرب، در حالت کلی $۵\times۶ = ۳۰$ حالت برای انتخاب نقطه A وجود دارد.

حالا به محاسبه متمم پیشامد پرسیده شده می‌پردازیم:

برای آنکه طول پاره خط AA' برابر صفر شود، پس نقاط A و A' باید برهم منطبق شوند و لازمه این موضوع، آن است که نقطه A، خودش روی نیمساز ربع دوم و چهارم قرار بگیرد. در واقع از بین ۳۰ نقطه بالا، نقاطی قابل‌قبول‌اند که طول و عرض قرینه دارند:

$$(۰,۰)(۱,-۱)(۲,-۲) \rightarrow \text{۳ حالت}$$

پس احتمال متمم پیشامد مورد نظر برابر $\frac{۳}{۳۰} = \frac{۱}{۱۰}$ و لذا احتمال خودِ پیشامد مورد نظر $۱-\frac{۱}{۱۰} = \frac{۹}{۱۰}$ یا همان ۹۰ درصد است.

۵۴. گزینه ۳ درست است.

برای برقراری جریان در مدار، دو حالت وجود دارد:

الف) هر دو کلیدهای A و B وصل شوند:

$$p(۱) = ۰/۱\times ۰/۴ = ۰/۰۴$$

ب) کلید C وصل شود:

$$p(۲) = ۰/۵$$

پس:

$$p(۱\cup ۲) = p(۱) + p(۲) - p(۱)p(۲) = ۰/۰۴ + ۰/۵ - (۰/۰۴)(۰/۵)$$

اما دقت کنید! با یک مسئله احتمال شرطی مواجهیم و سؤال قید کرده که اگر کلیدهای A و B هر دو وصل شوند (حالت اول)، احتمال کار کردن کلید C نصف شده و به ۰/۲۵ کاهش می‌یابد، پس در قسمت اشتراک که احتمال کار کردن کلیدهای A و B از یک طرف و کلید C از طرف دیگر را حساب می‌کنیم، باید بنویسیم:

$$۰/۰۴ + ۰/۵ - (۰/۰۴)\underbrace{(۰/۲۵)}_{\text{دقت شود!}} = ۰/۵۳$$

۵۵ گزینه ۲ درست است.

برای آن که عدد تاس نفر اول، دو برابر تعداد شیرهای ظاهر شده در پرتاب نفر دوم را نشان دهد، حالات زیر متصور است:

$$\frac{\binom{۴}{۱}}{۲^۴}\times\frac{۱}{۶}=\frac{۱}{۲۴}$$ ← تاس ۲ بیاید و یک سکه شیر بیاید.

$$\frac{\binom{۴}{۲}}{۲^۴}\times\frac{۱}{۶}=\frac{۱}{۱۶}$$ ← تاس ۴ بیاید و دو سکه شیر بیاید.

$$\frac{\binom{۴}{۳}}{۲^۴}\times\frac{۱}{۶}=\frac{۱}{۲۴}$$ ← تاس ۶ بیاید و سه سکه شیر بیاید.

پس احتمال مورد نظر برابر است با:

$$\frac{۱}{۲۴}+\frac{۱}{۱۶}+\frac{۱}{۲۴}=\frac{۱}{۱۲}+\frac{۱}{۱۶}=\frac{۷}{۴۸}$$

دقت کنید که اگر صفر سکه شیر بیاید، لازم است که تاس صفر بیاید!
و اگر هر چهار سکه شیر بیاید، لازم است که تاس ۸ بیاید!
واضح است که این دو حالت قابل قبول نیست.

www.mapedu.ir

تست و پاسخ 1

هر یک از میوه‌های گوجه‌سبز، آلبالو و زردآلو را بین سه نفر با لباس‌های سبز، زرد و قرمز پخش می‌کنیم. با کدام احتمال هر فرد میوهٔ هم‌رنگ با لباسش را دریافت کرده است؟

۱) $\frac{۱}{۳}$ ۲) $\frac{۱}{۶}$ ۳) $\frac{۱}{۹}$ ۴) $\frac{۱}{۱۲}$

پاسخ: گزینه ۲

پاسخ تشریحی **گام اول:** در کل ۳ میوه را بین ۳ نفر می‌خواهیم پخش کنیم؛ مثل این‌که ۳ شیء و ۳ جای قرارگرفتن داریم. تعداد کل حالات برابر است با: $n(S)=۳!=۶$

گام دوم: از این ۶ حالت، فقط در یک حالت هر میوه به شخصی که رنگ لباسش با میوه یکی باشد، می‌رسد: $n(A)=۱$

گام سوم: $P(A)=\frac{n(A)}{n(S)}=\frac{۱}{۶}$

تست و پاسخ 2

از کیسه‌ای که در آن ۵ مهره با شماره‌های ۵،۴،۳،۲،۱ قرار دارد، به طور متوالی سه مهره با جای‌گذاری بیرون می‌آوریم و اعداد مهره‌ها را کنار هم می‌نویسیم. با کدام احتمال عدد سه‌رقمی حاصل از ۳۴۱ کم‌تر است؟

۱) ۴۸ درصد ۲) ۵۲ درصد ۳) ۵۶ درصد ۴) ۶۵ درصد

پاسخ: گزینه ۲

خودت حل کنی بهتره اعداد مطلوب دو حالت دارند: ۱) صدگانشان ۱ یا ۲ باشد. ۲) صدگانشان ۳ و دهگانشان ۱ یا ۲ یا ۳ باشد.

پاسخ تشریحی **گام اول:** در واقع با ارقام ۱ تا ۵، عدد سه‌رقمی نوشته‌ایم. تعداد کل حالات برابر است با: $n(S)=\underset{ص}{\underline{۵}}\times\underset{د}{\underline{۵}}\times\underset{ی}{\underline{۵}}=۱۲۵$

گام دوم: می‌خواهیم عدد سه‌رقمی از ۳۴۱ کم‌تر باشد، دو حالت داریم:

۱) صدگانش ۱ یا ۲ باشد (دهگان و یکانش محدودیت ندارند):

$$\underset{ص}{\underline{\overset{۱\text{یا}۲}{۲}}}\times\underset{د}{\underline{۵}}\times\underset{ی}{\underline{۵}}=۵۰$$

۲) صدگانش ۳ و دهگانش اعداد ۱ یا ۲ یا ۳ باشد (یکان محدودیت ندارد):

$$\underset{ص}{\underline{\overset{۳}{۱}}}\times\underset{د}{\underline{\overset{۱\text{یا}۲\text{یا}۳}{۳}}}\times\underset{ی}{\underline{۵}}=۱۵$$

تعداد کل حالات مطلوب برابر است با: $n(A)=۵۰+۱۵=۶۵$

گام سوم: احتمال رخ‌دادن A برابر است با: $P(A)=\frac{n(A)}{n(S)}=\frac{۶۵}{۱۲۵}=\frac{۱۳\times۴}{۲۵\times۴}=۰/۵۲ \longrightarrow$ ۵۲ درصد

تست و پاسخ 3

حروف کلمهٔ HELENA را کنار هم چیده‌ایم. با کدام احتمال دو حرف E کنار هم قرار می‌گیرند؟

۱) $\frac{۱}{۲}$ ۲) $\frac{۱}{۳}$ ۳) $\frac{۱}{۶}$ ۴) $\frac{۱}{۱۲}$

پاسخ: گزینه ۲

خودت حل کنی بهتره برای محاسبهٔ $n(S)$ باید از رابطهٔ جایگشت با تکرار استفاده کنید.

پاسخ تشریحی **گام اول:** تعداد کل جایگشت‌های حروف کلمهٔ HELENA برابر است با:

$$n(S)=\frac{\overset{\text{تعداد کل حروف}}{۶!}}{\underset{\text{تعداد تکرار E}}{۲!}}=۳\times ۵!$$

گام دوم: می‌خواهیم دو حرف E کنار هم باشند. آن‌ها را در یک بسته قرار می‌دهیم:

چون مشابه هستند، پس داخل بسته جایگشت نداریم.

$$\underbrace{H\,,\,L\,,\,N\,,\,A\,,\,E\,,\,E}_{n(A)=۵!}$$

گام سوم: احتمال وقوع پیشامد A برابر است با:

$$P(A)=\frac{n(A)}{n(S)}=\frac{۵!}{۳\times ۵!}=\frac{۱}{۳}$$

تست و پاسخ 4

در پرتاب سه تاس با هم چه‌قدر احتمال دارد مجموع سه عدد روشده ۱۴ و حاصل‌ضرب آن‌ها مضرب ۳ باشد؟

حداقل یکی از تاس‌ها مضرب ۳ باشد.

۱) $\frac{۱}{۳۶}$ ۲) $\frac{۱}{۱۸}$ ۳) $\frac{۱}{۱۲}$ ۴) $\frac{۱}{۲۴}$

پاسخ: گزینه ۲

پاسخ تشریحی **گام اول:** تعداد اعضای فضای نمونه در پرتاب سه تاس برابر است با:

$$n(S)=\underset{\text{تاس ۱}}{۶}\times\underset{\text{تاس ۲}}{۶}\times\underset{\text{تاس ۳}}{۶}=۶^۳$$

گام دوم: حالت‌هایی که مجموع اعداد روشدهٔ سه تاس برابر با ۱۴ است را می‌نویسیم:

اعداد تاس‌ها ۶، ۶ و ۲ باشد. $\xrightarrow{\frac{۳!}{۲!}=۳}$ (۲,۶,۶),(۶,۲,۶),(۶,۶,۲)

اعداد تاس‌ها ۶، ۵ و ۳ باشد. $\xrightarrow{۳!=۶}$ (۳,۵,۶),(۳,۶,۵),(۵,۳,۶),(۵,۶,۳),(۶,۳,۵),(۶,۵,۳)

اعداد تاس‌ها ۶، ۴ و ۴ باشد. $\xrightarrow{\frac{۳!}{۲!}=۳}$ (۴,۴,۶),(۴,۶,۴),(۶,۴,۴)

چون هیچ‌کدام مضرب ۳ نیستند، به کارمان نمی‌آید. ⇐ اعداد تاس‌ها ۵، ۵ و ۴ باشد.

پس تعداد حالات مطلوب برابر است با:

$$n(A)=۳+۶+۳=۱۲$$

گام سوم:

$$P(A)=\frac{n(A)}{n(S)}=\frac{۱۲}{۶^۳}=\frac{۲}{۶^۲}=\frac{۱}{۱۸}$$

تست و پاسخ 5

از بین ۴ دکتر، ۴ متخصص بیهوشی و ۴ تکنسین اتاق عمل، ۵ نفر را به تصادف انتخاب می‌کنیم. با کدام احتمال از هر سه رشته افرادی را انتخاب کرده‌ایم؟

۱) $\frac{۴}{۱۱}$ ۲) $\frac{۲۰}{۳۳}$ ۳) $\frac{۲۶}{۳۳}$ ۴) $\frac{۲}{۱۱}$

پاسخ: گزینه ۳

پاسخ تشریحی **گام اول:** در کل ۱۲ = ۴ + ۴ + ۴ شخص داریم و می‌خواهیم ۵ نفرشان را انتخاب کنیم:

$$n(S)=\binom{۱۲}{۵}=\frac{۱۲!}{۵!۷!}=\frac{\cancel{۱۲}\times ۱۱\times \cancel{۱۰}\times ۹\times ۸}{\cancel{۵}\times \cancel{۴}\times \cancel{۳}\times \cancel{۲}}=۱۱\times ۷۲$$

گام دوم: برای آن‌که از هر گروه، حداقل یک نفر داشته باشیم، دو حالت داریم:

۱) از ۲ گروه از هر کدام ۲ نفر و از گروه دیگر، ۱ نفر داشته باشیم:

$$\underbrace{\binom{۳}{۲}}_{\text{انتخاب ۲ گروه از ۳ گروه}}\underbrace{\binom{۴}{۲}}_{\text{۲ نفر از گروه اول}}\underbrace{\binom{۴}{۲}}_{\text{۲ نفر از گروه دوم}}\underbrace{\binom{۴}{۱}}_{\text{۱ نفر از گروه سوم}}=۳\times\frac{۴\times۳}{۲}\times\frac{۴\times۳}{۲}\times۴=۱۲\times۳۶$$

۲) از ۱ گروه ۳ نفر و از ۲ گروه دیگر، ۱ نفر داشته باشیم:

$$\underbrace{\binom{۳}{۱}}_{\text{انتخاب ۱ گروه از ۳ گروه}}\underbrace{\binom{۴}{۳}}_{\text{۳ نفر از گروه اول}}\underbrace{\binom{۴}{۱}}_{\text{۱ نفر از گروه دوم}}\underbrace{\binom{۴}{۱}}_{\text{۱ نفر از گروه سوم}}=۳\times۴\times۴\times۴=۱۲\times۱۶$$

مجموع دو حالت برابر است با:

$$n(A)=۱۲\times۳۶+۱۲\times۱۶=۱۲(۳۶+۱۶)=۱۲\times۵۲$$

گام سوم: احتمال وقوع A برابر است با:

$$P(A)=\frac{n(A)}{n(S)}=\frac{\overset{۱}{\cancel{۱۲}}\times\overset{۲۶}{\cancel{۵۲}}}{۱۱\times\underset{۲}{\cancel{۷۲}}}=\frac{۲۶}{۳۳}$$

تست و پاسخ 6

اگر A و B دو پیشامد در یک فضای نمونه‌ای باشند، به طوری که $۴P(A)=۳P(B)=۶P(A\cap B)=۱$، آن‌گاه حاصل $P(B'|A')$ کدام است؟

۱) $\frac{۷}{۸}$ ۲) $\frac{۷}{۹}$ ۳) $\frac{۷}{۱۲}$ ۴) $\frac{۷}{۱۰}$

پاسخ: گزینه ۲

خودت حل کنی بهتره متمم $A'\cap B'$ می‌شود $A\cup B$، یعنی $P(A'\cap B')=۱-P(A\cup B)$.

درس‌نامه •• احتمال شرطی

برای حل سؤالات احتمال شرطی یکی از دوتا کار زیر را انجام می‌دهیم:

بدون استفاده از فرمول	در صورت امکان با اعمال کردن شرط، فضای نمونهٔ جدید را می‌نویسیم. بعد در بین اعضای فضای نمونهٔ جدید، عضوهای مطلوبمان را می‌شماریم: $\text{احتمال شرطی}=\frac{\text{تعداد عضوهای مطلوب از بین اعضای فضای نمونهٔ جدید}}{\text{تعداد اعضای فضای نمونهٔ جدید}}$
استفاده از فرمول	احتمال رخ‌دادن پیشامد A به شرطی که پیشامد B رخ داده باشد، برابر است با: $\underbrace{P(A\|B)}_{\text{احتمال A به شرط B}}=\frac{P(A\cap B)}{P(B)}$

پاسخ تشریحی **گام اول**: تساوی داده‌شده را ساده می‌کنیم:

$$۴P(A)=۳P(B)=۶P(A\cap B)=۱\rightarrow\begin{cases}P(A)=\frac{۱}{۴}\\P(B)=\frac{۱}{۳}\\P(A\cap B)=\frac{۱}{۶}\end{cases}$$

گام دوم: احتمال شرطی داده‌شده را ساده‌تر می‌نویسیم:

$$P(B'|A')=\frac{P(B'\cap A')}{P(A')}$$

گام سوم: احتمال پیشامد A' را حساب می‌کنیم:

$$P(A')=1-P(A)=1-\frac{1}{4}=\frac{3}{4}$$

گام چهارم: چون $(A\cup B)'=A'\cap B'$، پس باید احتمال $A\cup B$ را حساب کنیم و بعد از روی آن احتمال $A'\cap B'$ را به دست آوریم:

$$P(A\cup B)=P(A)+P(B)-P(A\cap B)=\frac{1}{4}+\frac{1}{3}-\frac{1}{6}=\frac{5}{12}\xrightarrow{\text{متمم}}P(A'\cap B')=1-\frac{5}{12}=\frac{7}{12}$$

گام پنجم: از گام دوم، داریم:

$$P(B'|A')=\frac{P(B'\cap A')}{P(A')}=\frac{\frac{7}{12}}{\frac{3}{4}}=\frac{7\times \cancel{4}^{1}}{\cancel{12}_{3}\times 3}=\frac{7}{9}$$

تست و پاسخ 7

با ارقام ۴،۳،۲،۱ عددی دورقمی می‌سازیم. اگر اول نباشد با کدام احتمال فرد است؟ (تکرار ارقام مجاز است.)

۱) ۰/۱ ۲) ۰/۲ ۳) ۰/۲۵ ۴) ۰/۳

پاسخ: گزینه ۲

خودت حل کنی بهتره نیازی به فرمول نیست. فضای نمونه‌ای را محدود کنید و در آن، حالات مطلوب را بشمارید.

پاسخ تشریحی **گام اول:** تمام اعداد دورقمی که با ارقام ۱ تا ۴ می‌توانیم بسازیم را می‌نویسیم:

$$\begin{cases}11,12,13,14\\21,22,23,24\\31,32,33,34\\41,42,43,44\end{cases}$$

گام دوم: آن‌هایی که اول نیستند را می‌نویسیم:

$$\begin{cases}11,12,13,14\\21,22,23,24\\31,32,33,34\\41,42,43,44\end{cases}\Rightarrow \text{تعداد اعضای فضای نمونهٔ جدید}=10$$

گام سوم: از بین اعضای فضای نمونهٔ جدید، آن‌هایی که فرد هستند را می‌نویسیم:

$\{21,33\}\Rightarrow$ ۲ عضو

گام چهارم:

$$\text{احتمال شرطی}=\frac{\text{تعداد عضوهای مطلوب از بین اعضای فضای نمونهٔ جدید}}{\text{تعداد اعضای فضای نمونهٔ جدید}}=\frac{2}{10}=0/2$$

تست و پاسخ 8

احتمال آن‌که فردی ناراحتی قلبی پیدا کند ۰/۲۵، احتمال آن‌که ناراحتی کلیه پیدا کند ۰/۳۶ و احتمال آن‌که هر دو بیماری را پیدا کند ۰/۱۲ است. اگر بدانیم او ناراحتی قلبی یا کلیه دارد، با کدام احتمال قلب او سالم، ولی کلیهٔ او ناراحت است؟

۱) $\frac{13}{49}$ ۲) $\frac{11}{61}$ ۳) $\frac{24}{49}$ ۴) $\frac{24}{61}$

پاسخ: گزینه ۳

خودت حل کنی بهتره با فرض «A: ناراحتی قلبی داشتن» و «B: ناراحتی کلیه داشتن»، سؤال $P(A'\cap B|A\cup B)$ را می‌خواهد.

پاسخ تشریحی **گام اول**: با فرض $\begin{cases} A: \text{داشتن ناراحتی قلبی} \\ B: \text{داشتن ناراحتی کلیه} \end{cases}$، داریم:

$$\begin{cases} P(A) = ۰/۲۵ \\ P(B) = ۰/۳۶ \\ P(A \cap B) = ۰/۱۲ \end{cases}$$

گام دوم: می‌خواهیم احتمال شرطیِ «اگر $\overbrace{\underbrace{\text{ناراحتی قلبی}}_{A} \underset{\cup}{\text{یا}} \underbrace{\text{کلیه}}_{B}}^{A \cup B}$ داشته باشد، احتمال آن‌که $\underbrace{\text{قلب او سالم}}_{A'} \underset{\cap}{\text{و}} \underbrace{\text{کلیهٔ او ناراحت}}_{B}$ باشد» را به زبان ریاضی بنویسیم:

$$P(\underbrace{A' \cap B}_{B-A} | A \cup B)$$

گام سوم: می‌دانیم $P(\bigcirc|\square) = \frac{P(\bigcirc \cap \square)}{P(\square)}$؛ پس:

$$P(B-A|A \cup B) = \frac{P(\overbrace{(B-A) \cap (A \cup B)}^{\text{با توجه به نمودار ون می‌شه } B-A})}{P(A \cup B)} = \frac{\overbrace{P(B-A)}^{\text{فرمول ۲ درس‌نامه}}}{\underbrace{P(A \cup B)}_{\text{فرمول ۳ درس‌نامه}}} = \frac{P(B) - P(B \cap A)}{P(A) + P(B) - P(A \cap B)}$$

$$\Rightarrow \frac{۰/۳۶ - ۰/۱۲}{۰/۲۵ + ۰/۳۶ - ۰/۱۲} = \frac{۰/۲۴}{۰/۴۹} = \frac{۲۴}{۴۹}$$

تست و پاسخ 9

یک تاس و یک سکه را در نظر بگیرید، اگر هر کدام از آن‌ها را دو بار پرتاب کنیم، احتمال آن‌که تاس حداقل یک بار مضرب ۳ یا سکه هر دو بار رو ظاهر شود، کدام است؟

۱) $\frac{۲}{۳}$ ۲) $\frac{۵}{۹}$ ۳) $\frac{۲۹}{۳۶}$ ۴) $\frac{۵}{۳۶}$

پاسخ: گزینه ۱

خودت حل کنی بهتره پرتاب تاس و پرتاب سکه، مستقل‌اند.

درس‌نامه «دو پیشامد ناسازگار» و «دو پیشامد مستقل»

	تعریف	رابطهٔ ریاضی	نمودار ون
ناسازگار	دو پیشامد که عضو مشترکی ندارند.	$A \cap B = \varnothing$ یا $P(A \cap B) = ۰$	A B
مستقل	وقوع هر کدام بر احتمال وقوع دیگری تأثیر ندارد.	$P(A \cap B) = P(A) \times P(B)$	☺

پاسخ تشریحی **گام اول**: دو پیشامد تعریف می‌کنیم: $\begin{cases} A: \text{در پرتاب دو بار یک تاس، حداقل یک بار مضرب ۳ بیاید.} \\ B: \text{در پرتاب دو بار یک سکه، هر دو سکه رو بیاید.} \end{cases}$

سؤال احتمال وقوع پیشامد $A \cup B$ را می‌خواهد.

گام دوم: احتمال وقوع A و احتمال وقوع B را حساب می‌کنیم:

$$P(A) = P(\text{حداقل یک بار مضرب ۳ بیاید}) = ۱ - P(\text{هر دو مضرب ۳ نباشند}) = ۱ - \frac{۴ \times ۴}{۶ \times ۶} = ۱ - \frac{۴}{۹} = \frac{۵}{۹}$$

$$P(B) = \frac{\overset{\text{رو}}{۱ \times ۱}}{۲ \times ۲} = \frac{۱}{۴}$$

گام سوم: A و B مستقل‌اند؛ پس: $P(A\cup B)=P(A)+P(B)-\underbrace{P(A\cap B)}_{P(A)\times P(B)}=\frac{۵}{۹}+\frac{۱}{۴}-(\frac{۵}{۹}\times\frac{۱}{۴})=\frac{۵}{۹}+\frac{۱}{۴}-\frac{۵}{۳۶}=\frac{۲۰+۹-۵}{۳۶}=\frac{۲۴}{۳۶}=\frac{۲}{۳}$

تست و پاسخ 10

در فضای نمونه‌ای هم‌شانس S، پیشامدهای {۱،۲،۳،۴} و {۲،۳،۵} مستقل‌اند. احتمال پیشامد {۱،۵} کدام است؟

۱) $\frac{۱}{۲}$ ۲) $\frac{۲}{۹}$ ۳) $\frac{۱}{۶}$ ۴) $\frac{۱}{۳}$

پاسخ: گزینه ۴

خودت حل کنی بهتره چون مستقل‌اند، باید در رابطهٔ $P(A)\times P(B)=P(A\cap B)$ صدق کنند.

پاسخ تشریحی **گام اول:** فرض می‌کنیم فضای نمونه‌ای هم‌شانس S، n عضو دارد.

گام دوم: احتمال وقوع دو پیشامد داده‌شده را می‌نویسیم:

$$A=\{۱,۲,۳,۴\}\Rightarrow P(A)=\frac{n(A)}{n(S)}=\frac{۴}{n}$$

$$B=\{۲,۳,۵\}\Rightarrow P(B)=\frac{n(B)}{n(S)}=\frac{۳}{n}$$

گام سوم: پیشامد $A\cap B$ و احتمالش را حساب می‌کنیم:

$$A\cap B=\{۲,۳\}\Rightarrow P(A\cap B)=\frac{n(A\cap B)}{n(S)}=\frac{۲}{n}$$

گام چهارم: A و B مستقل‌اند، پس:

$$P(A\cap B)=P(A)\times P(B)\Rightarrow \frac{۲}{\underset{۱}{\cancel{n}}}=\frac{۴}{\underset{۱}{\cancel{n}}}\times\frac{۳}{n}\Rightarrow ۲=\frac{۱۲}{n}\Rightarrow n=۶$$

گام پنجم: احتمال وقوع پیشامد دوعضوی $C=\{۱,۵\}$ برابر است با:

$$P(C)=\frac{n(C)}{n(S)}=\frac{۲}{۶}=\frac{۱}{۳}$$

تست و پاسخ 11

کتاب‌های درسی فیزیک ۱ و۲ و ۳ و شیمی ۱ و ۲ و ۳ و فارسی ۱ و ۲ و ۳ را در کتابخانه به‌طور تصادفی کنار هم می‌چینیم. با کدام احتمال، کتاب‌های شیمی کنار هم و کتاب‌های فارسی از راست به چپ به ترتیب پایه هستند؟ (کتاب‌های فارسی لزوماً کنار هم نیستند.)

۱) $\frac{۱}{۷۲}$ ۲) $\frac{۱}{۱۲}$ ۳) $\frac{۱}{۳۶}$ ۴) $\frac{۱}{۲۴}$

پاسخ: گزینه ۱

پاسخ تشریحی **گام اول:** در کل ۹ کتاب داریم. تعداد حالات قرارگرفتن آن‌ها کنار هم برابر است با: $n(S)=۹!$

گام دوم: می‌خواهیم ۳ کتاب شیمی کنار هم باشند، پس آن‌ها را در یک بسته قرار می‌دهیم:

$\underbrace{\overset{۲!}{\uparrow}\text{۶کتاب دیگر}.\boxed{\text{ش۳،ش۲،ش۱}}}_{\text{درکل ۷ شیء داریم.}\ ۷!}$

ترتیب قرارگرفتن این ۷ شیء کنار هم $۳!\times۷!$ است.

گام سوم: شرط آخر این است که سه کتاب فارسی به ترتیب پایه از راست به چپ چیده شده باشند.

سه کتاب فارسی برای چیده‌شدن (نه لزوماً کنار هم) $۳!$ حالت دارند. از این ۶ حالت، فقط در یکی، ترتیب آن‌ها برحسب پایه‌شان از راست به چپ است:

۱) فارسی ۱ ـ فارسی ۲ـ فارسی ۳
۲) فارسی ۱ ـ فارسی ۳ـ فارسی ۲
۳) فارسی ۲ ـ فارسی ۱ـ فارسی ۳
۴) فارسی ۲ ـ فارسی ۳ـ فارسی ۱
۵) فارسی ۳ ـ فارسی ۱ـ فارسی ۲
۶) فارسی ۳ ـ فارسی ۲ ـ فارسی ۱ ⇐ حالت مطلوب

یعنی در $\frac{۱}{۶}$ یا $\frac{۱}{۳!}$ حالات، این اتفاق می‌افتد، پس تعداد حالات مطلوب برابر است با: $n(A)=\frac{۷!\times۳!}{۳!}=۷!$

گام چهارم: احتمال وقوع A برابر است با:

$$P(A)=\frac{n(A)}{n(S)}=\frac{۷!}{۹!}=\frac{۱}{۹\times ۸}=\frac{۱}{۷۲}$$

تست و پاسخ 12

کیسه‌ای شامل ۱۲ مهره از رنگ‌های قرمز، سبز، آبی و زرد با تعداد مساوی است. اگر ۳ مهره از این کیسه بیرون بیاوریم، با کدام احتمال در مهره‌های انتخابی قرمز هست یا زرد نیست؟

۱) $\frac{۳۶}{۵۵}$ ۲) $\frac{۳۷}{۵۵}$ ۳) $\frac{۳۸}{۵۵}$ ۴) $\frac{۳۹}{۵۵}$

پاسخ: گزینه ۴

پاسخ تشریحی **گام اول:** دو پیشامد تعریف می‌کنیم:

A: در مهره‌های انتخابی قرمز باشد.

B′: در مهره‌های انتخابی زرد نباشد.

در نهایت ما دنبال $P(A\cup B')$ هستیم.

گام دوم: به جای پیشامد $A\cup B'$، متممش یعنی $\underbrace{(A\cup B')'}_{A'\cap B}$ را حساب می‌کنیم:

$$\underbrace{P(A\cup B')}_{\text{خواستهٔ سؤال}}=۱-P(A'\cap B)$$

گام سوم: دنبال محاسبهٔ $P(A'\cap B)$ هستیم:

$$P(A'\cap B)=P(A'-B')=P(A')-P(A'\cap B')$$

گام چهارم:

- می‌خواهیم احتمال وقوع A' (در مهره‌های انتخابی، مهرهٔ قرمز نباشد) را حساب کنیم.

در کل ۳ مهرهٔ قرمز و ۹ مهرهٔ غیرقرمز داریم. می‌خواهیم هر سه مهره غیرقرمز باشند:

$$P(A')=\frac{n(A')}{n(S)}=\frac{\binom{۹}{۳}}{\binom{۱۲}{۳}}=\frac{\frac{۹\times ۸\times ۷}{\cancel{۳\times ۲}}}{\frac{۱۲\times ۱۱\times ۱۰}{\cancel{۳\times ۲}}}=\frac{\overset{۳}{\cancel{۹}}\times \overset{۱}{\cancel{۸}}\times ۷}{\underset{۱}{\cancel{۱۲}}\times ۱۱\times \underset{۵}{\cancel{۱۰}}}=\frac{۲۱}{۵۵}$$

- می‌خواهیم احتمال وقوع $A'\cap B'$ (در مهره‌های انتخابی، مهرهٔ قرمز و زرد نباشد) را حساب کنیم.

در کل ۶ مهرهٔ قرمز و زرد و ۶ مهرهٔ غیر از آن‌ها داریم. می‌خواهیم هر سه مهره غیرقرمز و زرد باشند:

$$P(A'\cap B')=\frac{n(A'\cap B')}{n(S)}=\frac{\binom{۶}{۳}}{\binom{۱۲}{۳}}=\frac{\frac{۶\times ۵\times ۴}{\cancel{۳\times ۲}}}{\frac{۱۲\times ۱۱\times ۱۰}{\cancel{۳\times ۲}}}=\frac{\overset{۱}{\cancel{۶}}\times ۵\times \overset{۱}{\cancel{۴}}}{\underset{۱}{\cancel{۱۲}}\times ۱۱\times \underset{۵}{\cancel{۱۰}}}=\frac{۵}{۵۵}$$

گام پنجم: گام سوم را ادامه می‌دهیم:

$$P(A'\cap B)=P(A'-B')=P(A')-P(A'\cap B')=\frac{۲۱}{۵۵}-\frac{۵}{۵۵}=\frac{۱۶}{۵۵}$$

گام ششم: گام اول را ادامه می‌دهیم:

$$P(A\cup B')=۱-P(A'\cap B)=۱-\frac{۱۶}{۵۵}=\frac{۳۹}{۵۵}$$

تست و پاسخ 13

یک پنالتی‌زن در حالت عادی هر توپ را با احتمال $\frac{۱}{۲}$ گل می‌کند، اما وقتی یک توپ گل نمی‌شود، از احتمال گل‌شدن توپ بعدی $\frac{۱}{۱۰}$ کم می‌شود. با کدام احتمال در ۳ ضربهٔ متوالی فقط یکی گل می‌شود؟

۱) ٪۳۰ ۲) ٪۳۲ ۳) ٪۳۳ ۴) ٪۳۴

پاسخ: گزینه ۴

پاسخ تشریحی **گام اول:** در حالت عادی، احتمال گل‌زدن هر پنالتی $\frac{۵}{۱۰}$ و احتمال گل‌نزدنش هم $\frac{۵}{۱۰}$ است.

برای آن‌که در سه ضربهٔ متوالی، فقط یکی گل شود، ۳ حالت داریم:

۱) اولی گل شود، ولی دومی و سومی گل نشوند:

$$\underbrace{\frac{۵}{۱۰}}_{\text{گل‌شدن اولی}} \times \overbrace{\frac{۵}{۱۰}}^{\text{گل‌نشدن دومی}} \times \left(\underbrace{\frac{۵}{۱۰}}_{\text{گل‌نشدن سومی}} + \overbrace{\frac{۱}{۱۰}}^{\text{اثر گل‌نشدن دومی روی سومی}}\right) = \frac{۱۵۰}{۱۰۰۰} = ۰/۱۵$$

۲) اولی گل نشود، دومی گل شود و سومی هم گل نشود:

$$\underbrace{\frac{۵}{۱۰}}_{\text{گل‌نشدن اولی}} \times \left(\underbrace{\frac{۵}{۱۰}}_{\text{گل‌شدن دومی}} - \overbrace{\frac{۱}{۱۰}}^{\text{اثر گل‌نشدن اولی روی دومی}}\right) \times \underbrace{\frac{۵}{۱۰}}_{\text{گل‌نشدن سومی}} = \frac{۱۰۰}{۱۰۰۰} = ۰/۱$$

۳) اولی و دومی گل نشود، ولی سومی گل شود:

$$\underbrace{\frac{۵}{۱۰}}_{\text{گل‌نشدن اولی}} \times \left(\underbrace{\frac{۵}{۱۰}}_{\text{گل‌نشدن دومی}} + \overbrace{\frac{۱}{۱۰}}^{\text{اثر گل‌نشدن اولی روی دومی}}\right) \times \left(\underbrace{\frac{۵}{۱۰}}_{\text{گل‌شدن سومی}} - \overbrace{\frac{۱}{۱۰} - \frac{۱}{۱۰}}^{\text{اثر گل‌نشدن اولی و دومی روی سوم}}\right) = \frac{۹۰}{۱۰۰۰} = ۰/۰۹$$

گام دوم: مجموع احتمال‌های گام اول برابر است با:

$$\text{احتمال} = ۰/۱۵ + ۰/۱ + ۰/۰۹ = ۰/۳۴$$

تست و پاسخ 14

در ظرفی ۴ مهرهٔ سفید و ۳ مهرهٔ سیاه داریم. ۲ مهره به تصادف و به‌طور همزمان از آن بیرون می‌آوریم و به تعداد مهره‌های سیاه خارج‌شده سکه می‌اندازیم. با کدام احتمال هم رو و هم پشت دیده می‌شوند؟

۱) $\frac{۱}{۲۸}$

۲) $\frac{۳}{۲۸}$

۳) $\frac{۲}{۲۱}$

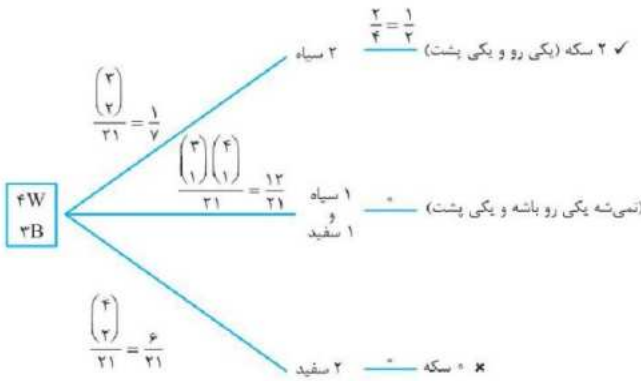
۴) $\frac{۱}{۱۴}$

پاسخ: گزینه ۴

پاسخ تشریحی **گام اول:** در کل ۷ مهره داریم و ۲تای آن‌ها را بیرون می‌آوریم:

$$\binom{۷}{۲} = \frac{۷ \times ۶}{۲} = ۲۱$$

گام دوم: تعداد مهره‌های سیاه خارج‌شده، ۰ یا ۱ یا ۲ است. از نمودار درختی استفاده می‌کنیم:



گام سوم: فقط شاخهٔ بالا مطلوب است که حاصل‌ضرب احتمال‌هایش برابر است با:

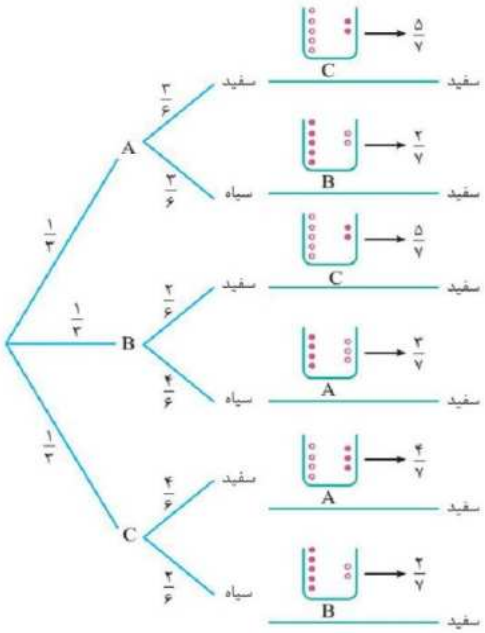
$$\frac{۱}{۷} \times \frac{۱}{۲} = \frac{۱}{۱۴}$$

درون کیسهٔ A، ۳ مهرهٔ سفید و ۳ مهرهٔ سیاه، درون کیسهٔ B، ۲ مهرهٔ سفید و ۴ مهرهٔ سیاه و درون کیسهٔ C، ۴ مهرهٔ سفید و ۲ مهرهٔ سیاه قرار دارد. یکی از کیسه‌ها را به تصادف انتخاب و مهره‌ای خارج می‌کنیم. اگر مهره سفید باشد، آن را در کیسهٔ دیگری که مهرهٔ سفید بیشتری دارد قرار داده و اگر مهره سیاه باشد، آن را در کیسهٔ دیگری که مهرهٔ سیاه بیشتری دارد، قرار می‌دهیم. دوباره مهره‌ای از کیسه‌ای که تعداد مهره‌های بیشتری دارد خارج می‌کنیم. با کدام احتمال این مهره سفید است؟

۱) $\frac{۲}{۵}$ ۲) $\frac{۱}{۲}$ ۳) $\frac{۳}{۵}$ ۴) $\frac{۳}{۷}$

پاسخ: گزینه ۲

پاسخ تشریحی **گام اول:** از نمودار درختی استفاده می‌کنیم:



گام دوم: اعداد روی هر شاخه را با هم ضرب و سپس جمع می‌کنیم:

$$\text{احتمال} = \frac{۱}{۳}\left(\frac{۳}{۶}\times\frac{۵}{۷}+\frac{۳}{۶}\times\frac{۲}{۷}+\frac{۲}{۶}\times\frac{۵}{۷}+\frac{۴}{۶}\times\frac{۳}{۷}+\frac{۴}{۶}\times\frac{۴}{۷}+\frac{۲}{۶}\times\frac{۲}{۷}\right)$$

$$=\frac{۱}{۳}\left(\frac{۱۵}{۴۲}+\frac{۶}{۴۲}+\frac{۱۰}{۴۲}+\frac{۱۲}{۴۲}+\frac{۱۶}{۴۲}+\frac{۴}{۴۲}\right)=\frac{۱}{\cancel{۳}_{۱}}\times\frac{\cancel{۶۳}^{۲۱}}{۴۲}=\frac{۲۱}{۴۲}=\frac{۱}{۲}$$

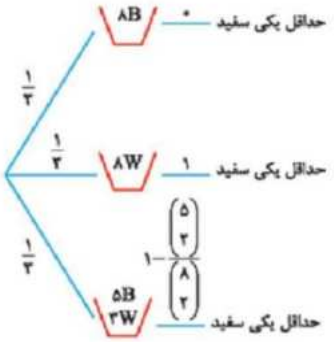
تست و پاسخ 16

در کیسهٔ اول ۸ مهرهٔ سیاه، در کیسهٔ دوم ۸ مهرهٔ سفید و در کیسهٔ سوم ۵ مهرهٔ سیاه و ۳ مهرهٔ سفید داریم. به تصادف یکی از این کیسه‌ها را انتخاب و دو مهره از آن خارج می‌کنیم. احتمال آن‌که در میان این دو مهره، مهرهٔ سفید داشته باشیم، کدام است؟

۱) $\frac{۲۳}{۴۲}$ ۲) $\frac{۱}{۲}$ ۳) $\frac{۱۹}{۴۲}$ ۴) $\frac{۱۲}{۲۱}$

پاسخ: گزینه ۱

پاسخ تشریحی **گام اول:** نمودار درختی می‌کشیم:



گام دوم: مجموع احتمال شاخهٔ دوم و سوم را حساب می‌کنیم:

$$\text{احتمال} = (\frac{۱}{۳}\times ۱) + (\frac{۱}{۳}\times(۱-\frac{\frac{۵\times \cancel{۴}^{۱}}{\cancel{۲}_{۲}}}{\frac{\cancel{۸}\times ۷}{\cancel{۲}}})) = \frac{۱}{۳}+\frac{۱}{۳}(۱-\frac{۵}{۱۴}) = \frac{۱}{۳}+\frac{۱}{۳}(\frac{۹}{۱۴}) = \frac{۱}{۳}+\frac{۳}{۱۴} = \frac{۲۳}{۴۲}$$

تست و پاسخ 17

دو تاس را با هم پرتاب می‌کنیم، اگر مجموع دو عدد روشده از ۹ بیشتر بود، یک عدد طبیعی یک رقمی و اگر از ۹ کم‌تر بود، یک عدد طبیعی دو رقمی انتخاب می‌کنیم. با کدام احتمال، عدد انتخاب‌شده اول است؟

۱) $\frac{۱۱}{۲۷}$ ۲) $\frac{۱۳۱}{۵۴۰}$ ۳) $\frac{۱}{۳}$ ۴) $\frac{۳۱}{۱۰۸}$

پاسخ: گزینه ۲

نکته مجموع اعداد ۲ تاس می‌تواند عددی از ۲ (هر ۲ تاس ۱ باشند) تا ۱۲ (هر ۲ تاس ۶ باشند) باشد.

جدول زیر تعداد اعضای پیشامد مجموع اعداد ۲ تاس را نشان می‌دهد:

مجموع اعداد دو تاس	۲	۳	۴	۵	۶	۷	۸	۹	۱۰	۱۱	۱۲
تعداد اعضای پیشامد	۱	۲	۳	۴	۵	۶	۵	۴	۳	۲	۱
قاعده برای حفظ کردن	قاعدهٔ $n-۱$: یعنی اعداد سطر بالا را باید منهای ۱ کنیم تا اعداد سطر پایین به دست آید.					از هر ۲ قاعدهٔ $n-۱$ و $n-۱۳$ جواب می‌دهد.	قاعدهٔ $n-۱۳$: یعنی ۱۳ را منهای اعداد بالا می‌کنیم تا اعداد پایینی به دست آید.				

پاسخ تشریحی **گام اول**: تعداد حالاتی که مجموع اعداد دو تاس از ۹ بیشتر است را حساب می‌کنیم:

مجموع = ۱۱

$$۳+۲+۱=۶$$

مجموع=۱۰ مجموع=۱۲

تعداد حالاتی که مجموع اعداد دو تاس از ۹ کم‌تر است را حساب می‌کنیم:

کل حالات

$$۳۶-(۶+۴)=۲۶$$

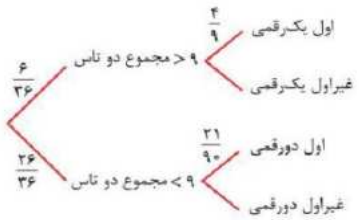
مجموع از ۹ بیشتر باشد. مجموع ۹ باشد.

گام دوم: اعداد اول دورقمی را می‌نویسیم: {۱۱,۱۳,۱۷,۱۹,۲۳,۲۹,۳۱,۳۷,۴۱,۴۳,۴۷,۵۳,۵۹,۶۱,۶۷,۷۱,۷۳,۷۹,۸۳,۸۹,۹۷}

تعداد اعداد اول دورقمی ۲۱ است.

تعداد اعداد غیراول دورقمی $۹۰-۲۱=۶۹$ است.

گام سوم: نمودار درختی می‌کشیم:



گام چهارم: شاخه‌های اول و سوم مطلوب‌اند:

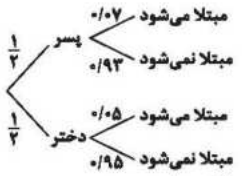
$$\text{احتمال} = \left(\frac{\overset{۱}{\cancel{۶}}}{\underset{۳}{\cancel{۳۶}}} \times \frac{\overset{۲}{\cancel{۴}}}{۹}\right) + \left(\frac{\overset{۱۳}{\cancel{۲۶}}}{\underset{۱۸}{\cancel{۳۶}}} \times \frac{\overset{۷}{\cancel{۲۱}}}{\underset{۳۰}{\cancel{۹۰}}}\right) = \frac{۲}{۲۷} + \frac{۹۱}{۵۴۰} = \frac{۴۰+۹۱}{۵۴۰} = \frac{۱۳۱}{۵۴۰}$$

آزمون‌های سراسری

گاج

www.mapedu.ir

1 **1**



$$P(\text{بیمار نمی‌شود})=\frac{1}{2}\times\frac{93}{100}+\frac{1}{2}\times\frac{95}{100}=\frac{1}{2}\times\frac{188}{100}=0/94$$

2 **1**

$$P(\text{قرمز})=\frac{1}{3}\times\frac{5}{14}+\frac{1}{3}\times 1+\frac{1}{3}\times\frac{2}{7}=\frac{5}{42}+\frac{14}{42}+\frac{4}{42}=\frac{23}{42}$$

$$P(\text{قرمز نبودن})=1-\frac{23}{42}=\frac{19}{42}$$

$$\frac{P(\text{قرمز بودن})}{P(\text{قرمز نبودن})}=\frac{\frac{23}{42}}{\frac{19}{42}}=\frac{23}{19}$$

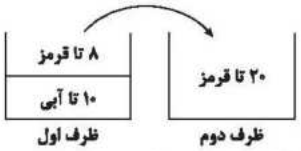
3 **1** اگر انتخاب ریاضی، فیزیک و زیست‌شناسی به ترتیب A_1، A_2 و A_3 باشد در این‌صورت:

$$P(\text{برنده شدن})=P(A_1)P(B|A_1)+P(A_2)P(B|A_2)+P(A_3)P(B|A_3)$$

$$=\frac{1}{2}\times\frac{60}{100}+\frac{1}{4}\times\frac{70}{100}+\frac{1}{4}\times\frac{80}{100}=\frac{1}{4}\left(\frac{120+70+80}{100}\right)$$

$$=\frac{1}{4}\times\frac{270}{100}=\frac{1}{4}\times\frac{27}{10}=\frac{27}{40}$$

4 **2** مهره انتخاب شده از ظرف اول یا قرمز است یا آبی. پیشامد قرمز بودن را با G نمایش می‌دهیم.



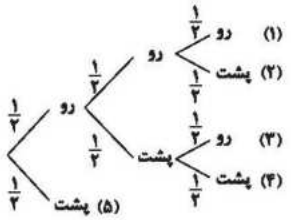
$$P(G)=\frac{8}{18}\times 1+\frac{10}{18}\times\frac{20}{21}=\frac{8\times 21+10\times 20}{18\times 21}$$

$$=\frac{4\times 21+5\times 20}{9\times 21}=\frac{184}{189}$$

5 **1** احتمال رو شدن عدد کمتر از ۳ برابر $\frac{2}{6}$ و احتمال رو شدن عدد بیشتر از ۲ برابر $\frac{4}{6}$ است.

$$P(\text{لامپ معیوب})=\frac{2}{6}\times\frac{4}{6}+\frac{4}{6}\times\frac{3}{6}=\frac{2\times 4+4\times 3}{6\times 6}=\frac{4\times 5}{6\times 6}=\frac{5}{9}$$

6 **1** احتمال مطلوب شاخه‌ای (۲)، (۳) و (۵) است.



$$P=\frac{1}{2}\times\frac{1}{2}\times\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\times\frac{1}{2}\times\frac{1}{2}+\frac{1}{2}=\frac{1}{4}+\frac{1}{2}=\frac{3}{4}$$

7 **4** احتمال انتخاب از مدرسه A، چهار برابر احتمال انتخاب از مدرسه B است. پس $P(A)=\frac{4}{5}$ و $P(B)=\frac{1}{5}$ است. پیشامد آن‌که دانش‌آموز انتخابی تجربی نباشد را T در نظر می‌گیریم.

$$P(T)=P(A)\times P(T|A)+P(B)\times P(T|B)$$

$$=\frac{4}{5}\times\frac{75}{100}+\frac{1}{5}\times\frac{20}{100}=\frac{3}{5}+\frac{1}{25}=\frac{16}{25}$$

8 **2**

$$P(A)+P(B)=1\xrightarrow{2P(A)=3P(B)}P(A)+\frac{2}{3}P(A)=1$$

$$\Rightarrow P(A)=\frac{3}{5}$$

$$P(B)=1-P(A)=1-\frac{3}{5}=\frac{2}{5}$$

$$P(\text{سفید بودن})=P(A)\times P(\text{سفید بودن}|A)+P(B)\times P(\text{سفید بودن}|B)$$

$$=\frac{3}{5}\times\frac{3}{5}+\frac{2}{5}\times\frac{2}{4}=\frac{9}{25}+\frac{1}{5}=\frac{14}{25}$$

9 **1** **روش اول:**

$$P(\text{دومی قرمز})=P(\text{اولی قرمز})\times P(\text{دومی قرمز}|\text{اولی قرمز})+P(\text{اولی سفید})\times P(\text{دومی قرمز}|\text{اولی سفید})$$

$$=\frac{1}{2}\times\frac{n-1}{2n-1}+\frac{1}{2}\times\frac{n}{2n-1}=\frac{1}{2}$$

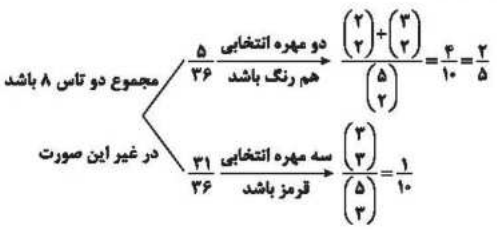
روش دوم: مهره اول را در نظر نمی‌گیریم: $P(\text{دومی قرمز})=\frac{n}{2n}=\frac{1}{2}$

10 **2** اگر مهره انتخابی اول قرمز باشد: $P_1=\frac{5}{9}\times\frac{6}{10}=\frac{1}{3}$

در صورتی‌که مهره انتخابی اول آبی باشد: $P_2=\frac{4}{9}\times\frac{5}{10}=\frac{2}{9}$

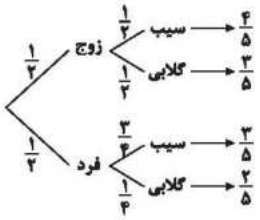
احتمال کل برابر است با: $P=P_1+P_2=\frac{1}{3}+\frac{2}{9}=\frac{5}{9}$

11 **4** تعداد حالاتی که در پرتاب دو تاس، مجموع اعداد رو شده ۸ باشد برابر ۵ تاست.



$$P=\frac{5}{36}\times\frac{2}{5}+\frac{31}{36}\times\frac{1}{10}=\frac{20+31}{360}=\frac{51}{360}=\frac{17}{120}$$

12 **2**



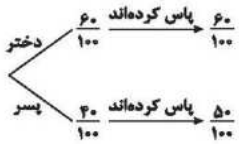
$$P=\frac{1}{2}\times\frac{1}{2}\times\frac{4}{5}+\frac{1}{2}\times\frac{1}{2}\times\frac{3}{5}+\frac{1}{2}\times\frac{3}{4}\times\frac{3}{5}+\frac{1}{2}\times\frac{1}{4}\times\frac{2}{5}$$

$$=\frac{4}{20}+\frac{3}{20}+\frac{9}{40}+\frac{2}{40}=\frac{7}{20}+\frac{11}{40}=\frac{25}{40}=\frac{5}{8}$$

13 (۱) نمودار درختی به صورت زیر تنظیم می‌کنیم.

$$P(A)=\frac{1}{3}\times 0+\frac{1}{3}\times 0+\frac{1}{3}\times\frac{\binom{4}{2}\binom{2}{1}}{\binom{6}{3}}=\frac{1}{3}\times\frac{6\times 2}{20}=\frac{1}{5}$$

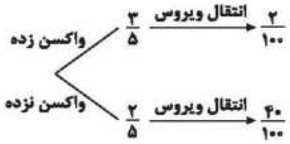
14 (۳)



$$P=\frac{60}{100}\times\frac{60}{100}+\frac{40}{100}\times\frac{50}{100}=\frac{36}{100}+\frac{20}{100}=\frac{56}{100}$$

پس ۵۶ درصد دانشجویان تمام واحدهای درسی خود را پاس کرده‌اند.

15 (۲)



$$P=\frac{3}{5}\times\frac{2}{100}+\frac{2}{5}\times\frac{40}{100}=\frac{6+80}{5\times 100}=\frac{86}{5\times 100}=\frac{43}{250}=0/172$$

16 (۴) پیشامدها را می‌نویسیم:

$A=\{6\}\qquad B=\{1,2\}\qquad C=\{4,5\}$

$A'=\{1,2,3,4,5\}\quad B'=\{3,4,5,6\}\quad C'=\{1,2,3,6\}$

دو پیشامد زمانی ناسازگارند که اشتراک آن‌ها تهی باشد، در بین گزینه‌ها $B\cap C=\varnothing$ است.

17 (۱) از ۳ مهره انتخابی دو مهره قرمز، یک مهره آبی یا هر سه مهره قرمز است.

$$P=\frac{\binom{4}{2}\binom{3}{1}+\binom{4}{3}}{\binom{7}{3}}=\frac{6\times 3+4}{\frac{7\times 6\times 5}{6}}=\frac{22}{35}$$

18 (۲)

$$6\times 2^n=48\Rightarrow 2^n=8\Rightarrow n=3\Rightarrow n+1=4\Rightarrow 2^{n+1}=2^4=16$$

19 (۲) مجموع اعداد رو شده که مضرب ۳ باشند را در جدول زیر علامت زده‌ایم.

	۱	۲	۳	۴	۵	۶
۱		✓			✓	
۲	✓			✓		
۳			✓			✓
۴		✓			✓	
۵	✓			✓		
۶			✓			✓

$$P(A)=\frac{12}{36}=\frac{1}{3}$$

20 (۳) اگر برادرها در ابتدا و انتهای ردیف قرار گیرند:

B_1 ——— B_2

$$P(A)=\frac{4!\times 2!}{6!}=\frac{2}{6\times 5}=\frac{1}{15}$$

21 (۲) باید دو تا دختر و دو تا پسر باشند.

$$P(A)=\frac{\binom{4}{2}}{2^4}=\frac{6}{16}=\frac{3}{8}$$

22 (۴)

$$P(A\cup B)=P(A)+P(B)\Rightarrow 3P(B)=P(A)+P(B)$$

$$\Rightarrow 2P(B)=P(A)\Rightarrow\frac{P(B)}{P(A)}=\frac{1}{2}$$

23 (۲)

$$P(A)=\frac{4\times 3\times 2\times 1\times 2}{5!}=\frac{2}{5}$$

24 (۱) در این معادله $\Delta=b^2-16a$ است. در خانه‌های میانی جدول Δ را محاسبه کرده‌ایم.

b \ a	۱	۲	۳	۴
۱	−۱۵	−۳۱	−۴۷	−۶۳
۲	−۱۲	−۲۸	−۴۴	−۶۰
۳	−۷	−۲۳	−۳۹	−۵۵
۴	۰	−۱۶	−۳۲	−۴۸

به جدول توجه کنید. در ۱۵حالت دلتا منفی است و در ۳ حالت آن دلتا بیشتر از ۱۶− است.

$$P(A)=\frac{3}{15}=\frac{1}{5}$$

25 (۲)

$A=\{(1,1),(2,2),(3,3),(4,4),(5,5),(6,6)\}$

$B=\{(2,2),(2,3),(2,5),(3,2),(3,3),(3,5),(5,2),(5,3),(5,5)\}$

$A-B=\{(1,1),(4,4),(6,6)\}\Rightarrow n(A-B)=3$

26 (۱) تاس‌ها مستقل از هم عمل می‌کنند.

$$P(A\cap B)=P(A)\times P(B)=\frac{1}{2}\times\frac{1}{2}=\frac{1}{4}$$

27 (۲) قهرمانی دو تیم مستقل از هم هستند.

$P(A\cup B)=P(A)+P(B)-P(A)\times P(B)$

$=0/4+0/7-(0/4\times 0/7)=1/1-0/28=0/82$

28 (۳) معنی این سؤال این است که در سه پرتاب اول «پشت» و در پرتاب چهارم «رو» بیاید.

$$P=\frac{1}{2}\times\frac{1}{2}\times\frac{1}{2}\times\frac{1}{2}=\frac{1}{16}$$

29 (۱) احتمال قبولی سارینا و ساینا را به ترتیب $P(A)$ و $P(B)$ می‌نامیم.

$P(A\cup B)=P(A)+P(B)-P(A)P(B)$

$$\xrightarrow{P(A)=2P(B)=x} 0/88 = x+\frac{x}{2}-x\times\frac{x}{2} \Rightarrow 0/88=\frac{3x}{2}-\frac{x^2}{2}$$

$$\xrightarrow{\times 2} x^2-3x+1/76=0 \Rightarrow x=\frac{3\pm\sqrt{9-4\times 1/76}}{2}$$

$$\Rightarrow x=\frac{3\pm\sqrt{1/96}}{2}=\frac{3\pm 1/4}{2} \xrightarrow{0<x<1} x=0/8$$

30 ۳ فضای نمونه محدودشده را در جدول زیر با علامت ○ و فضای مطلوب را با علامت ✓ مشخص کرده‌ایم.

	۱	۲	۳	۴	۵	۶
۱	○	✓	○	○	✓	○
۲	✓		○		○	
۳	○	○	✓	○	○	✓
۴	○		○		✓	
۵	✓	○	○	✓	○	○
۶	○		✓		○	

$$P(A)=\frac{9}{36-9}=\frac{9}{27}=\frac{1}{3}$$

31 ۱ اگر مهرهٔ اول آبی باشد. $P_1=\frac{3}{7}\times\frac{3}{8}=\frac{9}{56}$

در صورتی که مهرهٔ اول قرمز باشد. $P_2=\frac{4}{7}\times\frac{4}{8}=\frac{2}{7}$

احتمال مطلوب برابر است با: $P=P_1+P_2=\frac{9}{56}+\frac{2}{7}=\frac{9+16}{56}=\frac{25}{56}$

32 ۴ $\frac{10}{22}$ لامپ‌ها از جعبه اول و $\frac{12}{22}$ لامپ‌ها از جعبهٔ دوم انتخاب می‌شوند.

$$P=\frac{10}{22}\times\frac{4}{30}+\frac{12}{22}\times\frac{5}{20}=\frac{5}{11}\times\frac{2}{15}+\frac{6}{11}\times\frac{1}{4}=\frac{2}{33}+\frac{3}{22}=\frac{4+9}{66}=\frac{13}{66}$$

۳۳ ۳ اگر مهرهٔ اول زرد و مهره دوم زرد باشد:

$$P_1=\frac{4}{7}\times\frac{6}{9}=\frac{4}{7}\times\frac{2}{3}=\frac{8}{21}$$

اگر مهرهٔ اول آبی و مهره دوم زرد باشد:

$$P_2=\frac{3}{7}\times\frac{4}{9}=\frac{4}{21}$$

$$P=P_1+P_2=\frac{8}{21}+\frac{4}{21}=\frac{12}{21}=\frac{4}{7}$$

۳۴ ۱

$$P=\frac{1}{2}\times\frac{2}{10}+\frac{1}{2}\times\frac{4}{20}=\frac{1}{5}$$

۳۵ ۳

سه مهره از A
دو مهره از B

کیسه C

$$P=\underset{\text{قرمز از A}}{\frac{3}{5}\times\frac{5}{10}}+\underset{\text{قرمز از B}}{\frac{2}{5}\times\frac{10}{10}}=\frac{3}{5}\times\frac{1}{2}+\frac{2}{5}=\frac{7}{10}$$

۳۶ ۴

$$P(\text{جعبه B}\mid\text{قرمز باشد})=\frac{P(\text{قرمز و از جعبهٔ B})}{P(\text{قرمز})}=\frac{\frac{1}{2}\times\frac{2}{5}}{\frac{1}{2}\times\frac{1}{4}+\frac{1}{2}\times\frac{2}{5}}$$

$$=\frac{\frac{1}{5}}{\frac{1}{8}+\frac{1}{5}}=\frac{8}{5+8}=\frac{8}{13}$$

۳۷ ۱

$$P=\frac{43}{85}\times\frac{90}{100}+\frac{42}{85}\times\frac{80}{100}=\frac{43\times9+42\times8}{850}=\frac{723}{850}$$

۳۸ ۲ چون تعداد مهره‌های هر سه ظرف با هم برابرند، بنابراین احتمال انتخاب هر ظرف $\frac{1}{3}$ است.

$$P(\text{آبی})=\frac{1}{3}\times\frac{2}{5}+\frac{1}{3}\times\frac{1}{5}+\frac{1}{3}\times0=\frac{1}{5}$$

۳۹ ۳ احتمال تولد فرزند پسر را x فرض می‌کنیم:

$$x+2x=1\Rightarrow x=\frac{1}{3}$$

بنابراین احتمال تولد فرزند پسر $\frac{1}{3}$ و فرزند دختر $\frac{2}{3}$ است.

$$P(\text{مبتلا})=\frac{1}{3}\times0/2+\frac{2}{3}\times0/1=\frac{2}{30}+\frac{2}{30}=\frac{2}{15}$$

۴۰ ۴ اگر تعداد مهره‌های آبی را n فرض کنیم:

$$\frac{1}{2}\times\frac{4}{8}+\frac{1}{2}\times\frac{3}{n+3}=\frac{1}{2}\Rightarrow n=3$$

بنابراین تعداد مهره‌های ظرف B برابر ۶تا است.

۴۱ ۴ P(A) : احتمال مجموع کم‌تر از ۵ در سه تاس:

$$A=\{(1,1,1),(1,1,2),(1,2,1),(2,1,1)\}$$

$$P(A)=\frac{4}{6\times6\times6}=\frac{1}{54}$$

P(B) : احتمال مجموع کم‌تر از ۵ در دو تاس:

$$B=\{(1,1),(1,2),(1,3),(2,1),(2,2),(3,1)\}$$

$$P(B)=\frac{6}{6\times6}=\frac{1}{6}$$

احتمال مطلوب برابر است با:

$$P(\text{مجموع کم‌تر از ۵})=\frac{1}{2}\times\frac{1}{54}+\frac{1}{2}\times\frac{1}{6}=\frac{1+9}{2\times54}=\frac{5}{54}$$

۴۲ ۲ چون رنگ مهرهٔ اول را نمی‌دانیم بنابراین در محاسبه احتمال تأثیری ندارد.

$$P(A)=\frac{20}{50}=\frac{2}{5}$$

۴۳ ۱

$$P(\text{باسواد})=\frac{60}{100}\times\frac{70}{100}+\frac{40}{100}\times\frac{30}{100}=0/54$$

۴۴ ۲ احتمال روشدن عدد زوج $\frac{1}{2}$ و احتمال رونشدن آن هم $\frac{1}{2}$ است، پس برای آن‌که حداکثر در پرتاب چهارم عدد زوج ظاهر شود، چهار حالت رخ می‌دهد:

حالت اول: در پرتاب اول عدد زوج ظاهر شود. $P_1=\frac{1}{2}$

حالت دوم: در پرتاب دوم عدد زوج ظاهر شود. $P_2=\frac{1}{2}\times\frac{1}{2}=\frac{1}{4}$

حالت سوم: در پرتاب سوم عدد زوج ظاهر شود. $P_3=\frac{1}{2}\times\frac{1}{2}\times\frac{1}{2}=\frac{1}{8}$

حالت چهارم: در پرتاب چهارم عدد زوج ظاهر شود. $P_4=\frac{1}{2}\times\frac{1}{2}\times\frac{1}{2}\times\frac{1}{2}=\frac{1}{16}$

$$P=P_1+P_2+P_3+P_4=\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{8}+\frac{1}{16}=\frac{8+4+2+1}{16}=\frac{15}{16}$$

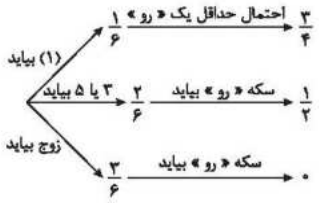
۴۵ ۳ احتمال روشدن عدد اول $\frac{1}{2}$ و احتمال رونشدن آن نیز $\frac{1}{2}$ است.

$$P=\frac{1}{2}\times1+\frac{1}{2}\times\frac{1}{5}=\frac{3}{5}$$

۴۶ ۴ احتمال انتخاب ریاضی، فیزیک و زیست به ترتیب $\frac{1}{4}$ ، $\frac{1}{4}$ و $\frac{1}{2}$ است.

$$P(\text{برنده شدن})=\frac{1}{4}\times\frac{80}{100}+\frac{1}{4}\times\frac{60}{100}+\frac{1}{2}\times\frac{50}{100}=\frac{20+15+25}{100}=0/6$$

۴۷ ۴



$$P=\frac{1}{6}\times\frac{3}{4}+\frac{2}{6}\times\frac{1}{2}=\frac{1}{8}+\frac{1}{6}=\frac{3+4}{24}=\frac{7}{24}$$

۴۸ (۱) تعداد اعداد فرد ۳ و تعداد اعداد زوج ۲ است. پس عدد مورد نظر باید شروع فرد داشته باشد.

$$P(A)=\frac{3!\times 2!}{5!}=\frac{1}{10}$$

۴۹ (۲) اگر هر دو عدد فرد رو شود، احتمال آن برابر است با:

$$P_1=\frac{3\times 3}{6\times 6}=\frac{1}{4}$$

اگر حداقل یک فرد رو شود:

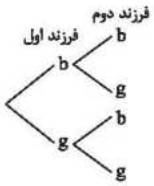
$$P_2=1-\frac{1}{4}=\frac{3}{4}$$

$$\frac{P_1}{P_2}=\frac{1}{3}$$

۵۰ (۳) فضای نمونه‌ای $S=\{10, 11, \dots, 99\}$ است. تعداد عضوهای فضای نمونه‌ای ۹۰تا و از هر سه عضو یکی از آن‌ها بر ۳ بخش‌پذیر است. بنابراین:

$$P(A)=\frac{1}{3}$$

۵۱ (۲) فضای نمونه‌ای را می‌نویسیم:



$$A=\{gb, bg\}\Rightarrow P(A)=\frac{2}{4}=\frac{1}{2}$$

۵۲ (۲) از بین حروف کلمهٔ descartes دو حرف e و دو حرف s تکرار شده است. پس احتمال آن‌که دو حرف s کنار هم باشد (deecart $\boxed{ss}$) برابر است با:

$$P(A)=\frac{\frac{8!}{2!}}{\frac{9!}{2!2!}}=\frac{2}{9}$$

۵۳ (۱) اگر این دو نفر را یک نفر حساب کنیم، آن‌گاه:

$$P(A)=\frac{5!\times 2!}{6!}=\frac{1}{3}$$

۵۴ (۴)

$$P=\frac{\binom{3}{2}+\binom{4}{2}}{\binom{7}{2}}=\frac{3+6}{21}=\frac{9}{21}=\frac{3}{7}$$

۵۵ (۲) سه تا عدد زوج و سه تا عدد فرد موجود است، قرار است چهار رقم انتخاب کنیم، حداقل دو تا زوج باشد.

$$P=\frac{\binom{3}{2}\binom{3}{2}+\binom{3}{3}\binom{3}{1}}{\binom{6}{4}}=\frac{3\times 3+1\times 3}{15}=\frac{12}{15}=\frac{4}{5}$$

۵۶ (۳) ارقام زوج طبیعی عبارتند از $\{2, 4, 6, 8\}$ و تعداد سه رقمی‌هایی که با این ارقام می‌توان ساخت برابر است با:

$$n(S)=4\times 3\times 2=24$$

تعداد اعداد سه رقمی کم‌تر از ۳۱۲ برابر است با: $n(A)=1\times 3\times 2=6$

بنابراین:

$$P(A)=\frac{n(A)}{n(S)}=\frac{6}{24}=\frac{1}{4}$$

۵۷ (۲) احتمال مطلوب این است که رقم تاس اول کوچک‌تر یا مساوی رقم تاس دوم باشد. از ۳۶ عضو فضای نمونه‌ای در ۶ حالت عدد دو تاس برابرند و در ۱۵ حالت عدد تاس اول و در ۱۵ حالت دیگر عدد تاس دوم بزرگ‌تر است. پس احتمال مطلوب برابر است با:

$$P=\frac{15+6}{36}=\frac{21}{36}=\frac{7}{12}$$

۵۸ (۱) در این معادله $\Delta=b^2-4a$ است که در جدول زیر Δها را ببینید:

b↓ \ a→	۱	۲	۳	۴	۵
۱	−۳	−۷	−۱۱	−۱۵	−۱۹
۲	۰	−۴	−۸	−۱۲	−۱۶
۳	۵	۱	−۳	−۷	−۱۱
۴	۱۲	۸	۴	۰	−۴
۵	۲۱	۱۷	۱۳	۹	۵

برای داشتن ریشهٔ حقیقی باید $\Delta\geq 0$ باشد، پس فضای نمونه‌ای محدود شده شامل ۱۲ حالت است که دو حالت (۴ , ۴) و (۵ , ۵) فضای مطلوب ما است.

$$P(A)=\frac{2}{12}=\frac{1}{6}$$

۵۹ (۱) چون A و B مستقل‌اند، پس A و B' نیز مستقل خواهند بود.

$$\frac{P(A\cap B)}{P(A\cap B')}=\frac{1}{5}\Rightarrow\frac{P(A)P(B)}{P(A)P(B')}=\frac{1}{5}$$

$$\Rightarrow\frac{P(B)}{1-P(B)}=\frac{1}{5}\Rightarrow 5P(B)=1-P(B)\Rightarrow P(B)=\frac{1}{6}$$

$$P(A\cap B)=P(A)P(B)\Rightarrow\frac{1}{6}=P(A)\times\frac{1}{6}\Rightarrow P(A)=1$$

۶۰ (۱) تولد فرزندان مستقل‌اند. بنابراین احتمال آن‌که فرزند چهارم دختر باشد، $\frac{1}{2}$ است.

۶۱ (۴) فضای نمونه‌ای کاهش یافته ۷ عضو دارد، زیرا حالت سه پسری حذف می‌شود. حال قرار است که هر سه فرزند دختر باشند که فقط یک حالت دارد. بنابراین احتمال مطلوب $\frac{1}{7}$ است.

۶۲ (۱) با فرض $P(A)=x$ و $P(B)=y$ در این صورت:

$$2x^2+2y^2=5xy\Rightarrow 2x^2-5xy+2y^2=0$$

$$\xrightarrow{+y^2}2\left(\frac{x}{y}\right)^2-5\left(\frac{x}{y}\right)+2=0\Rightarrow\begin{cases}\frac{x}{y}=2\\ \frac{x}{y}=\frac{1}{2}\end{cases}$$

$$\frac{P(A|B)}{P(B|A)}=\frac{\frac{P(A\cap B)}{P(B)}}{\frac{P(A\cap B)}{P(A)}}=\frac{P(A)}{P(B)}=\frac{x}{y}=2 \text{ یا } \frac{1}{2}$$

۶۳ (۲)

$$P(\text{هر سه قرمز})=\frac{5}{11}\times\frac{4}{10}\times\frac{3}{9}=\frac{5}{11}\times\frac{2}{5}\times\frac{1}{3}=\frac{2}{33}$$

۶۴ (۲)

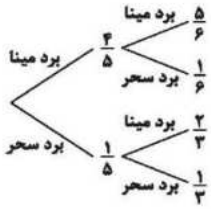
$$P(A)=\frac{۴}{۹}\times\frac{۵}{۸}=\frac{۵}{۱۸}$$

۶۵ (۴)

$$P(\text{قرمز})=\frac{۴}{۱۴}\times\frac{۱۳}{۱۶}+\frac{۱۰}{۱۴}\times\frac{۹}{۱۶}=\frac{۲۶+۴۵}{۱۴\times۸}$$

$$=\frac{۷۱}{۱۴\times۸}=\frac{۷۱}{۱۱۲}$$

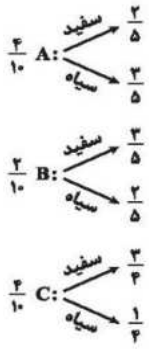
۶۶ (۱)



$$P(\text{برد حداقل یک بازی}|\text{برد هر دو بازی})=\frac{P(\text{برد هر دو بازی})}{۱-P(\text{باخت هر دو بازی})}$$

$$=\frac{\frac{۴}{۵}\times\frac{۵}{۶}}{۱-\frac{۱}{}}=\frac{\frac{۲}{۳}}{\frac{۱۴}{}}=\frac{۲}{۳}\times\frac{۱۵}{۱۴}=\frac{۵}{۷}$$

۶۷ (۳) جعبه C دارای ۴ مهره است که اگر ۴ مهره از A و ۲ مهره از B داخل آن قرار دهیم، ۱۰ مهره داخل آن وجود خواهد داشت.



$$P(\text{سفید})=\frac{۴}{۱۰}\times\frac{۲}{۵}+\frac{۲}{۱۰}\times\frac{۳}{۵}+\frac{۴}{۱۰}\times\frac{۳}{۴}$$

$$=۰/۱۶+۰/۱۲+۰/۳=۰/۵۸$$

گزینه دو

مؤسسه آموزشی فرهنگی

1 - پاسخ: گزینهٔ ۲ ▲ مشخصات سؤال: * ساده * صفحهٔ ۱۴۷ ریاضی ۲

نکته: مستقل بودن پیشامد A از پیشامد B معادل است با اینکه: $P(A\cap B)=P(A)\cdot P(B)$

نکته: رابطهٔ محاسبهٔ احتمال اجتماع یا اشتراک دو پیشامد A و B: $P(A\cup B)=P(A)+P(B)-P(A\cap B)$

نکته: اگر دو پیشامد A و B مستقل باشند، آنگاه جفت پیشامدهای A و B'، A' و B و نیز A' و B' مستقل‌اند.

راه‌حل اول:

دو پیشامد A و B مستقل هستند، پس دو پیشامد A' و B' نیز مستقل از یکدیگر هستند و داریم:

$$P(A'\cup B')=P(A')+P(B')-P(A'\cap B')=P(A')+P(B')-P(A')\cdot P(B')$$
$$=(1-P(A))+(1-P(B))-(1-P(A))(1-P(B))=0/75+0/4-0/75\times 0/4=1/15-0/3=0/85$$

راه‌حل دوم:

با توجه به قانون $A'\cup B'=(A\cap B)'$ در مجموعه‌ها داریم:

$$P(A'\cup B')=P(A\cap B)'=1-P(A\cap B)=1-(P(A)\times P(B))=1-0/25\times 0/6=1-\frac{1}{4}\times\frac{3}{5}=1-\frac{3}{20}=\frac{17}{20}=0/85$$

2 - پاسخ: گزینهٔ ۲ ▲ مشخصات سؤال: * ساده * صفحهٔ ۱۴۶ ریاضی ۱

نکته: رابطهٔ محاسبهٔ احتمال وقوع یک پیشامد: $P(A)=\frac{n(A)}{n(S)}=\frac{\text{تعداد حالت‌های مطلوب}}{\text{تعداد همهٔ حالت‌های ممکن}}$

برای آنکه مجموع اعداد روشده برابر «یک» شود دو حالت وجود دارد: حالت اول اینکه مکعب اول «یک» و مکعب دوم «صفر» بیاید و حالت دوم اینکه مکعب اول «۲» و مکعب دوم «۱-» بیاید.

بنابراین احتمال خواسته‌شده برابر است با: $P(A)=\frac{3\times 3+3\times 3}{6\times 6}=\frac{9+9}{36}=\frac{18}{36}=\frac{1}{2}$

3 - پاسخ: گزینهٔ ۳ ▲ مشخصات سؤال: متوسط * صفحهٔ ۱۴۹ ریاضی ۲

نکته: مستقل بودن A از B معادل است با اینکه: $P(A\cap B)=P(A)\cdot P(B)$

نکته (پیشامدهای ناسازگار): دو پیشامد A و B را ناسازگار می‌گوییم، هرگاه A و B با هم رخ ندهند؛ یعنی: $A\cap B=\varnothing$

فضای نمونه‌ای آزمایش پرتاب دو تاس $6\times 6=36$ عضو دارد.

پیشامد A یعنی برابری مجموع دو تاس با ۵ به‌صورت زیر است:

$$A=\{(1,4),(2,3),(3,2),(4,1)\}$$

پیشامد B یعنی زوج بودن هر دو تاس به‌صورت زیر است:

$$B=\{(2,2),(2,4),(2,6),(4,2),(4,4),(4,6),(6,2),(6,4),(6,6)\}$$

اشتراک این دو پیشامد تهی است، پس این دو پیشامد ناسازگار هستند.

همچنین احتمال این پیشامدها به‌صورت زیر است:

$$P(A)=\frac{4}{36}\ ,\ P(B)=\frac{9}{36}\ ,\ P(A\cap B)=0$$

پس $P(A\cap B)\neq P(A)\times P(B)$، در نتیجه دو پیشامد A و B مستقل نیستند.

4 - پاسخ: گزینهٔ ۴ ▲ مشخصات سؤال: * متوسط * صفحهٔ ۱۴۹ ریاضی ۲

نکته: مستقل بودن پیشامد A از پیشامد B معادل است با اینکه: $P(A\cap B)=P(A)\cdot P(B)$

اگر A را پیشامد «بیشتر بودن تعداد پسرها از دخترها» در نظر بگیریم، داریم:

$$A=\{(\text{پ،پ،پ}),(\text{پ،پ،د}),(\text{پ،د،پ}),(\text{د،پ،پ})\}$$

و از آنجایی که فضای نمونهٔ این آزمایش $2^3=8$ عضو دارد، داریم: $P(A)=\frac{4}{2^3}=\frac{4}{8}=\frac{1}{2}$

اکنون به بررسی پیشامدهای گفته‌شده در هرکدام از گزینه‌ها می‌پردازیم:

گزینهٔ ۱: B: حداکثر یکی از فرزندان پسر باشد: $B=\{(\text{د،د،د}),(\text{پ،د،د}),(\text{د،پ،د}),(\text{د،د،پ})\}\Rightarrow P(B)=\frac{4}{8}=\frac{1}{2}$

$A\cap B=\varnothing\Rightarrow P(A\cap B)=0$

از آنجایی که $P(A\cap B)\neq P(A)\times P(B)$، دو پیشامد A و B مستقل نیستند.

گزینهٔ ۲: C: حداکثر دو تا از فرزندان پسر باشند:

$$C=\{(\text{د،د،د}),(\text{پ،د،د}),(\text{د،پ،د}),(\text{د،د،پ}),(\text{د،پ،پ}),(\text{پ،د،پ}),(\text{پ،پ،د})\}\Rightarrow P(C)=\frac{7}{8}$$

$$A\cap C=\{(\text{پ،پ،د}),(\text{پ،د،پ}),(\text{د،پ،پ})\}\Rightarrow P(A\cap C)=\frac{3}{8}$$

از آنجایی که $P(A\cap C)\neq P(A)\times P(C)$، دو پیشامد A و C مستقل نیستند.

گزینهٔ ۳: D: فرزندان اول و دوم خانواده دختر باشند:

$$D=\{(د،د،د),(پ،د،د)\} \Rightarrow P(D)=\frac{۲}{۸}=\frac{۱}{۴}$$

$$A\cap D=\varnothing \Rightarrow P(A\cap D)=۰$$

از آنجایی که $P(A\cap D)\neq P(A)\times P(D)$، دو پیشامد A و D مستقل نیستند.

گزینهٔ ۴: E: فرزند اول و دوم خانواده هم‌جنس باشند:

$$E=\{(د،د،د),(پ،د،د),(د،پ،پ),(پ،پ،پ)\} \Rightarrow P(E)=\frac{۴}{۸}=\frac{۱}{۲}$$

$$A\cap E=\{(د،پ،پ),(پ،پ،پ)\} \Rightarrow P(A\cap E)=\frac{۲}{۸}=\frac{۱}{۴}$$

از آنجایی که $P(A\cap E)=P(A)\times P(E)$، دو پیشامد A و E مستقل هستند.

بنابراین گزینهٔ ۴ پاسخ است.

5 - پاسخ: گزینهٔ ۱ ▲ مشخصات سؤال: * متوسط * صفحهٔ ۱۴۶ ریاضی ۲

نکته: $P(A\mid B)=\frac{P(A\cap B)}{P(B)}$

پیشامد «برد تیم ملی والیبال ایران» را A و پیشامد «برد دست اول بازی توسط ایران» را B می‌نامیم. با توجه به داده‌های سؤال $P(A)=۰/۵۶$ و $P(A\mid B)=۰/۷$ و $P(B)=۰/۴$. همچنین احتمال خواسته‌شده برابر $P(A\cap B')$ است.

$$P(A\mid B)=۰/۷ \Rightarrow \frac{P(A\cap B)}{P(B)}=۰/۷ \Rightarrow P(A\cap B)=۰/۷\times ۰/۴ \Rightarrow P(A\cap B)=۰/۲۸$$

بنابراین احتمال خواسته‌شده برابر است با: $P(A\cap B')=P(A)-P(A\cap B)=۰/۵۶-۰/۲۸=۰/۲۸$

6 - پاسخ: گزینهٔ ۳ ▲ مشخصات سؤال: * دشوار * صفحهٔ ۱۴۵ ریاضی ۲

نکته: منظور از «احتمال A به شرط B» که آن را با $P(A\mid B)$ نمایش می‌دهیم، احتمال وقوع پیشامد A است، به‌شرط آنکه بدانیم پیشامد B رخ داده است.

حالت‌های مختلف اینکه مجموع اعداد روی سه مهره بیرون آمده برابر ۶ شود به‌صورت زیر است:

حالت اول یکی از مهره‌ها ۱، دیگری ۲ و سومی ۳ بیاید. تعداد این حالت برابر است با: $۳\times ۳\times ۳=۲۷$

حالت دوم: هر سه مهره عدد ۲ بیاید، تعداد این حالت برابر است با: $۱\times ۱\times ۱=۱$

بنابراین در کل، در ۲۸ حالت، مجموع سه مهرهٔ خارج‌شده برابر ۶ است.

از طرفی تعداد حالات مطلوب، یعنی همرنگ بودن سه مهرهٔ خارج‌شده (با توجه به اینکه حتماً مجموع آن‌ها ۶ می‌شود.) برابر $۱+۱+۱=۳$ است، پس احتمال خواسته‌شده برابر $\frac{۳}{۲۸}$ است.

7 - پاسخ: گزینهٔ ۴ ▲ مشخصات سؤال: دشوار * ریاضی ۱ (فصل ۷، درس ۱)

تعداد اعضای فضای نمونه‌ای برابر تعداد حالت‌های انتخاب ۲ لنگه از میان ۱۲ لنگه است، پس می‌توان نوشت:

$$n(S)=\binom{۱۲}{۲}=\frac{۱۲!}{۱۰!۲!}=\frac{۱۲\times ۱۱}{۲}=۶۶$$

پیشامد تصادفی آن است که این دو لنگه جفت یکدیگر باشند. یعنی باید یکی از ۶ جفت جوراب باشند، پس تعداد اعضای آن برابر است با:

$$n(A)=\binom{۶}{۱}=۶$$

پس احتمال موردنظر برابر است با: $P(A)=\frac{۶}{۶۶}=\frac{۱}{۱۱}$

8 - پاسخ: گزینهٔ ۲ ▲ مشخصات سؤال: متوسط * ریاضی ۲ (فصل ۷، درس ۱)

نکته: $P(A\cup B)=P(A)+P(B)-P(A\cap B)$

نکته: اگر دو پیشامد A و B مستقل از یکدیگر باشند، داریم: $P(A\cap B)=P(A)\cdot P(B)$ و $P(B\mid A)=P(B)$ و $P(A\mid B)=P(A)$

با توجه به نکتهٔ بالا از شرایط داده شده در سؤال می‌توان فهمید: $P(A)=\frac{۱}{۳}$ و $P(B)=\frac{۱}{۴}$

اکنون می‌توان نوشت:

$$P(A\cup B)=P(A)+P(B)-P(A\cap B)=\frac{۱}{۳}+\frac{۱}{۴}-\frac{۱}{۳}\times\frac{۱}{۴}=\frac{۴+۳-۱}{۱۲}=\frac{۱}{۲}$$

9 - پاسخ: گزینهٔ ۳ ▲ مشخصات سؤال: دشوار * ریاضی ۱ (فصل ۷، درس ۱)

نکته: اگر A پیشامدی از فضای نمونهٔ S باشد، احتمال رخداد پیشامد A برابر $P(A)=\frac{n(A)}{n(S)}$ است.

نکته: تعداد انتخاب r شی از n شی متمایز (بدون ترتیب) از رابطهٔ روبه‌رو به‌دست می‌آید: $C(n,r)=\binom{n}{r}=\frac{n!}{r!(n-r)!}$

فرض کنیم تعداد مهره‌های قرمز برابر n باشد، داریم:

۴ آبی
n قرمز

$$n(S)=\binom{n+4}{2}=\frac{(n+4)(n+3)}{2}=\frac{n^2+7n+12}{2}$$

حداقل یکی از مهره‌ها آبی باشد : $n(A)=\binom{4}{1}\binom{n}{1}+\binom{4}{2}=4n+6$

$$P(A)=\frac{4n+6}{\frac{n^2+7n+12}{2}}\Rightarrow P(A)=\frac{2(4n+6)}{n^2+7n+12}=\frac{6}{7}\Rightarrow\frac{4n+6}{n^2+7n+12}=\frac{3}{7}\Rightarrow 3n^2+21n+36=28n+42$$

$$\Rightarrow 3n^2-7n-6=0\Rightarrow(n-3)(3n+2)=0\xrightarrow{n>0}n=3$$

بنابراین احتمال آبی بودن مهرهٔ انتخابی برابر است با: $\frac{\binom{4}{1}}{\binom{7}{1}}=\frac{4}{7}$

10 - پاسخ: گزینهٔ ۴ ▲ مشخصات سؤال: دشوار * ریاضی ۱ (فصل ۷، درس ۱)

احتمال خارج شدن مهرهٔ سفید از جعبهٔ A برابر $P(C)=\frac{3}{5}$. همچنین احتمال خارج شدن مهرهٔ قرمز از جعبهٔ B برابر $P(D)=\frac{4}{n+4}$ است. با توجه به فرض سؤال داریم:

$$P(C)-P(D)=\frac{1}{5}\Rightarrow\frac{3}{5}-\frac{4}{n+4}=\frac{1}{5}\Rightarrow\frac{4}{n+4}=\frac{2}{5}\Rightarrow n+4=10\Rightarrow n=6$$

11 - پاسخ: گزینهٔ ۳ ▲ مشخصات سؤال: متوسط * صفحهٔ ۱۴۸ ریاضی ۳

نکته: در مسائل احتمال شرطی فرض می‌کنیم شرط انجام شده است و فضای نمونهٔ جدید را بدون در نظر گرفتن آن معین می‌کنیم.

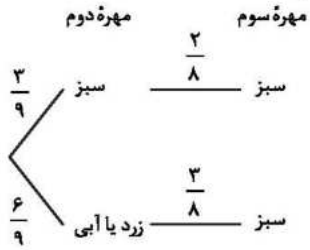
نکته: در مسائل خارج کردن مهره از ظرف اگر از رنگ یک مهرهٔ خارج‌شده اطلاع نداشته باشیم، فرض می‌کنیم اصلاً آن مهره خارج نشده است و از آن مرحله با احتمال ۱ می‌گذریم.

راه‌حل اول:

می‌دانیم مهرهٔ اول زرد خارج شده است. یعنی پس از خروج مهرهٔ اول در ظرف یک مهرهٔ زرد، ۳ مهرهٔ سبز و ۵ مهرهٔ آبی قرار دارد. بنابراین احتمال آن که از این ظرف مهره‌ای با رنگ سبز خارج شود برابر $\frac{3}{5+3+1}$ یعنی $\frac{1}{3}$ است. از آنجا که رنگ مهرهٔ دوم خارج‌شده مشخص نیست، احتمال آنکه مهرهٔ سوم دارای رنگ سبز باشد نیز برابر $\frac{1}{3}$ است.

راه‌حل دوم:

پس از خروج مهرهٔ زرد اول از ظرف بر اساس اینکه مهرهٔ دوم سبز است یا سبز نیست حالت‌بندی می‌کنیم.



بنا بر قاعدهٔ احتمال کل داریم:

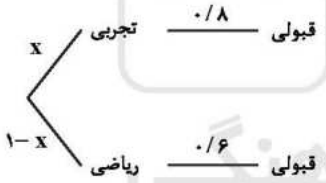
$$P=\frac{3}{9}\times\frac{2}{8}+\frac{6}{9}\times\frac{3}{8}=\frac{6+18}{72}=\frac{24}{72}=\frac{1}{3}$$

12 - پاسخ: گزینهٔ ۴ ▲ مشخصات سؤال: متوسط * صفحهٔ ۱۴۶ ریاضی ۳

نکته: اگر فرض کنیم درحالت کلی $A_1, A_2, \cdots, A_n$ پیشامدهایی باشند که بر روی فضای نمونه‌ای S یک افراز تشکیل داده‌اند و B یک پیشامد دلخواه باشد، رابطهٔ زیر حاصل خواهد شد که به آن قانون احتمال کل می‌گوییم:

$$P(B)=\sum_{i=1}^{n}P(B\cap A_i)=\sum_{i=1}^{n}P(A_i)P(B|A_i)$$

احتمال آنکه دانش‌آموزی از این مدرسه در رشتهٔ تجربی تحصیل کند را x می‌نامیم. بنابراین احتمال آنکه در رشتهٔ ریاضی تحصیل کند $1-x$ است.



احتمال کل قبولی در این مدرسه برابر ۰/۶۵ است، پس:

$$0/8x+(1-x)0/6=0/65 \Rightarrow 0/8x+0/6-0/6x=0/65 \Rightarrow 0/2x=0/05 \Rightarrow x=0/25$$

بنابراین ۲۵ درصد از دانش‌آموزان دوازدهم در رشتهٔ تجربی تحصیل می‌کنند.

13- پاسخ: گزینهٔ ۴ ▲ مشخصات سؤال: متوسط * صفحهٔ ۱۴۷ ریاضی ۳

نکته: اگر فرض کنیم درحالت کلی $A_1, A_2, \cdots, A_n$ پیشامدهایی باشند که بر روی فضای نمونه‌ای S یک افراز تشکیل داده‌اند و B یک پیشامد دلخواه باشد، رابطهٔ زیر حاصل خواهد شد که به آن قانون احتمال کل می‌گوییم:

$$P(B)=\sum_{i=1}^{n}P(B\cap A_i)=\sum_{i=1}^{n}P(A_i)P(B|A_i)$$

سکهٔ دو طرف رو را A، سکهٔ دو طرف پشت را B و سکهٔ سالم یک طرف رو و یک طرف پشت را C می‌نامیم. حالت‌های مختلف در آمدن ۲ سکه از این سه سکه به‌صورت AB، AC و BC است و احتمال هر کدام $\frac{1}{3}$ است.

بنابر فرمول احتمال کل، احتمال خواسته‌شده برابر است با:

$$P=\frac{1}{3}\times 1+\frac{1}{3}\times\frac{1}{2}+\frac{1}{3}\times\frac{1}{2}=\frac{1}{3}+\frac{1}{6}+\frac{1}{6}=\frac{2}{3}$$

14 - پاسخ: گزینهٔ ۱ ▲ مشخصات سؤال: متوسط * صفحهٔ ۱۴۸ ریاضی ۳

نکته: اگر فرض کنیم در حالت کلی $A_1, A_2, \cdots, A_n$ پیشامدهایی باشند که بر روی فضای نمونه‌ای S یک افراز تشکیل داده باشند و B یک پیشامد دلخواه باشد، رابطهٔ زیر حاصل خواهد شد که به آن قانون احتمال کل می‌گوییم:

$$P(B)=\sum_{i=1}^{n}P(B\cap A_i)=\sum_{i=1}^{n}P(A_i)P(B|A_i)$$

بعد از اینکه سه مهره از جعبهٔ اول در جعبهٔ دوم انداختیم. در جعبهٔ دوم ۱۲ مهره وجود دارد که ۹ تا از آن‌ها از ابتدا در جعبهٔ دوم بوده و ۳ تا از آن‌ها از جعبهٔ اول به جعبهٔ دوم منتقل شده است.

اکنون بر اساس آنکه مهرهٔ خارج‌شده از جعبهٔ دوم از ابتدا در جعبهٔ دوم بوده یا یکی از مهره‌های انتقالی از جعبهٔ اول است حالت‌بندی می‌کنیم:

$$P=\frac{9}{12}\times\frac{5}{9}+\frac{3}{12}\times\frac{3}{9}=\frac{45+9}{12\times 9}=\frac{54}{12\times 9}=\frac{6}{12}=\frac{1}{2}$$

www.mapedu.ir

موسسه مورد ی فرهنگی

15 - پاسخ: گزینهٔ ۲ ▲ مشخصات سؤال: متوسط * صفحهٔ ۱۴۵ ریاضی ۲

نکته: $P(A \mid B) = \dfrac{n(A \cap B)}{n(B)}$

پیشامد آنکه مجموع اعداد روشده زوج باشد را B و پیشامد آنکه لااقل یکی از تاس‌ها ۶ بیاید را A می‌نامیم. احتمال خواسته‌شده همان $P(A \mid B)$ است.

برای یافتن تعداد اعضای B دو حالت را در نظر می‌گیریم. اول آنکه هر سه تاس زوج بیاید و دوم آنکه یکی از تاس‌ها زوج و دوتای دیگر فرد بیاید.

$$n(B) = \underset{\text{زوج}}{۳} \times \underset{\text{زوج}}{۳} \times \underset{\text{زوج}}{۳} + \underset{\text{کدام تاس زوج بیاید}}{\binom{۳}{۱}} \times \underset{\text{فرد}}{۳} \times \underset{\text{فرد}}{۳} \times \underset{\text{زوج}}{۳} = ۲۷ + ۸۱ = ۱۰۸$$

برای شمردن اعضای $A \cap B$ از روش غیرمستقیم استفاده می‌کنیم. یعنی تعداد حالاتی را می‌شماریم که مجموع سه تاس زوج آمده ولی هیچ‌کدام از تاس‌ها ۶ نیامده است:

$$۲ \times ۲ \times ۲ + \binom{۳}{۱} \times ۲ \times ۳ \times ۳ = ۸ + ۳ \times ۱۸ = ۶۲$$

بنابراین احتمال شرطی برابر است با:

$$P(A \mid B) = ۱ - \frac{۶۲}{۱۰۸} = \frac{۴۶}{۱۰۸} = \frac{۲۳}{۵۴}$$

16 - پاسخ: گزینهٔ ۱ ▲ مشخصات سؤال: متوسط * صفحهٔ ۱۴۵ ریاضی ۲

برای حل مسائل احتمال از رابطهٔ $P(A) = \dfrac{n(A)}{n(S)}$ استفاده می‌کنیم. در حل مسائل احتمال شرطی می‌توان فضای نمونهٔ جدید را با توجه به شرط مسئله تشکیل داد.

اگر فضای نمونه‌ای، مجموعه اعداد دورقمی باشد که تفاضل آن‌ها فرد است یعنی یکی از آن‌ها زوج و دیگری فرد است و از آنجایی که از ۹۰ عدد دورقمی ۴۵ تا فرد و ۴۵ تا زوج است، پس تعداد این حالات عبارت است از:

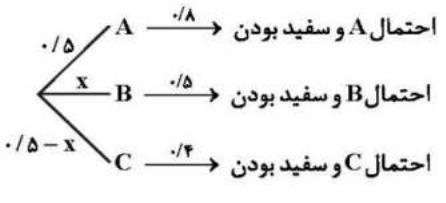
$$n(S) = \binom{۴۵}{۱} \times \binom{۴۵}{۱} = ۴۵^{۲}$$

از طرفی حالات مطلوب در این فضای نمونه حالت‌هایی است که یکی از اعداد بر ۱۰ بخش‌پذیر باشد یعنی یکی از ۹ عدد ۱۰، ۲۰، ... و ۹۰ باشد، پس عدد دیگر باید فرد باشد و داریم:

$$n(A) = \binom{۹}{۱} \times \binom{۴۵}{۱} = ۹ \times ۴۵ \qquad P(A) = \frac{۹ \times ۴۵}{۴۵ \times ۴۵} = \frac{۹}{۴۵} = \frac{۱}{۵}$$

17 - پاسخ: گزینهٔ ۳ ▲ مشخصات سؤال: متوسط * صفحهٔ ۱۴۶ ریاضی ۳

برای حل این سؤال از نمودار درختی استفاده می‌کنیم:



اگر احتمال انتخاب A، ۰/۵ باشد و احتمال انتخاب B، x باشد، احتمال انتخاب C، ۰/۵ − x است و داریم:

$$۰/۶۳ = ۰/۵ \times ۰/۸ + ۰/۵x + (۰/۵ - x) \times ۰/۴$$
$$\Rightarrow ۰/۶۳ = ۰/۴ + ۰/۱x + ۰/۲ \Rightarrow ۰/۱x = ۰/۰۳ \Rightarrow x = ۰/۳$$

یعنی ۳۰ درصد محصولات کارخانه از مدل B است.

18 - پاسخ: گزینهٔ ۲ ▲ مشخصات سؤال: متوسط * صفحه‌های ۱۴۴ و ۱۴۵ ریاضی ۲

نکته: منظور از احتمال A به‌شرط B که با $P(A|B)$ نمایش می‌دهیم، احتمال وقوع پیشامد A است به شرط آنکه بدانیم پیشامد B رخ داده است و داریم:

$$P(A|B)=\frac{P(A\cap B)}{P(B)}$$

نکته: $P(A\cup B)=P(A)+P(B)-P(A\cap B)$

نکته: $P(A'\cap B')=P(A\cup B)'$ و $P(A')=1-P(A)$

فرض کنیم پیشامد A موفقیت رضا در کنکور و پیشامد B شرکت کردن او در آزمون‌های گزینه‌دو باشد:

$$P(A)=0/5 \qquad P(B)=0/25$$

$$\left.\begin{array}{l} P(A'|B')=0/6 \Rightarrow \dfrac{P(A'\cap B')}{P(B')}=0/6 \\ P(B)=0/25 \Rightarrow P(B')=1-0/25=0/75 \end{array}\right\} \Rightarrow \frac{P(A'\cap B')}{0/75}=0/6 \Rightarrow P(A'\cap B')=0/45$$

$$P(A'\cap B')=P(A\cup B)'=1-P(A\cup B) \Rightarrow 0/45=1-P(A\cup B) \Rightarrow P(A\cup B)=0/55$$

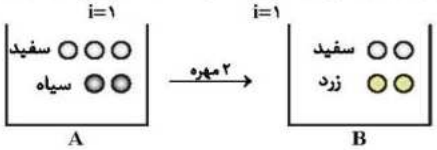
$$P(A\cup B)=P(A)+P(B)-P(A\cap B) \Rightarrow 0/55=0/5+0/25-P(A\cap B) \Rightarrow P(A\cap B)=0/2$$

احتمال خواسته‌شده در واقع احتمال پیشامد A به شرط B است، بنابراین: $P(A|B)=\dfrac{P(A\cap B)}{P(B)}=\dfrac{0/2}{0/25}=0/8$

19 - پاسخ: گزینهٔ ۱ ▲ مشخصات سؤال: متوسط * صفحهٔ ۱۴۶ ریاضی ۳

نکته: اگر $A_1, A_2, \cdots, A_n$ پیشامدهای افرازشده روی فضای نمونه‌ای S باشند و B یک پیشامد دلخواه باشد، رابطهٔ زیر را قانون احتمال کل می‌گوییم:

$$P(B)=\sum_{i=1}^{n}P(B\cap A_i)=\sum_{i=1}^{n}P(A_i)P(B|A_i)$$



$P(\text{سفیدبودن})=\dfrac{8}{15}$

اگر فرض کنیم پس از انداختن دو مهره از ظرف A، تعداد مهره‌های ظرف B برابر n باشد، داریم:

انتخاب دو مهره از ظرف A

- هر دو سفید: $\dfrac{\binom{3}{2}}{\binom{5}{2}} \xrightarrow{\text{۱ مهرهٔ سفید از B}} \dfrac{4}{n}$
- یکی سفید یکی سیاه: $\dfrac{\binom{3}{1}\binom{2}{1}}{\binom{5}{2}} \xrightarrow{\text{۱ مهرهٔ سفید از B}} \dfrac{3}{n}$
- هر دو سیاه: $\dfrac{\binom{2}{2}}{\binom{5}{2}} \xrightarrow{\text{۱ مهرهٔ سفید از B}} \dfrac{2}{n}$

$$P(\text{سفید بودن})=\left(\frac{3}{10}\times\frac{4}{n}\right)+\left(\frac{6}{10}\times\frac{3}{n}\right)+\left(\frac{1}{10}\times\frac{2}{n}\right)=\frac{32}{10n} \Rightarrow \frac{32}{10n}=\frac{8}{15} \Rightarrow n=6$$

پس ابتدا در ظرف B، ۴ مهره وجود داشته که دوتای آن‌ها زرد بوده است.

20 - پاسخ: گزینهٔ ۴ ▲ مشخصات سؤال: متوسط * صفحهٔ ۱۱۶ ریاضی ۱

نکته: احتمال رخداد پیشامد A را با $P(A)$ نمایش می‌دهند که برابر است با:

$$P(A)=\frac{n(A)}{n(B)}=\frac{\text{تعداد حالت‌های مطلوب}}{\text{تعداد کل حالت‌ها}}$$

تعداد کل حالات پرتاب سه تاس برابر $۶^۳ = ۲۱۶$ است. در حالت‌های زیر حاصل‌ضرب ۲ تا از اعداد روشده برابر دیگری است.

$(۱,۱,۱) \Rightarrow$ یک حالت

$(۱,۲,۲) \Rightarrow$ سه حالت

$(۱,۳,۳) \Rightarrow$ سه حالت

$(۱,۴,۴) \Rightarrow$ سه حالت

$(۱,۵,۵) \Rightarrow$ سه حالت

$(۱,۶,۶) \Rightarrow$ سه حالت

$(۲,۲,۴) \Rightarrow$ سه حالت

$(۲,۳,۶) \Rightarrow$ شش حالت

بنابراین جمعاً در $۱+۶\times۳+۶=۲۵$ حالت پیشامد مطلوب اتفاق می‌افتد.

پس احتمال خواسته‌شده برابر است با: $P(A)=\frac{۲۵}{۲۱۶}$

21 - پاسخ: گزینهٔ ۱ ▲ مشخصات سؤال: متوسط * صفحهٔ ۱۴۵ ریاضی ۲

نکته: $P(A|B)=\frac{P(A\cap B)}{P(B)}$

پیشامد A را بیشتر بودن نمرهٔ دانش‌آموز اول از دانش‌آموز دوم و پیشامد B را کسب بالاترین نمره توسط دانش‌آموز اول در نظر می‌گیریم. احتمال خواسته‌شده همان $P(B|A)$ است.

مشخص است که $P(A)=\frac{۱}{۲}$ زیرا در نیمی از حالات نمرهٔ دانش‌آموز اول بیشتر از دانش‌آموز دوم و در نیمی دیگر نمرهٔ دانش‌آموز دوم از دانش‌آموز اول بیشتر است.

همچنین پیشامد $A\cap B$ همان پیشامد B است. احتمال پیشامد B برابر است با:

$$P(B)=\frac{۱\times ۱۹!}{۲۰!}=\frac{۱۹!}{۲۰\times ۱۹!}=\frac{۱}{۲۰}$$

بنابراین احتمال خواسته‌شده برابر است با:

$$P(B|A)=\frac{P(B\cap A)}{P(A)}=\frac{P(B)}{P(A)}=\frac{\frac{۱}{۲۰}}{\frac{۱}{۲}}=\frac{۱}{۱۰}=۰/۱$$

22 - پاسخ: گزینهٔ ۲ ▲ مشخصات سؤال: متوسط * صفحهٔ ۱۴۷ ریاضی ۲

نکته: مستقل بودن A از B معادل است با اینکه $P(A\cap B)=P(A)\cdot P(B)$.

نکته: $P(A-B)=P(A)-P(A\cap B)$

نکته: رابطهٔ محاسبهٔ احتمال اجتماع یا اشتراک دو پیشامد A و B:

$$P(A\cup B)=P(A)+P(B)-P(A\cap B)$$

فرض کنید $P(A)=a$ و $P(B)=b$؛ دو پیشامد A و B مستقل هستند، پس دو پیشامد A و B' نیز مستقل هستند. داریم:

$$P(A\cap B)=۰/۴ \Rightarrow ab=۰/۴$$

$$P(A-B)=۰/۲ \Rightarrow P(A\cap B')=۰/۲ \Rightarrow P(A)\times P(B')=۰/۲ \Rightarrow a(۱-b)=۰/۲$$

با تقسیم دو عبارت به‌دست‌آمده بر یکدیگر a و b را به‌دست می‌آوریم:

$$\frac{ab}{a(۱-b)}=\frac{۰/۴}{۰/۲} \Rightarrow \frac{b}{۱-b}=۲ \Rightarrow b=۲-۲b \Rightarrow b=\frac{۲}{۳} \text{ و } a=\frac{۳}{۵}$$

بنابراین مقدار خواسته‌شده برابر است با:

$$P(A\cup B')=P(A)+P(B')-P(A\cap B')=a+(۱-b)-a(۱-b)=۰/۶+\frac{۱}{۳}-۰/۲=\frac{۲}{۵}+\frac{۱}{۳}=\frac{۱۱}{۱۵}$$

23 - پاسخ: گزینهٔ ۲ ▲ مشخصات سؤال: دشوار ❋ صفحهٔ ۱۴۸ ریاضی ۳

نکته: اگر فرض کنیم در حالت کلی $A_1, A_2, \cdots, A_n$ پیشامدهایی باشند که بر روی فضای نمونه‌ای S یک افراز تشکیل داده باشند و B یک پیشامد دلخواه باشد، رابطهٔ زیر حاصل خواهد شد که به آن قانون احتمال کل می‌گوییم:

$$P(B)=\sum_{i=1}^{n}P(B\cap A_i)=\sum_{i=1}^{n}P(A_i)P(B|A_i)$$

به احتمال $\frac{1}{2}$ ظرف اول انتخاب می‌شود. درون ظرف اول ۶ مهرهٔ قدیمی و ۴ مهرهٔ جدید است. احتمال سفید بودن مهره‌های قدیمی $\frac{4}{6}$ و احتمال سفید بودن مهره‌های جدید $\frac{6}{8}$ است. همچنین به احتمال $\frac{1}{2}$ ظرف دوم انتخاب می‌شود. درون ظرف دوم ۶ مهره قدیمی و ۴ مهرهٔ جدید است. احتمال سفید بودن مهره‌های قدیمی $\frac{1}{6}$ و احتمال سفید بودن مهره‌های جدید $\frac{6}{8}$ است.

پس احتمال کل برابر است با:

$$P=\frac{1}{2}(\frac{6}{10}\times\frac{4}{6}+\frac{4}{10}\times\frac{6}{8})+\frac{1}{2}(\frac{6}{10}\times\frac{1}{6}+\frac{4}{10}\times\frac{6}{8})\Rightarrow P=\frac{1}{2}(\frac{4}{10}+\frac{3}{10})+\frac{1}{2}(\frac{1}{10}+\frac{3}{10})$$

$$\Rightarrow P=\frac{7}{20}+\frac{4}{20}\Rightarrow P=\frac{11}{20}\Rightarrow P=\%55$$

24 - پاسخ: گزینهٔ ۳ ▲ مشخصات سؤال: دشوار ❋ ریاضی ۱ (فصل ۷، درس ۱)

نکته: اگر A پیشامدی از فضای نمونهٔ S باشد، احتمال رخداد پیشامد A برابر $P(A)=\frac{n(A)}{n(S)}$ است.

نکته: تعداد انتخاب r شی از n شی متمایز (بدون ترتیب) از رابطهٔ روبه‌رو به‌دست می‌آید: $C(n,r)=\binom{n}{r}=\frac{n!}{r!(n-r)!}$

فرض کنیم تعداد مهره‌های قرمز برابر n باشد، داریم:

۴ آبی
n قرمز

$$n(S)=\binom{n+4}{2}=\frac{(n+4)(n+3)}{2}=\frac{n^2+7n+12}{2}$$

حداقل یکی از مهره‌ها آبی باشد: $n(A)=\binom{4}{1}\binom{n}{1}+\binom{4}{2}=4n+6$

$$P(A)=\frac{4n+6}{\frac{n^2+7n+12}{2}}\Rightarrow P(A)=\frac{2(4n+6)}{n^2+7n+12}=\frac{6}{7}\Rightarrow\frac{4n+6}{n^2+7n+12}=\frac{3}{7}\Rightarrow 3n^2+21n+36=28n+42$$

$$\Rightarrow 3n^2-7n-6=0\Rightarrow(n-3)(3n+2)=0\xrightarrow{n>0}n=3$$

بنابراین احتمال آبی بودن مهرهٔ انتخابی برابر است با: $\frac{\binom{4}{1}}{\binom{7}{1}}=\frac{4}{7}$

25 - پاسخ: گزینهٔ ۴ ▲ مشخصات سؤال: دشوار ❋ ریاضی ۱ (فصل ۷، درس ۱)

احتمال خارج شدن مهرهٔ سفید از جعبهٔ A برابر $P(C)=\frac{3}{5}$. همچنین احتمال خارج شدن مهرهٔ قرمز از جعبهٔ B برابر $P(D)=\frac{4}{n+4}$ است. با توجه به فرض سؤال داریم:

$$P(C)-P(D)=\frac{1}{5}\Rightarrow\frac{3}{5}-\frac{4}{n+4}=\frac{1}{5}\Rightarrow\frac{4}{n+4}=\frac{2}{5}\Rightarrow n+4=10\Rightarrow n=6$$

26 - پاسخ: گزینهٔ ۴ ▲ مشخصات سؤال: متوسط * ریاضی ۲ (فصل ۷، درس ۱)

نکته: bj

نکته: $A - B = A \cap B'$ و $P(A \mid B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}$

نکته: اگر A و B دو پیشامد مستقل باشند، آنگاه: $P(A \cap B) = P(A)P(B)$

با استفاده از نکات بالا داریم:

$$P((A-B) \mid A) = \frac{P((A-B) \cap A)}{P(A)} = \frac{P(A \cap B' \cap A)}{P(A)} = \frac{P(A \cap B')}{P(A)}$$

می‌دانیم اگر دو پیشامد A و B مستقل از یکدیگر باشند، دو پیشامد A و B' نیز مستقل هستند، پس:

$$P((A-B) \mid A) = \frac{P(A \cap B')}{P(A)} = \frac{P(A) \cdot P(B')}{P(A)} = P(B') = ۱ - P(B)$$

27 - پاسخ: گزینهٔ ۳ ▲ مشخصات سؤال: دشوار * ریاضی ۲ (فصل ۷، درس ۱)

نکته: $A \cap B' = A - B$

نکته: $P(A - B) = P(A) - P(A \cap B)$

A: مضرب ۳ باشد.

B: مضرب ۵ باشد.

باید مقدار $P(A \cap B')$ را به‌دست بیاوریم.

$$A = \{۳, ۶, ۹, \cdots, ۱۹۸\} \Rightarrow n(A) = ۶۶$$

$$A \cap B = \{۱۵, ۳۰, ۴۵, \cdots, ۱۹۵\} \Rightarrow n(A \cap B) = ۱۳$$

با توجه به اینکه $n(S) = ۲۰۰$، داریم:

$$P(A \cap B') = P(A - B) = P(A) - P(A \cap B) = \frac{۶۶}{۲۰۰} - \frac{۱۳}{۲۰۰} = \frac{۵۳}{۲۰۰}$$

۲۸ - پاسخ: گزینهٔ ۴ ▲ مشخصات سؤال: متوسط * ریاضی ۱ (فصل ۷، درس ۱)

نکته: اگر A پیشامدی در فضای نمونهٔ هم‌شانس S باشد $(A \subseteq S)$، آنگاه احتمال رخداد پیشامد A برابر $P(A) = \frac{n(A)}{n(S)}$ است.

ابتدا تعداد اعضای فضای نمونه را حساب می‌کنیم:

$$n(S) = \binom{۹}{۳} = \frac{۹!}{۳! \times ۶!} = \frac{۹ \times ۸ \times ۷ \times ۶!}{۶ \times ۶!} = ۸۴$$

برای اینکه دقیقاً دو مهرهٔ همرنگ خارج شود، دو حالت وجود دارد: دو مهرهٔ قرمز و یک مهرهٔ آبی یا دو مهرهٔ آبی و یک مهرهٔ قرمز، پس تعداد اعضای پیشامد مطلوب برابر است با:

$$n(A) = \binom{۵}{۲} \times \binom{۴}{۱} + \binom{۴}{۲} \times \binom{۵}{۱} = ۴۰ + ۳۰ = ۷۰$$

بنابراین احتمال مطلوب برابر است با:

$$P(A) = \frac{n(A)}{n(S)} = \frac{۷۰}{۸۴} = \frac{۵}{۶}$$

۲۹ - پاسخ: گزینهٔ ۳ ▲ مشخصات سؤال: دشوار * ریاضی ۱ (فصل ۷، درس ۱)

نکته: اگر A و B دو پیشامد از فضای نمونه‌ای S باشند، داریم: $P(A\cup B)=P(A)+P(B)-P(A\cap B)$

تعداد اعضای فضای نمونهٔ پرتاب دو تاس برابر است با: $n(S)=۶\times۶=۳۶$

پیشامد مجموع دو تاس ۶ باشد: $A=\{(۱,۵),(۲,۴),(۳,۳),(۴,۲),(۵,۱)\} \Rightarrow P(A)=\frac{۵}{۳۶}$

پیشامد هر دو فرد باشند: $B=\{(۱,۱),(۱,۳),(۱,۵),(۳,۱),(۳,۳),(۳,۵),(۵,۱),(۵,۳),(۵,۵)\} \Rightarrow P(B)=\frac{۹}{۳۶}$

$A\cap B=\{(۱,۵),(۳,۳),(۵,۱)\} \Rightarrow P(A\cap B)=\frac{۳}{۳۶}$

احتمال مجموع دو تاس ۶ یا هر دو فرد، معادل $P(A\cup B)$ است و داریم:

$$P(A\cup B)=P(A)+P(B)-P(A\cap B)=\frac{۵}{۳۶}+\frac{۹}{۳۶}-\frac{۳}{۳۶}=\frac{۱۱}{۳۶}$$

۳۰ - پاسخ: گزینهٔ ۱ ▲ مشخصات سؤال: ساده * ریاضی ۲ (فصل ۷، درس ۱)

نکته: گوییم دو پیشامد A و B از هم مستقل هستند هرگاه وقوع هریک بر احتمال وقوع دیگری تأثیر نداشته باشد، برای دو پیشامد مستقل A و B داریم:
$P(A\cap B)=P(A)\cdot P(B)$

نکته: اگر A و B دو پیشامد مستقل باشند، آنگاه هرکدام با متمم دیگری نیز مستقل است؛ یعنی:

$P(A\cap B)=P(A)\cdot P(B) \Rightarrow P(B\cap A')=P(B)\cdot P(A')$

احتمال انتخاب در تیم والیبال: $P(A)=۰/۶$

احتمال انتخاب در گروه سرود: $P(B)=۰/۷$

انتخاب احمد در تیم والیبال و در گروه سرود دو پیشامد مستقل هستند. پس داریم:

احتمال آنکه فقط در گروه سرود انتخاب شود: $P(B-A)=P(B\cap A')=P(B)\cdot P(A')=P(B)(۱-P(A))=۰/۷\times(۱-۰/۶)$
$=۰/۷\times۰/۴=۰/۲۸$

۳۱ - پاسخ: گزینهٔ ۴ ▲ مشخصات سؤال: ساده * ریاضی ۲ (فصل ۷، درس ۱)

نکته: $P(A\mid B)=\frac{P(A\cap B)}{P(B)}$

نکته: $P(A-B)=P(A)-P(A\cap B)$

با توجه به فرمول $P(B\mid A)$، داریم: $P(B\mid A)=\frac{P(B\cap A)}{P(A)} \Rightarrow ۰/۷=\frac{P(B\cap A)}{۰/۴} \Rightarrow P(B\cap A)=۰/۲۸$

بنابراین احتمال رخداد پیشامد $A-B$ برابر است با: $P(A-B)=P(A)-P(A\cap B)=۰/۴-۰/۲۸=۰/۱۲$

۳۲ - پاسخ: گزینهٔ ۴ ▲ مشخصات سؤال: متوسط * ریاضی ۲ (فصل ۷، درس ۱)

نکته: $P(A\mid B)=\frac{n(A\cap B)}{n(B)}$

اگر مجموع سه عدد صحیح فرد باشد، یا هر سه عدد فرد هستند یا دوتا از آن‌ها زوج و یکی فرد است. بین ارقام ۱ تا ۷، ۴ عدد فرد و ۳ عدد زوج وجود دارد، پس تعداد اعضای پیشامد آنکه مجموع سه عدد فرد باشد برابر است با:

$$n(B)=\binom{۴}{۳}+\binom{۳}{۲}\binom{۴}{۱}=۴+(۳\times۴)=۱۶$$

اگر حاصل‌ضرب سه عدد صحیح فرد باشد، هیچ‌کدام از این اعداد زوج نیستند، پس تعداد اعضای پیشامد آنکه حاصل‌ضرب سه عدد فرد باشد، برابر است با:

$$n(A)=\binom{۴}{۳}=۴$$

پس با توجه به اینکه $A\subseteq B$ داریم: $P(A\mid B)=\frac{n(A\cap B)}{n(B)}=\frac{n(A)}{n(B)}=\frac{۱}{۴}$

۳۳ - پاسخ: گزینهٔ ۳ ▲ مشخصات سؤال: متوسط * ریاضی ۲ (فصل ۷، درس ۱)

نکته: مستقل بودن پیشامد A از پیشامد B معادل است با اینکه: $P(A\cap B)=P(A)\times P(B)$

نکته: اگر A و B دو پیشامد ناتهی و مستقل از یکدیگر باشند، آنگاه A' و B نیز مستقل‌اند.

نکته: اگر در ظاهر A و B پیشامدهایی باشند که وقوع‌شان با هم در ارتباط است، نمی‌توان به‌طور قطع گفت که A و B مستقل نیستند.

ابتدا احتمال هرکدام از پیشامدها را محاسبه می‌کنیم:

$A=\{۱,۳,۵\}$: فرد آمدن $\qquad P(A)=\frac{۳}{۶}=\frac{۱}{۲}$

$B=\{۴\}$: مضرب ۴ آمدن $\qquad P(B)=\frac{۱}{۶}$

$C=\{۱,۲,۳,۴\}$: کوچک‌تر از ۵ آمدن $\qquad P(C)=\frac{۴}{۶}=\frac{۲}{۳}$

اکنون احتمال اشتراک دوبه‌دوی آن‌ها را محاسبه می‌کنیم:

$$A\cap B=\varnothing \Rightarrow P(A\cap B)=۰$$

$$A\cap C=\{۱,۳\} \Rightarrow P(A\cap C)=\frac{۲}{۶}=\frac{۱}{۳}$$

$$B\cap C=\{۴\} \Rightarrow P(B\cap C)=\frac{۱}{۶}$$

بین حالت‌های مختلف فقط $P(A\cap C)=P(A)\times P(C)$، پس فقط A و C مستقل از یکدیگر هستند، پس مطابق قضیه A و C' نیز مستقل از یکدیگر هستند.

۳۴ - پاسخ: گزینهٔ ۲ ▲ مشخصات سؤال: متوسط * ریاضی ۲ (فصل ۷، درس ۱)

نکته: $A-B=A\cap B'$

نکته: $P(A\mid B)=\frac{P(A\cap B)}{P(B)}$, $P(A-B)=P(A)-P(A\cap B)$

پیشامد ابتلای پدر را با A و ابتلای پسر را با B نمایش می‌دهیم. مطابق اطلاعات سؤال $P(A)=۰/۴$ و $P(B)=۰/۲$ و $P(A\mid B)=۰/۷$، خواستهٔ مسئله همان ابتلای پدر به‌شرط مبتلا نشدن پسر یعنی $P(A\mid B')$ است. پس:

$$P(A\mid B)=۰/۷ \Rightarrow \frac{P(A\cap B)}{P(B)}=۰/۷ \Rightarrow P(A\cap B)=۰/۷\times ۰/۲=۰/۱۴$$

$$P(A\mid B')=\frac{P(A\cap B')}{P(B')}=\frac{P(A-B)}{۱-P(B)}=\frac{P(A)-P(A\cap B)}{۱-P(B)}=\frac{۰/۴-۰/۱۴}{۱-۰/۲}=\frac{۰/۲۶}{۰/۸}=\frac{۲۶}{۸۰}=\frac{۱۳}{۴۰}$$

۳۵ - پاسخ: گزینهٔ ۲ ▲ مشخصات سؤال: دشوار * ریاضی ۲ (فصل ۷، درس ۱)

نکته: مستقل بودن A از B معادل است با اینکه: $P(A\cap B)=P(A)\cdot P(B)$

نکته: $۰\le P(A)\le ۱$

نکته: برای هر دو پیشامد A و B از فضای نمونه‌ای S، همواره تساویِ زیر برقرار است: $P(A\cup B)=P(A)+P(B)-P(A\cap B)$

با توجه به اطلاعات مسئله داریم:

$$P(A\cup B)=P(A') \Rightarrow P(A)+P(B)-P(A\cap B)=۱-P(A) \Rightarrow P(A)+P(B)-P(A)P(B)=۱-P(A) \quad (I)$$

(می‌دانیم $P(B)=\frac{۳}{۲}P(A)$) اگر خواستهٔ مسئله یعنی $P(B)$ را x بنامیم، داریم:

$$x=\frac{۳}{۲}P(A) \Rightarrow P(A)=\frac{۲}{۳}x$$

$$(I) \Rightarrow \frac{۲}{۳}x+x-\frac{۲}{۳}x\times x=۱-\frac{۲}{۳}x \Rightarrow \frac{۵}{۳}x-\frac{۲}{۳}x^۲=۱-\frac{۲}{۳}x \xrightarrow{\times ۳} ۵x-۲x^۲=۳-۲x \Rightarrow ۲x^۲-۷x+۳=۰$$

$$\Rightarrow x=\frac{۷\pm\sqrt{۴۹-۲۴}}{۲\times ۲} \Rightarrow x=\frac{۷+۵}{۴} \text{ یا } \frac{۷-۵}{۴} \Rightarrow x=۳ \text{ یا } \frac{۱}{۲}$$

با توجه به اینکه x یعنی $P(B)$ همواره عددی در بازهٔ $[۰,۱]$ است، پس $x=۳$ غیرقابل‌قبول بوده و $x=P(B)=\frac{۱}{۲}$ می‌باشد.

۳۶ - پاسخ: گزینهٔ ۲ ▲ مشخصات سؤال: متوسط * ریاضی ۱ (فصل ۶، درس ۳)

نکته: گاهی اوقات محاسبهٔ تعداد روش‌های یک عمل به‌طور مستقیم بسیار دشوار یا وقت‌گیر است. در این‌گونه موارد ابتدا تعداد روش‌های متمم عمل را حساب می‌کنیم و در پایان از کل روش‌ها کم می‌کنیم.

$$\text{همهٔ مهره‌ها از یک رنگ نباشند} = \text{کل حالت‌ها} - \text{همهٔ مهره‌ها همرنگ باشند} = \binom{۱۰}{۳} - \left(\binom{۶}{۳} + \binom{۴}{۳}\right) = ۱۲۰ - (۲۰+۴) = ۹۶$$

۳۷ - پاسخ: گزینهٔ ۴ ▲ مشخصات سؤال: متوسط * ریاضی ۱ (فصل ۷، درس ۱)

ابتدا هر یک از پیشامدهای A، B و C و احتمال رخداد آن‌ها را می‌نویسیم:

$$A = \{(\text{پ،پ،پ}),(\text{ر،ر،ر})\} \Rightarrow P(A) = \frac{۲}{۸} = \frac{۱}{۴}$$

$$B = \{(\text{ر،ر،پ}),(\text{ر،پ،ر}),(\text{پ،ر،ر})\} \Rightarrow P(B) = \frac{۳}{۸}$$

$$C = \{(\text{ر،ر،پ}),(\text{ر،پ،ر}),(\text{پ،ر،ر})\} \Rightarrow P(C) = \frac{۳}{۸}$$

اکنون توجه کنید که پیشامدهای B و C یکسان هستند و هر دو پیشامد با پیشامد A ناسازگارند و داریم:

$$\begin{cases} P(B)+P(C) = \frac{۶}{۸} = \frac{۳}{۴} \\ P(A') = ۱ - \frac{۱}{۴} = \frac{۳}{۴} \end{cases} \Rightarrow P(B)+P(C) = P(A')$$

۳۸ - پاسخ: گزینهٔ ۱ ▲ مشخصات سؤال: دشوار * ریاضی ۱ (فصل ۷، درس ۱)

مجموع اعداد روشدهٔ دو تاس عددی بزرگ‌تر یا مساوی ۲ و کوچک‌تر یا مساوی ۱۲ است. واضح است که در حالتی که مجموع دو تاس اول برابر اعداد ۲، ۳، ۴، ۵ و ۶ باشد، ممکن است برابر عدد تاس سوم شود.

حالات زیر را می‌توان در نظر گرفت:

$$A = \{(۱,۱,۲),(۱,۲,۳),(۲,۱,۳),(۱,۳,۴),(۳,۱,۴),(۲,۲,۴),(۱,۴,۵),(۴,۱,۵),(۲,۳,۵),(۳,۲,۵),(۱,۵,۶),(۵,۱,۶),$$
$$(۲,۴,۶),(۴,۲,۶),(۳,۳,۶)\}$$

از طرفی تعداد کل حالات، برابر $۶^۳ = ۲۱۶$ است. بنابراین:

$$P(A) = \frac{۱۵}{۶^۳} = \frac{۵}{۲\times۶\times۶} = \frac{۵}{۷۲}$$

۳۹ - پاسخ: گزینهٔ ۱ ▲ مشخصات سؤال: ساده * ریاضی ۲ (فصل ۷، درس ۱)

نکته: اگر A و B دو پیشامد مستقل باشند، داریم:

$$P(A\cap B) = P(A)\times P(B)$$

نکته: $P(A\mid B) = \frac{P(A\cap B)}{P(B)}$

نکته: $P(A\cup B) = P(A)+P(B)-P(A\cap B)$

A و B دو پیشامد مستقل هستند، پس $P(A\mid B) = P(A)$ و $P(B\mid A) = P(B)$، بنابراین $P(A) = ۰/۶$ و $P(B) = ۰/۷$. بنابراین:

$$P(A\cup B) = P(A)+P(B)-P(A\cap B) = P(A)+P(B)-P(A)P(B) = ۰/۶+۰/۷-۰/۶\times۰/۷ = ۱/۳-۰/۴۲ = ۰/۸۸$$

مؤسسه آموزشی فرهنگی

۴۰- پاسخ: گزینهٔ ۲ ▲ مشخصات سؤال: متوسط * ریاضی ۲ (فصل ۷، درس ۱)

نکته (احتمال شرطی): $P(A|B)=\frac{n(A\cap B)}{n(B)}$

B: اعداد رو شده بزرگ‌تر از ۲ باشند.

A: مجموع اعداد رو شده کمتر از ۱۰ باشد.

$B\{(۳,۳),(۳,۴),(۳,۵),(۳,۶),(۴,۳),\cdots,(۴,۶),(۵,۳),\cdots,(۵,۶),(۶,۳),\cdots,(۶,۶)\}$

$A\cap B=\{(۳,۳),(۳,۴),(۳,۵),(۳,۶),(۴,۳),(۴,۴),(۴,۵),(۵,۳),(۵,۴),(۶,۳)\}$

بنابراین: $P(A|B)=\frac{۱۰}{۱۶}=\frac{۵}{۸}$

۴۱- پاسخ: گزینهٔ ۲ ▲ مشخصات سؤال: متوسط * ریاضی ۲ (فصل ۷، درس ۱)

نکته: $P(A|B)=\frac{P(A\cap B)}{P(B)}$

پیشامدهای A و B را به‌صورت زیر تعریف می‌کنیم:

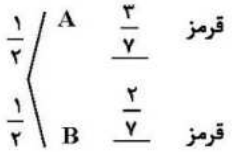
B: دچار نقص فنی نشدن اتومبیل

A: رسیدن به خط پایان

اکنون با استفاده از نکتهٔ بالا داریم:

$$P(A|B)=\frac{P(A\cap B)}{P(B)}=\frac{P(\text{دچار نقص فنی نشود و به خط پایان برسد})}{P(\text{دچار نقص فنی نشود})}=\frac{۰/۷۵}{۱-۰/۱۵}=\frac{۰/۷۵}{۰/۸۵}=\frac{۱۵}{۱۷}$$

۴۲- پاسخ: گزینهٔ ۳ ▲ مشخصات سؤال: ساده * ریاضی ۳ (فصل ۷، درس ۱)



$$p=\frac{۱}{۲}\times\frac{۳}{۷}+\frac{۱}{۲}\times\frac{۲}{۷}=\frac{۳}{۱۴}+\frac{۲}{۱۴}=\frac{۵}{۱۴}$$

۴۳- پاسخ: گزینهٔ ۲ ▲ مشخصات سؤال: دشوار * ریاضی ۲ (فصل ۷، درس ۱)

نکته: $P(A|B)=\frac{P(A\cap B)}{P(B)}$ ، $P(B')=۱-P(B)$ ، $\begin{cases}A-B=A\cap B'\\P(A-B)=P(A)-P(A\cap B)\end{cases}$

پیشامد بهبود بیمار را با A و پیشامد مراجعهٔ او در سه ماههٔ اول به پزشک را با B نمایش می‌دهیم. طبق اطلاعات مسئله، $P(A)=۰/۳۸$، $P(B)=۰/۳$ و $P(A|B)=۰/۸$. احتمال پیشامد خواسته‌شده در سؤال یعنی پیشامد بهبود فردی که می‌دانیم در سه ماههٔ اول به پزشک مراجعه نکرده که برابر $P(A|B')$ است. پس:

$$P(A|B)=۰/۸\Rightarrow\frac{P(A\cap B)}{P(B)}=۰/۸\Rightarrow P(A\cap B)=۰/۸\times۰/۳=۰/۲۴$$

$$P(A|B')=\frac{P(A\cap B')}{P(B')}=\frac{P(A-B)}{P(B')}=\frac{P(A)-P(A\cap B)}{۱-P(B)}=\frac{۰/۳۸-۰/۲۴}{۱-۰/۳}=\frac{۰/۱۴}{۰/۷}=۰/۲$$

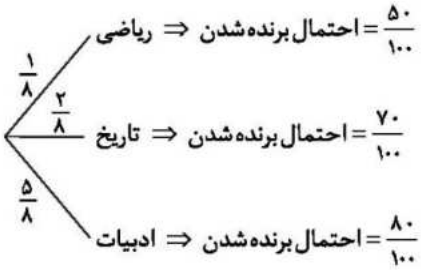
مؤسسه آموزشی فرهنگی

۴۴ - پاسخ: گزینهٔ ۱ ▲ مشخصات سؤال: متوسط * ریاضی ۳ (فصل ۷، درس ۱)

نکته: فرض کنیم در حالت کلی $A_1, A_2, \dots, A_n$ پیشامدهایی باشند که بر روی فضای نمونه‌ای S یک افراز تشکیل داده باشند و B یک پیشامد دلخواه باشد، رابطهٔ زیر حاصل خواهد شد که به آن قانون احتمال کل می‌گوییم:

$$P(B)=\sum_{i=1}^{n} P(A_i)\cdot P(B|A_i)$$

برحسب اینکه عقربهٔ چرخان بر روی کدام نوع سؤالات قرار بگیرد، داریم:



بنابراین طبق قانون احتمال کل داریم:

$$P(\text{برنده شدن})=\frac{1}{8}\times\frac{50}{100}+\frac{2}{8}\times\frac{70}{100}+\frac{5}{8}\times\frac{80}{100}=\frac{50+140+400}{800}=\frac{590}{800}=\frac{59}{80}$$

۴۵ - پاسخ: گزینهٔ ۳ ▲ مشخصات سؤال: متوسط * ریاضی ۳ (فصل ۷، درس ۱)

راه‌حل اول:

نکته: اگر فرض کنیم در حالت کلی $B_1, B_2, \dots, B_n$ پیشامدهایی باشند که بر روی فضای نمونه‌ای S یک افراز تشکیل داده‌اند و A یک پیشامد دلخواه باشد، رابطهٔ زیر حاصل خواهد شد که به آن قانون احتمال کل می‌گوییم:

$$P(A)=\sum_{i=1}^{n} P(A\cap B_i)=\sum_{i=1}^{n} P(B_i)\cdot P(A\mid B_i)$$

اگر از ظرف اول ۲ مهره خارج کنیم قطعاً دو مهره سفید هستند. اگر از ظرف دوم ۲ مهره خارج کنیم قطعاً دو مهرهٔ سیاه هستند، اما اگر از ظرف سوم ۲ مهره خارج کنیم احتمال لااقل یک مهرهٔ سفید را می‌توانیم به‌دست آوریم. وقتی از ظرف سوم دو مهره هم‌زمان انتخاب کنیم $n(S)=\binom{7}{2}$ و حالت مطلوب آن است که یک مهره سفید و یک مهره سیاه باشد یا هر دو مهره سفید باشد.

اکنون طبق قانون احتمال کل داریم:

$$P(A)=\frac{1}{3}\times 1+\frac{1}{3}\times 0+\frac{1}{3}\frac{\binom{3}{1}\binom{4}{1}+\binom{4}{2}}{\binom{7}{2}} \Rightarrow P(A)=\frac{1}{3}+\frac{1}{3}\times\frac{12+6}{21}=\frac{1}{3}+\frac{2}{7}=\frac{7+6}{21}=\frac{13}{21}$$

راه‌حل دوم:

نکته: $P(A')=1-P(A)$

متمم حالت خواسته‌شده این است که مهرهٔ سفید خارج نشود، پس:

$$P(A')=\frac{1}{3}\times 0+\frac{1}{3}\times 1+\frac{1}{3}\times\frac{\binom{3}{2}}{\binom{7}{2}}=\frac{1}{3}+\frac{1}{3}\times\frac{3}{21}=\frac{8}{21} \Rightarrow P(A)=1-\frac{8}{21}=\frac{13}{21}$$

۴۶ - پاسخ: گزینهٔ ۳ ▲ مشخصات سؤال: متوسط * ریاضی ۲ (فصل ۷، درس ۱)

نکته: احتمال پیشامد A را با $P(A)$ نمایش می‌دهیم و داریم:

$$P(A)=\frac{n(A)}{n(B)}=\frac{\text{تعداد حالات مطلوب}}{\text{تعداد کل حالات}}$$

برای اینکه هیچ دو زنی کنار هم نباشند، باید زنان در ۳ جایگاه از ۵ جایگاه مشخص‌شده قرار بگیرند. داریم:

○ مرد ○ مرد ○ مرد ○ مرد ○

مردان به !۴ حالت و زنان به $\binom{۵}{۳}\times ۳!$ حالت می‌توانند کنار هم قرار بگیرند:

$$n(S)=۴!\times ۱۰\times ۳!$$

حال برای اینکه زنان یکی‌درمیان قرار بگیرند، یکی از سه حالت زیر را داریم:

مرد زن مرد زن مرد زن مرد

مرد مرد زن مرد زن مرد زن $\xrightarrow[\text{مطلوب}]{\text{تعداد حالات}}$ $۳\times \underset{\text{جایگشت مردان}}{۴!}\times \underset{\text{جایگشت زنان}}{۳!}$

زن مرد زن مرد زن مرد مرد

بنابراین با توجه به نکته:

$$P(A)=\frac{۳\times ۴!\times ۳!}{۴!\times ۱۰\times ۳!}=\frac{۳}{۱۰}$$

۴۷ - پاسخ: گزینهٔ ۳ ▲ مشخصات سؤال: متوسط * ریاضی ۱ (فصل ۷، درس ۱)

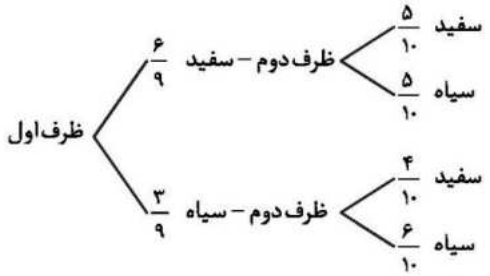
می‌دانیم در پرتاب ۲ تاس جمع اعداد روشده از ۲ تا ۱۲ را نشان می‌دهد به‌طوری که:

جمع	۲	۳	۴	۵	۶	۷	۸	۹	۱۰	۱۱	۱۲
احتمال	$\frac{۱}{۳۶}$	$\frac{۲}{۳۶}$	$\frac{۳}{۳۶}$	$\frac{۴}{۳۶}$	$\frac{۵}{۳۶}$	$\frac{۶}{۳۶}$	$\frac{۵}{۳۶}$	$\frac{۴}{۳۶}$	$\frac{۳}{۳۶}$	$\frac{۲}{۳۶}$	$\frac{۱}{۳۶}$

با توجه به جدول، در حالتی که $k=۹$ مقادیر احتمال با حالتی که مجموع برابر ۵ باشد برابر هستند، بنابراین گزینهٔ ۳ پاسخ است.

۴۸ - پاسخ: گزینهٔ ۲ ▲ مشخصات سؤال: دشوار * ریاضی ۳ (فصل ۷، درس ۱)

ابتدا به سراغ ظرف اول رفته و مهره‌ای از آن به ظرف دوم انتقال می‌دهیم.



$$\text{احتمال خروج لااقل یک مهرهٔ سفید}=\left(۱-\frac{\binom{۵}{۲}}{\underbrace{\binom{۱۰}{۲}}_{\text{هر ۲ سیاه از ظرف دوم}}}\right)\times\underset{\text{انتقال از ظرف اول با رنگ سفید}}{\frac{۶}{۹}}+\left(۱-\frac{\binom{۶}{۲}}{\binom{۱۰}{۲}}\right)\times\underset{\text{انتقال از ظرف اول با رنگ سیاه}}{\frac{۳}{۹}}$$

$$P(A)=\frac{۲}{۳}\times\left(۱-\frac{۱۰}{۴۵}\right)+\frac{۱}{۳}\left(۱-\frac{۱۵}{۴۵}\right)=\frac{۲}{۳}\times\frac{۷}{۹}+\frac{۱}{۳}\times\frac{۲}{۳}=\frac{۱۴+۶}{۲۷}=\frac{۲۰}{۲۷}$$

www.mapedu.ir

۴۹ - پاسخ: گزینهٔ ۱ ▲ مشخصات سؤال: متوسط * ریاضی ۲ (فصل ۷ درس ۱)

نکته: پیشامد A' را متمم پیشامد A می‌گویند و وقتی رخ می‌دهد که A رخ ندهد و داریم:

$$P(A)+P(A')=۱ \Rightarrow \begin{cases} P(A)=۱-P(A') \\ P(A')=۱-P(A) \end{cases}$$

از احتمال متمم استفاده می‌کنیم:

$$A \text{ لااقل یک لامپ معیوب باشد.} \Rightarrow P(\underset{\substack{\downarrow \\ \text{هر سه لامپ سالم}}}{A'})=\frac{۷}{۱۰}\times\frac{۶}{۹}\times\frac{۵}{۸}=\frac{۷}{۲۴}$$

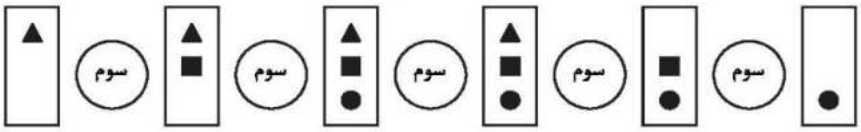
بنابراین:

$$P(A)=۱-\frac{۷}{۲۴}=\frac{۱۷}{۲۴}$$

۵۰ - پاسخ: گزینهٔ ۱ ▲ مشخصات سؤال: متوسط * ریاضی ۱ (فصل ۶، درس ۲)

نکته: تعداد حالت‌های قرارگیری n شیء در کنار یکدیگر برابر $n!$ است.

حالت اول: می‌خواهیم دانش‌آموزان دوم یک‌درمیان باشند. ابتدا دانش‌آموزان سوم را قرار می‌دهیم و داریم:



همان‌طور که معلوم است دانش‌آموزان دوم به ۳ حالت می‌توانند به‌صورت یک‌درمیان در ۶ جایگاه فوق قرار گیرند، پس داریم:

$$n_۱=۵!\times۳\times۴!$$

حالت دوم: می‌خواهیم دانش‌آموزان سوم کنار هم باشند. سپس آن‌ها را در یک بسته در نظر می‌گیریم و جایگشت این بسته با ۴ دانش‌آموز دوم را که ۵ شیء می‌شوند حساب می‌کنیم، پس:

$$n_۲=۵!\times۵!$$

اکنون داریم:

$$\frac{n_۱}{n_۲}=\frac{۵!\times۳\times۴!}{۵!\times۵!}=\frac{۳\times۴!}{۵\times۴!}=\frac{۳}{۵}$$